Тогда пять уравнений системы (4.3) (кроме уравнения для g_3) для пяти функций G_1, G_2, M, N, F можно записать в виде

$$G_1 \frac{\partial G_k}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial G_k}{\partial \xi_2} + M \frac{\partial N}{\partial \xi_k} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} N \frac{\partial M}{\partial \xi_k} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

$$G_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + F^2 = 0,$$

$$G_1 \frac{\partial M}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial M}{\partial \xi_2} + (\gamma - 1) M \left(F + \frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial G_2}{\partial \xi_2}\right) = 0, \quad G_1 \frac{\partial N}{\partial \xi_1} + G_2 \frac{\partial N}{\partial \xi_2} = 0.$$

После решения этой системы, содержащей произвол в пять функций от одной переменной, для определения g_3 остается линейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial g_3}{\partial t} + (G_1 + a_1) \frac{\partial g_3}{\partial x_1} + (G_2 + a_2) \frac{\partial g_3}{\partial x_2} + F g_3 = 0.$$

Таким образом, построен класс тройных (если G_1 и G_2 функционально независимы) волн с указанным выше произволом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dirichlet G. L.** Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik.— J. reine angew. Math.— 1861.— Bd 58, H. 4.
2. **Риман Б.** Сочинения.— М.: Гостехиздат, 1948.
3. **Овсянников Л. В.** Новое решение уравнений гидродинамики // ДАН СССР.— 1956.— Т. 111, № 1.
4. **Богоявленский О. И., Новиков С. П.** Однородные модели в общей теории относительности и газовой динамике // УМН.— 1976.— Т. 31, № 5(191).
5. **Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.** Групповой анализ дифференциальных уравнений механики // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика.— М.: ВИНИТИ 1975.— Т. 2.
6. **Сидоров А. Ф.** О двух классах решений уравнений газовой динамики // ПМТФ.— 1980.— № 5.
7. **Сидоров А. Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981.
8. **Ульянов О. Н.** О двух классах движений газа в поле тяжести // Моделирование в механике.— Новосибирск, 1988.— Т. 2(19), № 1.
9. **Сидоров А. Ф.** О двух типах закрученных газовых потоков // ПММ.— 1983.— Т. 47, вып. 5.
10. **Ульянов О. Н.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985.
11. **Ульянов О. Н.** Об одном классе закрученных газовых потоков // Моделирование процессов гидрогазодинамики и энергетики: Тр. Всесоюз. конф. молодых ученых и специалистов.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985.
12. **Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.— Новосибирск: Наука, 1984.
13. **Мелешко С. В.** К классификации плоских изэнтропических течений газа типа двойной волны // ПММ.— 1985.— Т. 49, вып. 3.
14. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.

Поступила 3/VIII 1988 г.

УДК 517.958

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ФОРМАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов

(Уфа)

Методы классического группового анализа позволяют выделить среди всех уравнений математической физики уравнения, замечательные по своим свойствам симметрии. К сожалению, любое малое возмущение уравнения разрушает допускаемую группу, что снижает прикладную ценность этих «рафинированных» уравнений и те ретико-групповых методов вообще. Поэтому необходима разработка методов группового анализа, устойчивых относительно малых возмущений дифференциальных уравнений. На актуальность такой задачи неоднократно обращал внимание Л. В. Овсянников: «Задачи исследования групповых свойств в «целом», выяснения приближенных групповых свойств и другие пока еще только ждут своего разрешения»,— говорит он в предисловии к своей первой книге по групповому анализу [1], а в 1974 г. вновь отмечает [2], что «сколько-нибудь развитой общей теории приближенного группового моделирования пока нет».

