

УДК 532.5

## ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ В СВОБОДНОМ КОНВЕКТИВНОМ ГИДРОМАГНИТНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

А. С. Бат, А. Али

Университет Куэд-и-Азам, Исламабад, Пакистан

E-mails: adnansaeedbutt85@gmail.com, dr\_asif\_ali@hotmail.com

Изучается производство энтропии при свободном конвективном течении вдоль осциллирующей пластины. С помощью преобразования Лапласа получено точное решение дифференциальных уравнений в частных производных. Полученные выражения для скорости и температуры потока используются для вычисления поверхностного трения, числа Нуссельта, числа Бежана и локального параметра производства энтропии.

**Ключевые слова:** энтропия, свободная конвекция, осциллирующая пластина, магнитное поле.

DOI: 10.15372/PMTF20160105

**Введение.** Интерес к исследованию неустановившегося течения вдоль осциллирующей поверхности обусловлен тем, что такие течения встречаются во многих технологических процессах. В работе [1] впервые получено точное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости вдоль горизонтальной пластины, колеблющейся в своей плоскости. Такие течения имеют место в неустановившемся пограничном слое при наличии флуктуаций, в акустических потоках, обтекающих колеблющиеся тела, и т. п. В работе [2] изучено влияние свободных осцилляций на течение в пограничном слое и перенос тепла вдоль полубесконечной пластины и цилиндра. В [3] исследовано влияние осцилляций на течение ньютоновской жидкости вдоль бесконечной горизонтальной пористой пластины. Течение вдоль бесконечной осциллирующей пластины при наличии магнитного поля изучено в работе [4]. В [5] исследовалась свободная конвекция в пограничном слое вдоль вертикальной пластины, в [6] получено замкнутое решение задачи о течении вязкой жидкости, вызванном осцилляциями пластины. В работах [7, 8] изучалось влияние осцилляций и свободной конвекции на течение вдоль вертикальной бесконечной пластины при наличии постоянного всасывания через ее поверхность. Течение потока в магнитном поле вдоль осциллирующей пористой пластины исследовано в работе [9]. В [10] изучалась вторая задача Стокса (задача о поведении разреженного газа, занимающего полупространство над стенкой, совершающей гармонические колебания) при наличии неклассического закона проводимости.

В работе [11] при исследовании неустановившегося течения вязкой жидкости вдоль осциллирующей пластины использовалось преобразование Лапласа. В [12] изучалось течение на осциллирующей поверхности при наличии магнитного поля, а в [13] — неустановившееся течение вязкой жидкости, вызванное осцилляциями проницаемой плоской поверхности.

Для получения замкнутого решения задачи использовалось преобразование Лапласа. Влияние теплового излучения на свободную конвекцию в потоке несжимаемой вязкой жидкости при наличии магнитного поля вдоль осциллирующей пластины, погруженной в пористую среду, исследовано в работе [14]. В [15] изучена свободная конвекция в потоке вдоль осциллирующей пластины с учетом ее нагрева в соответствии с законом Ньютона.

Исследование влияния энтропии на течение и перенос тепла является важной задачей. Анализ результатов такого исследования позволит более полно изучить причины потери энергии в этих процессах. Автор работы [16] полагает, что знание факторов, вызывающих потери энергии, позволит качественно описать процесс переноса тепла, а также уменьшить эти потери. Данная концепция была развита другими исследователями при изучении различных задач течения с учетом переноса тепла [17–26].

В настоящей работе изучается производство энтропии при свободной конвекции в неустановившемся потоке жидкости вдоль вертикальной осциллирующей пластины в магнитном поле. Для получения решений уравнений гидродинамики и уравнения теплопроводности используется преобразование Лапласа.

**1. Математическая формулировка задачи.** Рассмотрим неустановившийся свободно-конвективный поток электропроводящей вязкой несжимаемой жидкости вдоль вертикальной пластины. Ось  $x'$  направлена вдоль пластины, ось  $y'$  — по нормали к ней. Магнитное поле постоянной напряженности  $B_0$  действует в направлении, перпендикулярном пластине, т. е. вдоль оси  $y'$ . Предполагается, что наведенное магнитное поле пренебрежимо мало по сравнению с приложенным полем. Предполагается также, что внешнее электрическое поле отсутствует. В начальный момент времени ( $t' \leq 0$ ) пластина и жидкость находятся в состоянии покоя и имеют температуру  $T_\infty$ .

В момент времени  $t' = 0^+$  пластина начинает осциллировать по закону  $U_0 \cos(\omega t')$ , где  $U_0$  — амплитуда колебаний;  $\omega'$  — частота колебаний. В тот же момент времени температура пластины становится равной  $T_w$ . Поскольку пластина предполагается бесконечной в направлении  $x'$ , все переменные, характеризующие ее физические свойства, зависят только от переменных  $y'$ ,  $t'$  и не зависят от  $x'$ . Все физические свойства жидкости полагаются постоянными, за исключением плотности, содержащейся в слагаемом, соответствующем силам плавучести. В предположении Буссинеска уравнения задачи записываются в виде

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} - \frac{\sigma B_0^2 u'}{\rho} + \beta g(T' - T_\infty), \quad \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}, \quad (1)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\sigma$  — электропроводность;  $\beta$  — коэффициент объемного температурного расширения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $k$  — теплопроводность;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Ставятся следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} t' \leq 0: & \quad u' = 0, \quad T' = T_\infty, & y' \geq 0, \\ t' > 0: & \quad u' = U_0 \cos(\omega t'), \quad T' = T_w, & y' = 0, \\ & \quad u' \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T_\infty, & y' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} t = \frac{t' U_0^2}{\nu}, \quad y = \frac{y' U_0}{\nu}, \quad u = \frac{u'}{U_0}, \quad \omega = \frac{\omega' \nu}{U_0^2}, \\ \theta = \frac{T' - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad M = \frac{\sigma B_0^2 \nu}{\rho U_0^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \nu (T_w - T_\infty)}{U_0^3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $M$  — параметр магнитного поля;  $\text{Pr}$  — число Прандтля;  $\text{Gr}$  — число Грасгофа.

В безразмерных переменных (2) дифференциальные уравнения (1) записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + Gr \theta; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Начальные и граничные условия приводятся к виду

$$t \leq 0: \quad u = 0, \quad \theta = 0, \quad y \geq 0; \quad (5)$$

$$t > 0: \quad u = \cos(\omega t), \quad \theta = 1, \quad y = 0, \quad (6)$$

$$u \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

**2. Производство энтропии.** Согласно [16] локальная объемная скорость производства энтропии определяется следующим образом:

$$S_G = \frac{k}{T_\infty^2} \left( \frac{\partial T'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{\mu}{T_\infty} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \frac{\sigma B_0^2}{T_\infty} u'^2.$$

Здесь первое слагаемое — энтропия вследствие переноса тепла; второе — энтропия вследствие наличия вязкости жидкости; третье — энтропия вследствие наличия магнитного поля.

В безразмерных переменных выражение для производства энтропии записывается в виде

$$N_S = \frac{S_G}{S_0} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \frac{Br}{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{Br}{\Omega} Mu^2, \quad (7)$$

где  $S_0 = k(T_w - T_\infty)^2 U_0^2 / (T_\infty^2 \nu^2)$  — характеристическая скорость производства энтропии;  $\Omega = (T_w - T_\infty) / T_\infty$  — безразмерная разность текущей и начальной температур пластины;  $Br = \mu U_0^2 / [k(T_w - T_\infty)]$  — число Бринкмана;  $N_S$  — параметр производства энтропии (отношение локальной объемной скорости производства энтропии  $S_G$  к характеристической скорости производства энтропии  $S_0$ ). Другой параметр (число Бежана  $Be$ ) характеризует отношение вклада теплопереноса в производство энтропии к соответствующему вкладу вязкости и магнитного поля. Этот параметр определяется следующим образом:

$$Be = \frac{1}{S_{tot}} \frac{k}{T_\infty^2} \left( \frac{\partial T'}{\partial y'} \right)^2 \quad (8)$$

( $S_{tot}$  — полное производство энтропии).

Из (8) следует, что число Бежана изменяется от нуля до единицы. Вклад теплопереноса в производство энтропии больше вклада вязкости жидкости и магнитного поля, если  $Be > 0,5$ . Если  $Be = 0,5$ , то эти вклады одинаковы.

**3. Решение задачи.** Для получения точного решения дифференциальных уравнений (3), (4) с граничными условиями (5) и начальными условиями (6) используется преобразование Лапласа. Применяя преобразование Лапласа по времени  $t$  к уравнениям (3), (6), получаем

$$p\bar{u}(y, p) - u(y, 0) = \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - M\bar{u}(y, p) + Gr\bar{\theta}(y, p),$$

$$Pr [p\bar{\theta}(y, p) - \theta(y, 0)] = \frac{d^2 \bar{\theta}(y, p)}{dy^2},$$

где  $\bar{u}(y, p)$ ,  $\bar{\theta}(y, p)$  — образы преобразования Лапласа функций  $u(y, t)$  и  $\theta(y, t)$  соответственно:

$$\bar{u}(y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(y, t) dt, \quad \bar{\theta}(y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \theta(y, t) dt.$$

Применяя преобразование Лапласа к начальным условиям (5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - p \bar{u}(y, p) - M \bar{u}(y, p) + \text{Gr} \bar{\theta}(y, p) &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\theta}}{dy^2} - \text{Pr} p \bar{\theta}(y, p) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя преобразование Лапласа к краевым условиям (6), находим

$$\begin{aligned} \bar{u}(y, p) &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \bar{\theta}(y, p) = \frac{1}{p}, \quad y = 0, \\ \bar{u}(y, p) &\rightarrow 0, \quad \bar{\theta}(y, p) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Решения уравнений (9), удовлетворяющие краевым условиям (10), записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}(y, p) &= \frac{1}{2(p + i\omega)} e^{-\sqrt{p+M}y} + \frac{1}{2(p - i\omega)} e^{-\sqrt{p+M}y} - \frac{\text{Gr}}{M} \frac{1}{p} e^{-\sqrt{p+M}y} + \\ &+ \frac{\text{Gr}}{M} \frac{1}{p - M/(\text{Pr} - 1)} e^{-\sqrt{p+M}y} + \frac{\text{Gr}}{M} \frac{1}{p} e^{-\sqrt{\text{Pr}p}y} + \frac{\text{Gr}}{M} \frac{1}{p - M/(\text{Pr} - 1)} e^{-\sqrt{\text{Pr}p}y}, \\ \bar{\theta}(y, p) &= \frac{1}{p} e^{-\sqrt{\text{Pr}p}y}. \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем [27]