Недавно разработана [3, 4] аналитическая теория приближенных симметрий дифференциальных уравнений с малым параметром, выведены определяющие уравнения для их вычисления и построены приближенные симметрии некоторых классов уравнений. Если уравнение

$$F_0 + \varepsilon F_1 \approx 0 \tag{0.1}$$

с малым параметром ε приближенно (с точностью до $o(\varepsilon^p)$) допускает инфинитезимальный оператор

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + \ldots + \varepsilon^p X_p,\ p \geqslant 1, \tag{0.2}$$

то невозмущенное уравнение

$$F_0 = 0 \tag{0.3}$$

инвариантно (не приближенно, а точно) относительно оператора X_0. В общем случае не всякий оператор X_0, допускаемый уравнением (0.3), наследуется возмущенным уравнением (0.1), т. е. продолжается до оператора (0.2) приближенной симметрии. Полное наследование возмущенным уравнением всей группы невозмущенного уравнения в виде группы приближенных симметрий осуществляется в исключительных случаях. Как показано в [3], оно происходит в классе эволюционных уравнений

$$u_t = h(u)u_x + \varepsilon H, \tag{0.4}$$

где $h(u)$— произвольная функция; $H = H(t,\ x,\ u,\ u_x, \ldots)$— произвольный элемент пространства $\mathscr{A}[x,\ u]$ дифференциальных функций. При этом порядок p точности наследования может быть выбран произвольным. Последнее обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение новый объект — формальные симметрии, а также тесно связанные с ними формальные преобразования Беклунда. Изучению этих формальных симметрий и преобразований посвящена настоящая работа.

Переход от приближенных симметрий к формальным позволяет снять условие малости параметра ε и рассматривать его в качестве «градуирующего элемента». Формальные симметрии уравнения (0.4) представляют собой формальные степенные ряды вида

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f^i, \quad f^i \in \mathscr{A} \tag{0.5}$$

и строятся рекуррентно с помощью определяющего уравнения

$$X\,(u_t - h\,(u)\,u_x - \varepsilon H)\,|_{(0.4)} = 0, \quad X = f\frac{\partial}{\partial u} + \ldots$$

В предположении малости параметра ε любая конечная сумма ряда (0.5), задающего формальную симметрию, определяет приближенную симметрию. Среди формальных симметрий особое место занимают симметрии, удовлетворяющие условию обрыва формального ряда (0.5). При выполнении этого условия получаются известные симметрии Ли — Беклунда. Отметим, что предлагаемый подход дает, по существу, новый способ построения симметрий Ли — Беклунда, отличающийся от обычного [5] тем, что процесс построения координат канонического оператора Ли — Беклунда идет теперь не от старших (по производным) членов к младшим, а наоборот. Наш подход позволяет также выяснить, как происходит, что группы Ли — Беклунда, допускаемые отдельно уравнениями Бюргерса и Кортевега — де Вриза, исчезают (в рамках теории групп Ли — Беклунда) при рассмотрении объединенного уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза: оказывается, что эти группы при переходе к уравнению Бюргерса — Кортевега — де Вриза трансформируются в формальные симметрии, не удовлетворяющие условию обрыва ряда.

Формальные (приближенные) преобразования Беклунда также задаются рекуррентно строящимися формальными степенными рядами (их конечными суммами) по ε с коэффициентами из $\mathscr{A}$. Использование формальных преобразований Беклунда позволяет, в частности, линеаризовать все эволюционные уравнения, приводимые к виду (0.4). Например, таким путем линеаризуется уравнение Кортевега — де Вриза $u_t = uu_x + u_{xxx}$. Ранее в [6] предложены линеаризация этого уравнения формальным рядом и сводимость его к уравнению $u_t = u_{xxx}$. Сходимость этого ряда в определенном смысле с применением теории нелинейных представлений групп Ли [7] была доказана в [8]. В отличие от линеаризации [6, 8] наш подход, во-первых, позволяет строить формальный ряд с явно «вычислимыми» коэффициентами и, во-вторых, вскрывает новые групповые особенности уравнения Кортевега — де Вриза.