$$\theta(y, t) = \text{erfc} \left( \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{t}} \right); \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u(y, t) &= \\ &= \frac{1}{4} e^{i\omega t} \left[ e^{-\sqrt{M+i\omega}y} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{(M+i\omega)t} \right) + e^{\sqrt{M+i\omega}y} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{(M+i\omega)t} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4} e^{-i\omega t} \left[ e^{-\sqrt{M+i\omega}y} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{(M-i\omega)t} \right) + e^{\sqrt{M-i\omega}y} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{(M-i\omega)t} \right) \right] - \\ &- \frac{\text{Gr}}{2M} \left[ e^{-\sqrt{M}y} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{Mt} \right) + e^{\sqrt{M}y} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{Mt} \right) \right] + \\ &+ \frac{\text{Gr}}{2M} \left\{ e^{Mt/(\text{Pr}-1)} \left[ e^{-y\sqrt{M\text{Pr}/(\text{Pr}-1)}} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{M\text{Pr}}{\text{Pr}-1}t} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. e^{y\sqrt{M\text{Pr}/(\text{Pr}-1)}} \text{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\frac{M\text{Pr}}{\text{Pr}-1}t} \right) \right] \right\} + \frac{\text{Gr}}{H} \text{erfc} \left( \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{t}} \right) - \\ &- \frac{\text{Gr}}{2M} \left\{ e^{Mt/(\text{Pr}-1)} \left[ e^{y\sqrt{M\text{Pr}/(\text{Pr}-1)}} \text{erfc} \left( \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{t}} + \sqrt{\frac{M}{\text{Pr}-1}t} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. e^{-y\sqrt{M\text{Pr}/(\text{Pr}-1)}} \text{erfc} \left( \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{t}} - \sqrt{\frac{M}{\text{Pr}-1}t} \right) \right] \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Заметим, что эти решения справедливы, если  $Pr \neq 1$ . Если  $Pr = 1$ , то

$$\begin{aligned} u(y, t) = & \\ = & \frac{1}{4} e^{i\omega t} \left[ e^{-\sqrt{M+i\omega}y} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{(M+i\omega)t} \right) + e^{\sqrt{M+i\omega}y} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{(M+i\omega)t} \right) \right] + \\ + & \frac{1}{4} e^{-i\omega t} \left[ e^{-\sqrt{M-i\omega}y} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{(M-i\omega)t} \right) + e^{\sqrt{M-i\omega}y} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{(M-i\omega)t} \right) \right] - \\ - & \frac{Gr}{2M} \left[ e^{-\sqrt{M}y} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} - \sqrt{Mt} \right) + e^{\sqrt{M}y} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{t}} + \sqrt{Mt} \right) \right] + \frac{Gr}{H} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2} \sqrt{\frac{Pr}{t}} \right). \end{aligned}$$

Поверхностное трение, являющееся мерой сдвиговых напряжений на поверхности пластины, вычисляется следующим образом:

$$\tau = -\mu \left. \frac{\partial u'}{\partial y'} \right|_{y'=0}. \quad (13)$$

С учетом (2) формула (13) записывается в виде

$$\tau = -\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}.$$

При  $Pr \neq 1$  имеем

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{Gr}{M} \sqrt{\frac{Pr}{\pi t}} + \frac{Gr}{2M} \left( \sqrt{M} \operatorname{erfc}(\sqrt{Mt}) - \sqrt{M} \operatorname{erfc}(-\sqrt{Mt}) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-Mt} \right) - \\ & - \frac{Gr}{2M} e^{Mt/(Pr-1)} \left[ \sqrt{\frac{M Pr}{Pr-1}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{M Pr t}{Pr-1}} \right) - \right. \\ & - \left. \sqrt{\frac{M Pr}{Pr-1}} \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{M Pr t}{Pr-1}} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-M Pr t/(Pr-1)} \right] + \\ & + \frac{Gr}{2M} e^{Mt/(Pr-1)} \left[ \sqrt{\frac{M Pr}{Pr-1}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{Mt}{Pr-1}} \right) - \right. \\ & - \left. \sqrt{\frac{M Pr}{Pr-1}} \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{Mt}{Pr-1}} \right) - \frac{2\sqrt{Pr}}{\sqrt{\pi t}} e^{-Mt/(Pr-1)} \right] - \\ - & \frac{e^{i\omega t}}{4} \left( \sqrt{M+i\omega} \operatorname{erfc}(\sqrt{(M+i\omega)t}) - \sqrt{M+i\omega} \operatorname{erfc}(-\sqrt{(M+i\omega)t}) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-(M+i\omega)t} \right) - \\ - & \frac{e^{-i\omega t}}{4} \left( \sqrt{M-i\omega} \operatorname{erfc}(\sqrt{(M-i\omega)t}) - \sqrt{M-i\omega} \operatorname{erfc}(-\sqrt{(M-i\omega)t}) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-(M-i\omega)t} \right). \end{aligned}$$