Используются следующие обозначения: t, x — независимые переменные; u — дифференциальная переменная с последовательными производными (по x) $u_{\alpha+1} = D(u_\alpha)$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, u_0 = u$, где $D = \partial/\partial x + \sum_{\alpha\geqslant 0} u_{\alpha+1}\partial/\partial u_\alpha$; $\mathscr{A}[x, u]$ — пространство дифференциальных функций, т. е. аналитических функций произвольного конечного числа переменных $t, x, u, u_1, \ldots$; $f_t = \partial f/\partial t$; $f_x = \partial f/\partial x$; $f_\alpha = \partial f/\partial u_\alpha$; $f_* = \sum_{\alpha\geqslant 0} f_\alpha D^\alpha$.

1. Формальные симметрии уравнения $u_t = h(u)u_x + \varepsilon H$.

Теорема 1.1. *Все симметрии уравнения*

$$u_t = h(u)u_1 \tag{1.1}$$

наследуются уравнением

$$u_t = h(u)u_1 + \varepsilon H,\ H \in \mathscr{A} \tag{1.2}$$

и реализуются для него в виде формальных симметрий

$$f = \sum_{i\geqslant 0} \varepsilon^i f^i, \quad f^i \in \mathscr{A}. \tag{1.3}$$

А именно, любой канонический оператор Ли — Беклунда $X_0 = f^0\,\partial/\partial u + \ldots$, допускаемый уравнением (1.1), *продолжается до оператора $X = f\,\partial/\partial u + \ldots$ с координатой* (1.3), *допускаемого уравнением* (1.2).

Доказательство. Определяющее уравнение $D_t(f) - h(u)D_x(f) - h'(u)u_1 f = \varepsilon H_* f$ для нахождения инфинитезимального оператора $X = f\partial/\partial u + \ldots$, допускаемого уравнением (1.2), после расщепления по степеням ε принимает вид

$$f_t^0 - h(u)f_x^0 + \sum_{\alpha\geqslant 1}\left[D^\alpha(hu_1) - hu_{\alpha+1}\right]f_\alpha^0 - h'(u)u_1 f^0 = 0; \tag{1.4}$$

$$f_t^i - h(u)f_x^i + \sum_{\alpha\geqslant 1}\left[D^\alpha(hu_1) - hu_{\alpha+1}\right]f_\alpha^i - h'(u)u_1 f^i = \sum_{\alpha\geqslant 0}\left[D^\alpha(f^{i-1})H_\alpha - f_\alpha^{i-1}D^\alpha(H)\right], \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Уравнение (1.4) на f^0 — определяющее уравнение для нахождения точной группы, допускаемой (1.1). Пусть f^0 — произвольное решение уравнения (1.4), являющееся дифференциальной функцией порядка $k_0 \geqslant 0$, а H — дифференциальная функция порядка $n \geqslant 1$, т. е.

$$f^0 = f^0(t, x, u, \ldots, u_{k_0}), \quad H = H(t, x, u, \ldots, u_n).$$

Найдем решение f^1 уравнения (1.5) в виде дифференциальной функции порядка $k_1 = n + k_0 - 1$. Тогда (1.5) будет линейным уравнением в частных производных первого порядка относительно функции f^1 от $k_1 + 3$ аргументов $t, x, u, u_1, \ldots, u_{k_1}$ и, следовательно, разрешимо. Подстановка любого решения $f^1(t, x, u, u_1, \ldots, u_{k_1})$ в правую часть уравнения (1.5) с $i = 2$ показывает, что f^2 можно искать в виде дифференциальной функции порядка $k_2 = n + k_1 - 1$, а соответствующее уравнение на f^2 разрешимо. Дальнейшие коэффициенты f^i ($i \geqslant 3$) ряда (1.3) находятся рекуррентно из уравнения (1.5). Теорема доказана.

2. Формальные преобразования Беклунда.