При  $Pr = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{Gr}{M} \sqrt{\frac{Pr}{\pi t}} + \frac{Gr}{2M} \left( \sqrt{M} \operatorname{erfc}(\sqrt{Mt}) - \sqrt{M} \operatorname{erfc}(-\sqrt{Mt}) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-Mt} \right) - \\ - & \frac{e^{i\omega t}}{4} \left( \sqrt{M+i\omega} \operatorname{erfc}(\sqrt{(M+i\omega)t}) - \sqrt{M+i\omega} \operatorname{erfc}(-\sqrt{(M+i\omega)t}) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-(M+i\omega)t} \right) - \\ - & \frac{e^{-i\omega t}}{4} \left( \sqrt{M-i\omega} \operatorname{erfc}(\sqrt{(M-i\omega)t}) - \sqrt{M-i\omega} \operatorname{erfc}(-\sqrt{(M-i\omega)t}) - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-(M-i\omega)t} \right). \end{aligned}$$

Определим безразмерное число Нуссельта, которое является мерой скорости теплопереноса на поверхности пластины:

$$\text{Nu} = -\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\pi t}}.$$

Выражения для параметра производства энтропии и числа Бежана можно получить, дифференцируя скорость (11) и температуру (12) и подставляя полученные выражения в (7), (8). Вследствие громоздкости этих выражений в данной работе они не приводятся.

**4. Обсуждение результатов.** С использованием полученных решений для различных параметров задачи построены зависимости скорости, температуры, поверхностного трения, числа Нуссельта, локального параметра производства энтропии и числа Бежана от координаты  $y$ .

Из приведенных на рис. 1–3 зависимостей следует, что по мере удаления от пластины скорость потока увеличивается и достигает максимума на некотором расстоянии от стенки, затем она уменьшается и стремится к нулю при стремлении расстояния от пластины к бесконечности.

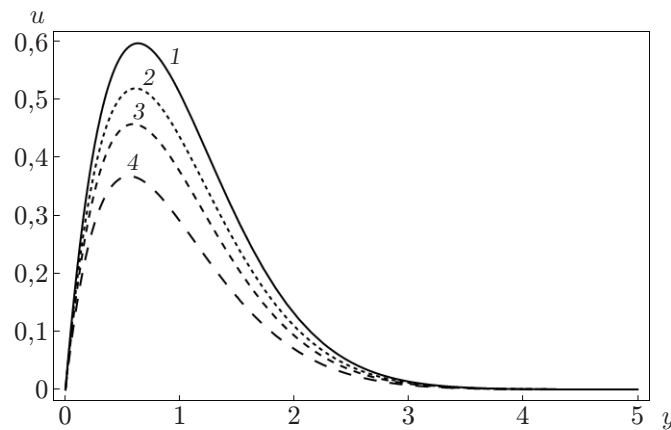


Рис. 1. Зависимость скорости потока от координаты  $y$  при  $\text{Pr} = 0,71$ ,  $\text{Gr} = 5,0$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$  и различных значениях параметра магнитного поля  $M$ : 1 —  $M = 1$ , 2 —  $M = 2$ , 3 —  $M = 3$ , 4 —  $M = 5$

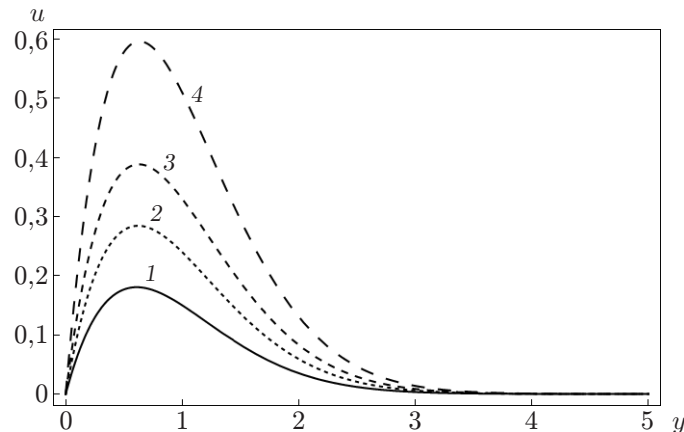


Рис. 2. Зависимость скорости потока от координаты  $y$  при  $M = 1,0$ ,  $\text{Pr} = 0,71$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$  и различных значениях числа Грасгофа: 1 —  $\text{Gr} = 1$ , 2 —  $\text{Gr} = 2$ , 3 —  $\text{Gr} = 3$ , 4 —  $\text{Gr} = 5$

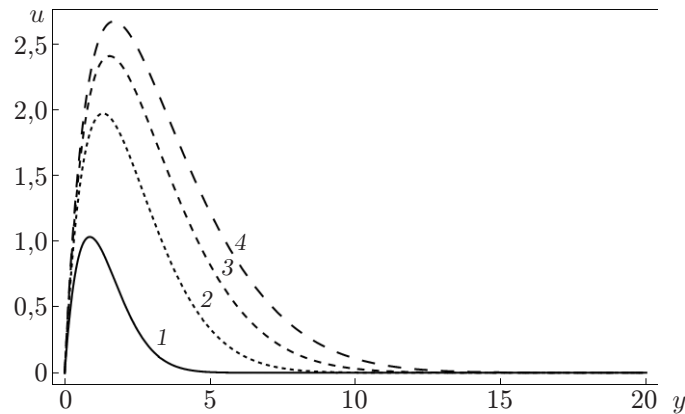


Рис. 3. Зависимость скорости потока от координаты  $y$  при  $M = 1,0$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 5,0$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$  в различные моменты времени: 1 —  $t = 1$ , 2 —  $t = 3$ , 3 —  $t = 5$ , 4 —  $t = 7$

Таблица 1

Зависимость поверхностного трения от различных параметров

$t$	$M$	$Gr$	$Pr$	$\tau$
0,5	1,0	5,0	0,71	-2,323 720
	2,0			-2,124 150
	3,0			-1,960 900
	5,0			-1,711 900
0,5	1,0	1,0	0,71	-0,464 745
		2,0	0,71	-0,929 489
		3,0	0,71	-1,394 230
0,5	1,0	5,0	1,00	-2,192 640
		5,0	3,00	-1,736 520
		5,0	5,00	-1,518 800
0,2	1,0	5,0	0,71	-1,559 340
0,7				-2,649 080
1,0				-3,004 000

Таблица 2

Зависимость поверхностного трения от времени  $t$  и числа Прандтля

$t$	$Pr$	$Nu$
0,5	0,71	0,440 130
	1,00	0,522 338
	3,00	0,904 716
	5,00	1,167 980
	7,00	1,381 980
0,2	0,71	0,695 906
0,7		0,371 978
1,0		0,311 219
1,5		0,254 109

С увеличением параметра магнитного поля скорость потока уменьшается (см. рис. 1). Это обусловлено тем, что поперечное магнитное поле создает тормозящую силу, известную как сила Лоренца. Число Грасгофа характеризует соотношение между силами плавучести и силами вязкости. С увеличением числа Грасгофа увеличиваются индуцированные потоки, что вызывает увеличение скорости потока (см. рис. 2). Кроме того, скорость потока увеличивается со временем (см. рис. 3).

Данные о зависимости поверхностного трения от различных параметров задачи при  $\omega t = \pi/2$  приведены в табл. 1. Поверхностное трение увеличивается с увеличением параметра магнитного поля и числа Прандтля и уменьшается с увеличением числа Грасгофа и времени.

На рис. 4, 5 приведены зависимости температуры потока от координаты  $y$  при различных значениях числа Прандтля и в различные моменты времени соответственно. Температура максимальна на пластине и асимптотически стремится к нулю по мере удаления от нее. С увеличением числа Прандтля температура уменьшается (см. рис. 4), поскольку

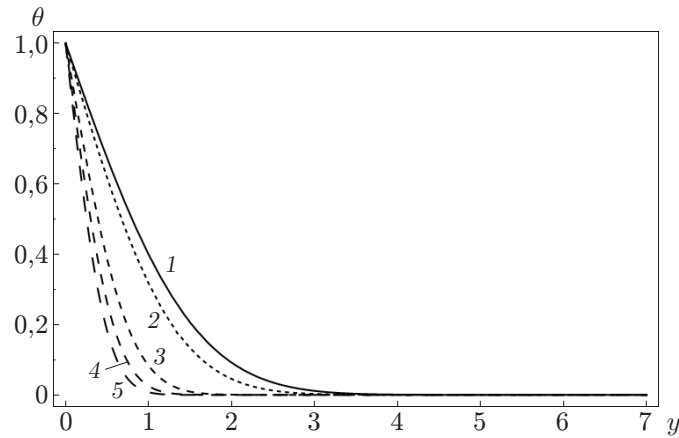


Рис. 4. Зависимость температуры потока от координаты  $y$  при  $M = 1,0$ ,  $Gr = 5,0$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$  и различных значениях числа Прандтля: 1 —  $Pr = 0,71$ , 2 —  $Pr = 1,0$ , 3 —  $Pr = 3,0$ , 4 —  $Pr = 5,0$ , 5 —  $Pr = 7,1$

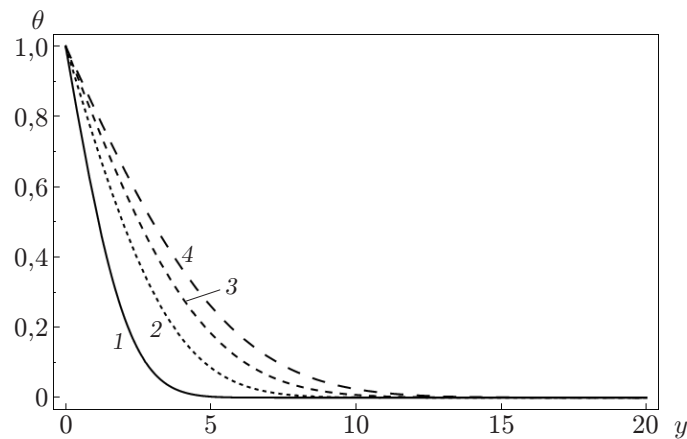


Рис. 5. Зависимость температуры потока от координаты  $y$  при  $M = 1,0$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 5,0$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$  в различные моменты времени: 1 —  $t = 1$ , 2 —  $t = 3$ , 3 —  $t = 5$ , 4 —  $t = 7$

в этом случае увеличивается вязкость жидкости, что приводит к увеличению толщины потока и уменьшению теплопередачи. С увеличением времени температура увеличивается (см. рис. 5).