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.2) $u_t = h(u)u_1 + \varepsilon H$ *с произвольной функцией $H \in \mathscr{A}$ связано с*

$$v_t = h(v)v_1 \tag{2.1}$$

формальным преобразованием Беклунда

$$v = u + \sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi^i, \quad \Phi^i \in \mathscr{A}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Подстановка выражения (2.2) в (2.1) дает

$$u_t + \sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i D_t(\Phi^i) = h\Big(u + \sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi^i\Big)\Big[u_1 + \sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i D(\Phi^i)\Big].$$

Отсюда, используя тождество (см. [3, формула (2.8)])

$$h\left(u+\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi^i\right)=h(u)+\sum_{j\geqslant 1}\varepsilon^j\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k!}h^{(k)}(u)\sum_{i_1+\ldots+i_k=j}\Phi^{i_1}\ldots\Phi^{i_k}$$

и уравнение (1.2), после расщепления по степеням ε получаем

$$\Phi_t^1-h(u)\Phi_x^1+\sum_{\alpha\geqslant 1}[D^\alpha(hu_1)-hu_{\alpha+1}]\Phi_\alpha^1-h'(u)u_1\Phi^1=-H; \tag{2.3}$$

$$\Phi_t^i-h(u)\Phi_x^i+\sum_{\alpha\geqslant 1}[D^\alpha(hu_1)-hu_{\alpha+1}]\Phi_\alpha^i-h'(u)u_1\Phi^i= \tag{2.4}$$

$$=-\sum_{\alpha\geqslant 0}\Phi_\alpha^{i-1}D^\alpha(H)+u_1\sum_{k=2}^{i}h^{(k)}(u)\sum_{i_1+\ldots+i_k=i}\Phi^{i_1}\ldots\Phi^{i_k}+$$

$$+\sum_{j+l=i}D(\Phi^j)\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k!}h^{(k)}(u)\sum_{i_1+\ldots+i_k=l}\Phi^{i_1}\ldots\Phi^{i_k}\right),\quad i\geqslant 2,$$

где индексы $i_1, \ldots, i_k, j, l$ принимают значения 1, 2, ... Пусть H — дифференциальная функция порядка $n\geqslant 1$, т. е. $H=H(t, x, u, \ldots, u_n)$. Будем искать решение Φ^1 уравнения (2.3) в виде дифференциальной функции порядка n. Тогда (2.3) является линейным уравнением в частных производных первого порядка относительно функции Φ^1 от $n+3$ аргументов $t, x, u, u_1, \ldots, u_n$ и, следовательно, разрешимо. Подстановка любого решения $\Phi^1(t, x, u, u_1, \ldots, u_n)$ в правую часть уравнения (2.4) с $i=2$ показывает, что Φ^2 можно искать как дифференциальную функцию порядка $2n$, а соответствующее уравнение на Φ^2 разрешимо. Дальнейшие коэффициенты Φ^i ряда (2.2) определяются рекуррентно из (2.4). Теорема доказана.

Для уравнения переноса (2.1) справедливы следующие факты: уравнение (2.1) заменой $\tilde{v}=h(v)$ приводится к «стандартному» виду

$$\tilde{v}_t=\tilde{v}\tilde{v}_1, \tag{2.1'}$$

а (2.1′) линеаризуется преобразованием годографа $y=\tilde{v}$, $w=t\tilde{v}+x$:

$$w_t=0. \tag{2.5}$$

Поэтому из теоремы 2.1 вытекает важное

Следствие. Уравнение (1.2) приводится к линейному уравнению (2.5) для функции $w=w(t, y)$ формальным преобразованием Беклунда

$$y=h\left(u+\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi^i\right),\quad w=x+th\left(u+\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi^i\right), \tag{2.6}$$

где

$$h\left(u+\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi^i\right)=h(u)+\varepsilon h'(u)\Phi^1+\varepsilon^2\left[h'(u)\Phi^2+\frac{1}{2}h''(u)(\Phi^1)^2\right]+\ldots,$$

а коэффициенты $\Phi^1, \Phi^2, \ldots$ находятся рекуррентно из системы (2.3), (2.4).

Замечание 2.1. Наличие преобразования Беклунда (2.2) позволяет строить формальные симметрии уравнения (1.2) из симметрий (2.1) (а следовательно, из симметрий линейного уравнения (2.5)), не обращаясь к теореме 1.1, а пользуясь формулой перехода [5]

$$f_u=\left[1+\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon^i\Phi_*^i\right]^{-1}f_v \tag{2.7}$$

(f_u, f_v — симметрии (точные или формальные) уравнений (1.2) и (2.1) соответственно).