В табл. 2 приведены данные о зависимости числа Нуссельта от числа Прандтля и времени. При фиксированном значении числа Прандтля число Нуссельта уменьшается со временем. С увеличением числа Прандтля число Нуссельта увеличивается.

Зависимости локального параметра производства энтропии от различных параметров задачи приведены на рис. 6, 7. При фиксированном значении параметра  $M$  величина  $N_S$  имеет максимальное значение на осциллирующей пластине и асимптотически стремится к нулю по мере удаления от нее. С увеличением параметра  $M$  уменьшается скорость производства энтропии вблизи осциллирующей пластины. Однако на небольшом расстоянии от пластины такая зависимость меняется на противоположную: скорость производства энтропии увеличивается с увеличением  $M$  (см. рис. 6).



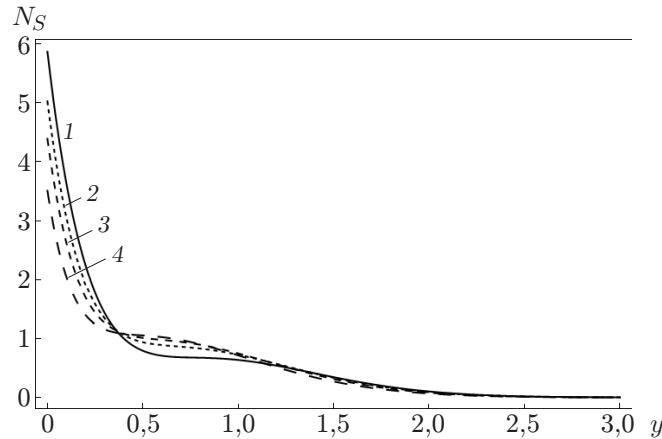


Рис. 6. Зависимость параметра  $N_S$  от координаты  $y$  при  $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 5,0$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$ ,  $Br/\Omega = 1,0$  и различных значениях параметра  $M$ :  
 1 —  $M = 1$ , 2 —  $M = 2$ , 3 —  $M = 3$ , 4 —  $M = 5$

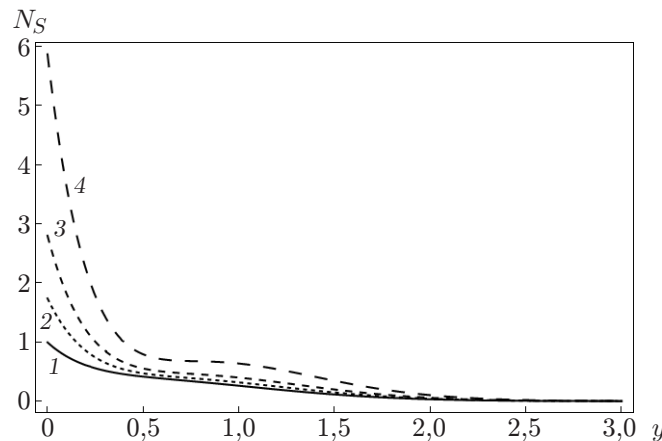


Рис. 7. Зависимость параметра  $N_S$  от координаты  $y$  при  $M = 1,0$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$ ,  $Br/\Omega = 1,0$  и различных значениях числа Грасгофа  $Gr$ :  
 1 —  $Gr = 1$ , 2 —  $Gr = 2$ , 3 —  $Gr = 3$ , 4 —  $Gr = 5$

При фиксированном числе Грасгофа  $Gr$  локальный параметр производства энтропии  $N_S$  уменьшается по мере удаления от осциллирующей пластины и стремится к нулю (см. рис. 7). Из зависимостей, приведенных на рис. 7, следует также, что с увеличением  $Gr$  параметр  $N_S$  увеличивается.

На рис. 8, 9 приведены зависимости числа Бежана  $Be$  от параметров задачи. По значению числа Бежана можно судить о том, какой вклад вносят в производство энтропии вязкость жидкости, магнитное поле и теплоперенос. На рис. 8 приведена зависимость числа Бежана  $Be$  от параметра магнитного поля. Видно, что вязкость жидкости и магнитное поле вносят основной вклад в производство энтропии на осциллирующей пластине. Влияние теплопереноса становится преобладающим вблизи пластины, затем вновь доминирует влияние магнитного поля и вязкости жидкости. Вдали от пластины основной вклад в производство энтропии вносит теплоперенос. Следует еще раз отметить, что с увеличением параметра  $M$  увеличивается влияние теплопереноса на производство энтропии. С увеличением числа Грасгофа увеличивается вклад в производство энтропии вязкости жидкости и магнитного поля (см. рис. 9).