3. Формальные рекурренции. В теории групп Ли — Беклунда вводятся операторы рекурренции, позволяющие строить решения определяющих уравнений без решения самих уравнений. Аналогично для построения формальных симметрий используются формальные операторы рекурренции. Для (1.2) $u_t = h(u)u_1 + \varepsilon H$, $H \in \mathscr{A}$ такие формальные операторы рекурренции

$$(3.1) \qquad \widetilde{L} = \widetilde{\alpha} D + \widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma} D^{-1} + \ldots, \ \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}, \ldots \in \mathscr{A}$$

можно получить формальным преобразованием Беклунда (2.2) оператора рекурренции невозмущенного уравнения (2.1):

$$(3.2) \qquad L = \frac{\alpha}{h'(v)} D_x \frac{1}{v_1} + \beta + \gamma v_1 D_x^{-1} h'(v) + \ldots$$

Здесь α, β, γ, ... $\in \mathscr{A}[x, v]$ — произвольные функции v, $x + th(v)$ $t + 1/(h'(v)v_1)$, ... Формула перехода, связывающая операторы рекурренции уравнений (1.2) и (2.1), в данном случае имеет вид

$$(3.3) \qquad \widetilde{L} = \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \varepsilon^i \Phi_*^i\Big)^{-1} L \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \varepsilon^i \Phi_*^i\Big).$$

З а м е ч а н и е 3.1. Любая конечная сумма ряда (3.3) по степеням ε дает приближенный оператор рекурренции. При выполнении условий обрыва ряда (3.3) получаются обычные операторы рекурренции.

Далее этими методами исследуются обычное и модифицированное уравнения Кортевега — де Вриза и уравнение Бюргерса — Кортевега — де Вриза.

4. Точные и формальные симметрии уравнения Кортевега — де Вриза. Построим симметрии уравнения Кортевега — де Вриза

$$(4.1) \qquad u_t = uu_1 + \varepsilon u_3$$

методом, предложенным в замечании 2.1. Для этого найдем формальное преобразование Беклунда (2.2), связывающее (4.1) с уравнением переноса

$$(4.2) \qquad v_t = vv_1.$$

Будем считать коэффициенты Φ^i в (2.2) не зависящими от t, x. Тогда система (2.3), (2.4) с учетом $H = u_3$ принимает вид

$$(4.3) \qquad \sum_{\alpha \geqslant 1} [D^\alpha(uu_1) - uu_{\alpha+1}] \Phi_\alpha^1 - u_1 \Phi^1 = -u_3;$$

$$(4.4) \qquad \sum_{\alpha \geqslant 1} [D^\alpha(uu_1) - uu_{\alpha+1}] \Phi_\alpha^i - u_1 \Phi^i = -\sum_{\alpha \geqslant 0} \Phi_\alpha^{i-1} u_{\alpha+3} + \sum_{j+l=i} D(\Phi^j) \Phi^l, \quad i \geqslant 2.$$

Согласно доказательству теоремы 2.1, частное решение уравнения (4.3) следует искать в виде дифференциальной функции третьего порядка. Из (4.4) при $i = 2$ вытекает, что Φ^2 — дифференциальная функция шестого порядка. Аналогично находятся остальные коэффициенты Φ^i $(i > 2)$ формального преобразования (2.2). В итоге имеем

$$(4.5) \quad v = u + \varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{u_3}{u_1} + \frac{1}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{8}\frac{u_6}{u_1^2} - \frac{29}{40}\frac{u_2u_5}{u_1^3} - \frac{37}{40}\frac{u_3u_4}{u_1^3} + \frac{12}{5}\frac{u_2^2u_4}{u_1^4} + \frac{21}{8}\frac{u_2u_3^2}{u_1^4} - \frac{11}{2}\frac{u_2^3u_3}{u_1^5} + 2\frac{u_2^5}{u_1^6}\right) + \varepsilon^3\Big[-\frac{1}{48}\frac{u_9}{u_1^3} + \frac{19}{80}\frac{u_2u_8}{u_1^4} + \frac{269}{560}\frac{u_3u_7}{u_1^4} - \frac{863}{560}\frac{u_2^2u_7}{u_1^5} + \frac{439}{560}\frac{u_4u_6}{u_1^4} - \frac{3207}{560}\frac{u_2u_3u_6}{u_1^5} + \frac{2029}{280}\frac{u_2^3u_6}{u_1^6} + \frac{67}{140}\frac{u_5^2}{u_1^4} - \frac{943}{112}\frac{u_2u_4u_5}{u_1^5} - \frac{2679}{560}\frac{u_3^2u_5}{u_1^5} + \frac{2949}{80}\frac{u_2^2u_3u_5}{u_1^6} - \frac{1079}{40}\frac{u_2^4u_5}{u_1^7} - \frac{461}{80}\frac{u_3u_4^2}{u_1^5} + \frac{799}{35}\frac{u_2^2u_4^2}{u_1^6} +$$

$$+\left(53-\frac{247}{560}\right)\frac{u_2u_3^2u_4}{u_1^6}-\left(158+\frac{19}{40}\right)\frac{u_2^3u_3u_4}{u_1^7}+\frac{801}{10}\frac{u_2^5u_4}{u_1^8}+\frac{679}{112}\frac{u_3^4}{u_1^6}-$$

$$\left.-\frac{375}{4}\frac{u_2^2u_3^3}{u_1^7}+\left(241+\frac{3}{8}\right)\frac{u_2^4u_3^2}{u_1^8}-\left(184+\frac{2}{3}\right)\frac{u_2^6u_3}{u_1^9}+42\frac{u_2^8}{u_1^{10}}\right]+\ldots$$

Для преобразования симметрий f_v уравнения (4.2) в симметрии f_u уравнения Кортевега — де Вриза (4.1) с помощью (4.5) воспользуемся формулой (2.7), которую на основе равенств (4.5) и

(4.6) $$(1+\varepsilon A+\varepsilon^2 B+\ldots)^{-1}=1-\varepsilon A+\varepsilon^2(A^2-B)+\ldots$$

можно представить в виде

(4.7) $$f_u=\left\{1+\varepsilon\left[\frac{1}{2u_1}D^3-\frac{u_2}{u_1^2}D^2-\frac{1}{2}\frac{u_3}{u_1^2}D+\frac{u_2^2}{u_1^3}D\right]+\right.$$

$$+\varepsilon^2\left[\frac{1}{8u_1^2}D^6-\frac{41}{40}\frac{u_2}{u_1^3}D^5+\left(-\frac{73}{40}\frac{u_3}{u_1^3}+\frac{51}{10}\frac{u_2^2}{u_1^4}\right)D^4+\right.$$

$$+\left(-\frac{63}{40}\frac{u_4}{u_1^3}+\frac{27}{2}\frac{u_2u_3}{u_1^4}-17\frac{u_2^3}{u_1^5}\right)D^3+$$

$$+\left(-\frac{21}{40}\frac{u_5}{u_1^3}+\frac{36}{5}\frac{u_2u_4}{u_1^4}+\frac{45}{8}\frac{u_3^2}{u_1^4}-\frac{87}{2}\frac{u_2^2u_3}{u_1^5}+35\frac{u_2^4}{u_1^6}\right)D^2+$$

$$\left.\left.+\left(\frac{33}{40}\frac{u_2u_5}{u_1^4}+\frac{99}{40}\frac{u_3u_4}{u_1^4}-\frac{99}{10}\frac{u_2^2u_4}{u_1^5}-\frac{33}{2}\frac{u_2u_3^2}{u_1^5}+55\frac{u_2^3u_3}{u_1^6}-33\frac{u_2^5}{u_1^7}\right)D\right]+\ldots\right\}f_v.$$

Применение формулы (4.7) к точечным симметриям f_v, отвечающим переносам по t, x, преобразованию Галилея и растяжению для уравнения переноса (4.2), переводит их в соответствующие точечные симметрии уравнения (4.1), т. е. в этих случаях ряд (4.7) обрывается.