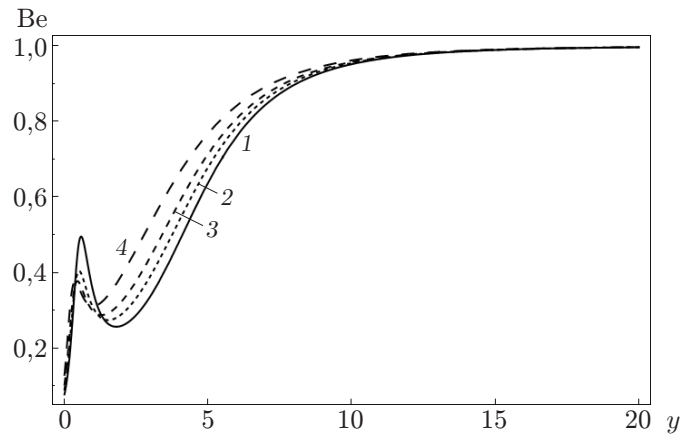


Рис. 8. Зависимость числа Бижана  $Be$  от координаты  $y$  при  $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 5,0$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$ ,  $Br/\Omega = 1,0$  и различных значениях параметра  $M$ :  
1 —  $M = 1$ , 2 —  $M = 2$ , 3 —  $M = 3$ , 4 —  $M = 5$

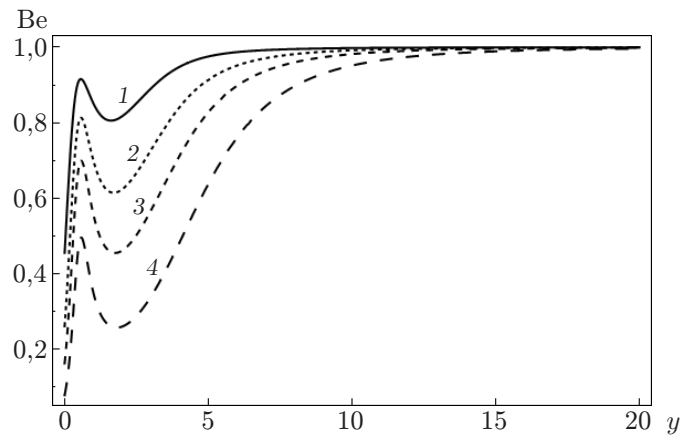


Рис. 9. Зависимость числа Бижана  $Be$  от координаты  $y$  при  $M = 1,0$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $\omega t = \pi/2$ ,  $t = 0,5$ ,  $Br/\Omega = 1,0$  и различных значениях числа Грасгофа  $Gr$ :  
1 —  $Gr = 1$ , 2 —  $Gr = 2$ , 3 —  $Gr = 3$ , 4 —  $Gr = 5$

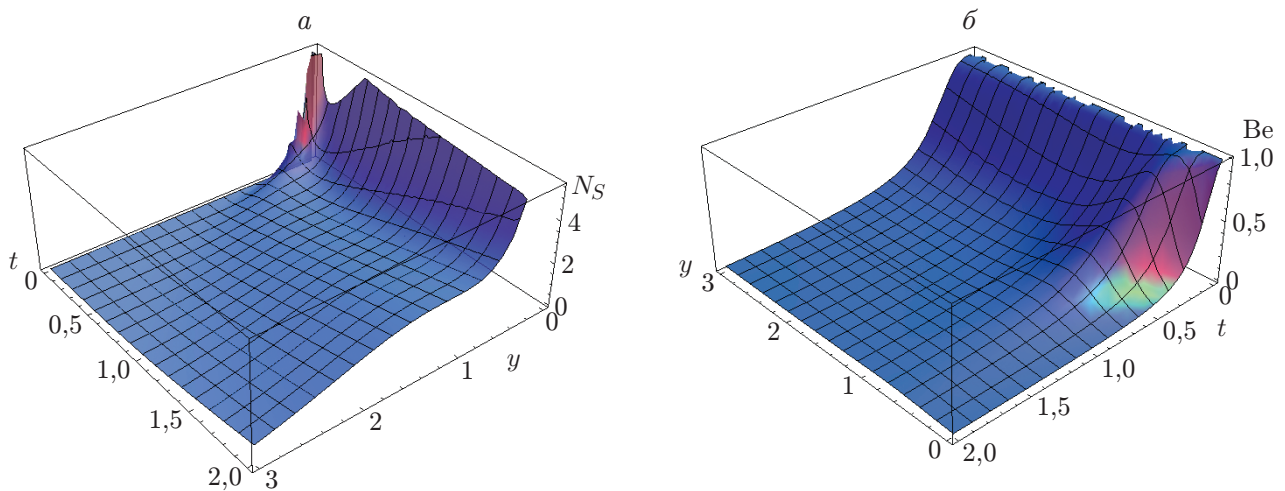


Рис. 10. Зависимости параметра  $N_S$  (а) и числа Бижана  $Be$  (б) от  $y$  и  $t$

На рис. 10,а приведена зависимость параметра  $N_S$  от  $y$  и  $t$ . Следует отметить, что параметр  $N_S$  уменьшается с увеличением расстояния  $y$  от пластины и увеличивается со временем. На рис. 10,б приведен график функции  $Be(y, t)$ . Видно, что при увеличении  $y, t$  вклад вязкости жидкости и магнитного поля в производство энтропии увеличивается.