Рассмотрим теперь точечные симметрии

(4.8) $$f_v=\varphi(v)v_1,$$

которые задают нелинейное представление для (4.2) принципа линейной суперпозиции для уравнения (2.5), состоящего в том, что (2.5) инвариантно относительно прибавления к w произвольной функции $\varphi(y)$.

Если $\varphi(v)=v^2$, то формула (4.7) дает

(4.9) $$f_u=u^2u_1+\varepsilon[4u_1u_2+2uu_3+(6/5)u_5]+\ldots$$

Согласно [3], ряд (4.9) обрывается и, следовательно, точечная симметрия $f_v=v^2v_1$ переходит в известную (ср. [5, с. 191]) симметрию Ли — Беклунда уравнения (4.1). Аналогично можно показать, что для точечных симметрий $f_v=v^nv_1$ с целыми $n>2$ формальный ряд f_u удовлетворяет условию обрыва и задает известные симметрии Ли — Беклунда уравнения (4.1) (см. также [3]).

Все остальные точечные симметрии уравнения переноса (4.2) (а также симметрии, получаемые из них операторами рекурренции (3.2)) переходят в формальные симметрии уравнения Кортевега — де Вриза. Например, симметрия (4.8) при неполиномиальной функции $\varphi(v)$ переходит в формальную симметрию

$$f_u=\varphi(u)\,u_1+\varepsilon\left(\varphi'u_3+2\varphi''u_1u_2+\frac{1}{2}\varphi'''u_1^3\right)+\varepsilon^2\left(\frac{3}{5}\varphi''u_5+\frac{9}{5}\varphi'''u_1u_4+\right.$$

$$\left.+3\varphi'''u_2u_3+\frac{23}{10}\varphi^{\mathrm{IV}}u_1^2u_3+\frac{31}{10}\varphi^{\mathrm{IV}}u_1u_2^2+\frac{8}{5}\varphi^{\mathrm{V}}u_1^3u_2+\frac{1}{8}\varphi^{\mathrm{VI}}u_1^5\right)+\ldots$$

5. Точные и формальные рекурренции уравнения Кортевега — де Вриза. Переведем операторы рекурренции L (3.2) для (4.2) в формальные операторы рекурренции $\widetilde{L}$ для (4.1) преобразованием (4.5). Согласно (3.3), операторы L и $\widetilde{L}$ связаны формулой

$$\widetilde{L} = \Phi_*^{-1} L \Phi_*, \tag{5.1}$$

где

$$\Phi_* = 1 + \varepsilon D \left(-\frac{1}{2u_1} D^2 + \frac{u_2}{2u_1^2} D \right) + \varepsilon^2 D \left(\frac{1}{8u_1^2} D^5 - \frac{19}{40} \frac{u_2}{u_1^3} D^4 - \right.$$
$$- \frac{9}{20} \frac{u_3}{u_1^3} D^3 + \frac{39}{40} \frac{u_2^2}{u_1^4} D^3 - \frac{19}{40} \frac{u_4}{u_1^3} D^2 + \frac{39}{20} \frac{u_2 u_3}{u_1^4} D^2 - \frac{8}{5} \frac{u_2^3}{u_1^5} D^2 - \frac{1}{4} \frac{u_5}{u_1^3} D +$$
$$\left. + \frac{57}{40} \frac{u_2 u_4}{u_1^4} D + \frac{27}{40} \frac{u_3^2}{u_1^4} D - \frac{39}{10} \frac{u_2^2 u_3}{u_1^5} D + 2 \frac{u_2^4}{u_1^6} D \right) + \ldots,$$

а Φ_*^{-1} находится с использованием (4.6).