**Заключение.** В работе исследовано производство энтропии при свободной конвекции в неустановившемся магнитогидродинамическом потоке вблизи вертикальной осциллирующей пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Schlichting H.** Boundary layer theory. 8th ed. / H. Schlichting, K. Gersten. Berlin: Springer, 2000.
2. **Lighthill M. J.** The response of skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 224. P. 1–23.
3. **Stuart J. T.** A solution of the Navier — Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 231. P. 116–130.
4. **Ong R. S., Nicholls J. A.** Flow of a magnetic field near an infinite oscillating flat wall // J. Aerospace Sci. 1959. V. 26. P. 313–314.
5. **Nanda R. S., Sharma V. P.** Free convection laminar boundary layers in oscillatory flow // J. Fluid Mech. 1963. V. 15. P. 419–428.
6. **Penton R.** The transient for Stoke's oscillating plane: a solution in terms of tabulated functions // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. P. 819–825.
7. **Soundalgekar V. M.** Free convection effects on the flow past an infinite vertical oscillating plate // Astrophys. Space Sci. 1983. V. 89. P. 241–254.
8. **Soundalgekar V. M., Akolkar S. P.** Effect of free convection currents and mass transfer on flow past a vertical oscillating plate // Astrophys. Space Sci. 1979. V. 64. P. 165–171.
9. **Choudhary R. C.** Hydromagnetic flow near an oscillating porous flat plate // Proc. Indian Acad. Sci. 1977. V. 86A, N 6. P. 531–535.
10. **Puri P., Kythe P. K.** Thermal effect in Stokes' second problem // Acta Mech. 1998. V. 112. P. 44–50.
11. **Erdogan M. E.** A note on an unsteady flow of a viscous fluid due to an oscillating plane wall // J. Non-Linear Mech. 2000. V. 35. P. 1–6.
12. **Vajravelu K., Rivera J.** Hydromagnetic flow at an oscillating plate // Intern. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38. P. 305–312.
13. **Liu C. M., Hwung H. H., Kong C. H.** The unsteady viscous flow generated by an oscillating porous plate // J. Mech. 2008. V. 24, N 2. P. 145–152.
14. **Khan I., Fakhur K., Shafie S.** Magnetohydrodynamic free convection flow past an oscillating plate embedded in a porous medium // J. Phys. Soc. Japan. 2011. V. 80. P. 104401–104410.
15. **Hussanan A., Imran M., Ali F., et al.** Natural convection flow past an oscillating plate with Newtonian heating // Heat Trans. Res. 2014. V. 45, iss. 2. P. 119–135. DOI: 10.1615/HeatTransRes.2013006385.
16. **Bejan A.** A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer // J. Heat Transfer. 1979. V. 101. P. 718–725.
17. **Odat M. Q. A., Damseh R. A., Nimr M. A. A.** Effect of magnetic field on entropy generation due to laminar forced convection past a horizontal flat plate // Entropy. 2004. V. 4. P. 293–303.

18. **Makinde O. D., Osalusi E.** Entropy generation in a liquid film falling along an inclined porous heated plate // *Mech. Res. Comm.* 2006. V. 33, N 5. P. 692–698.
19. **Makinde O. D.** Irreversibility analysis for a gravity driven non-Newtonian liquid film along an inclined isothermal plate // *Phys. Scripta.* 2006. V. 74. P. 642–645.
20. **Reveillere A., Baytas A. C.** Minimum entropy generation for laminar boundary layer flow over a permeable plate // *Intern. J. Exergy.* 2010. V. 7, N 2. P. 164–177.
21. **Makinde O. D.** Thermodynamic second law analysis for a gravity driven variable viscosity liquid film along an inclined heated plate with convective cooling // *J. Mech. Sci. Tech.* 2010. V. 24, N 4. P. 899–908.
22. **Makinde O. D.** Entropy analysis for MHD boundary layer flow and heat transfer over a flat plate with a convective surface boundary condition // *Intern. J. Exergy.* 2012. V. 10, N 2. P. 142–154.
23. **Makinde O. D.** Second law analysis for variable viscosity hydromagnetic boundary layer flow with thermal radiation and Newtonian heating // *Entropy.* 2011. V. 13. P. 1446–1464.
24. **Butt A. S., Munawar S., Ali A., Mehmood A.** Entropy generation in the Blasius flow under thermal radiation // *Phys. Scripta.* 2012. V. 85. 035008. DOI: 10.1088/0031-8949/85/03/035008.
25. **Butt A. S., Munawar S., Ali A., Mehmood A.** Entropy generation in hydrodynamic slip flow over a vertical plate with convective boundary // *J. Mech. Sci. Tech.* 2012. V. 26, N 9. P. 2977–2984.
26. **Butt A. S., Ali A.** Entropy effects in hydromagnetic free convection flow past a vertical plate embedded in a porous medium in the presence of thermal radiation // *Eur. Phys. J. Plus.* 2013. V. 128, N 5. P. 1–15. DOI: 10.1140/epjp/i2013-13051-y.
27. **Abramowitz B. M.** Handbook of mathematical functions / B. M. Abramowitz, I. A. Stegun. N. Y.: Dover Publ., 1970.

*Поступила в редакцию 21/XI 2013 г.*

---