Например, подстановка в (5.1) оператора $L_1 = \beta(v)$ с учетом равенства

$$\beta(v) = \beta(u) + \varepsilon \beta'(u) \left(-\frac{1}{2} \frac{u_3}{u_1} + \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{u_1^2} \right) + \varepsilon^2 \left[\beta'(u) \left(\frac{1}{8} \frac{u_6}{u_1^2} - \right. \right.$$
$$- \frac{29}{40} \frac{u_2 u_5}{u_1^3} - \frac{37}{40} \frac{u_3 u_4}{u_1^3} + \frac{12}{5} \frac{u_2^2 u_4}{u_1^4} + \frac{21}{8} \frac{u_2 u_3^2}{u_1^4} - \frac{11}{2} \frac{u_2^3 u_3}{u_1^5} +$$
$$\left. \left. + 2 \frac{u_2^5}{u_1^6} \right) + \frac{1}{8} \beta''(u) \left(\frac{u_3^2}{u_1^2} - 2 \frac{u_2^2 u_3}{u_1^3} + \frac{u_2^4}{u_1^4} \right) \right] + \ldots$$

дает

$$\widetilde{L}_1 = \Phi_*^{-1} L_1 \Phi_* = \beta(u) + \varepsilon \left[\frac{3}{2} \beta' D^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta' u_2}{u_1} D + \frac{3}{2} \beta'' u_1 D - \frac{\beta' u_3}{2u_1} + \right. \tag{5.2}$$
$$\left. + \frac{\beta' u_2^2}{2u_1^2} + \frac{1}{2} \beta'' u_2 + \frac{1}{2} \beta''' u_1^2 \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{9}{8} \beta'' D^4 - \frac{3}{10} \frac{\beta' u_3}{u_1^2} D^3 + \frac{2}{5} \frac{\beta' u_2^2}{u_1^3} D^3 + \right.$$
$$+ \frac{9}{4} \beta''' u_1 D^3 - \frac{3}{4} \frac{\beta'' u_2}{u_1} D^3 - \frac{3}{5} \frac{\beta' u_4}{u_1^2} D^2 + \frac{14}{5} \frac{\beta' u_2 u_3}{u_1^3} D^2 - \frac{12}{5} \frac{\beta' u_2^3}{u_1^4} D^2 -$$
$$- \frac{39}{20} \frac{\beta'' u_3}{u_1} D^2 + \frac{89}{40} \frac{\beta'' u_2^2}{u_1^2} D^2 + \frac{3}{2} \beta''' u_2 D^2 + \frac{15}{8} \beta^{IV} u_1^2 D^2 - \frac{3}{10} \frac{\beta' u_5}{u_1^2} D +$$
$$+ \frac{23}{10} \frac{\beta' u_2 u_4}{u_1^3} D + \frac{17}{10} \frac{\beta' u_3^2}{u_1^3} D - \frac{48}{5} \frac{\beta' u_2^2 u_3}{u_1^4} D + 6 \frac{\beta' u_2^4}{u_1^5} D - \frac{69}{40} \frac{\beta'' u_4}{u_1} D +$$
$$+ \frac{61}{10} \frac{\beta'' u_2 u_3}{u_1^2} D - \frac{177}{40} \frac{\beta'' u_2^3}{u_1^3} D - \frac{3}{10} \beta''' u_3 D + \frac{23}{20} \frac{\beta''' u_2^2}{u_1} D + \frac{3}{2} \beta^{IV} u_1 u_2 D +$$
$$+ \frac{3}{4} \beta^{V} u_1^3 D + \frac{3}{10} \frac{\beta' u_2 u_5}{u_1^3} + \frac{9}{10} \frac{\beta' u_3 u_4}{u_1^3} - \frac{27}{10} \frac{\beta' u_2^2 u_4}{u_1^4} - \frac{9}{2} \frac{\beta' u_2 u_3^2}{u_1^4} + 12 \frac{\beta' u_2^3 u_3}{u_1^5} -$$
$$- 6 \frac{\beta' u_2^5}{u_1^6} - \frac{21}{40} \frac{\beta'' u_5}{u_1} + \frac{99}{40} \frac{\beta'' u_2 u_4}{u_1^2} + \frac{39}{20} \frac{\beta'' u_3^2}{u_1^2} - \frac{1041}{8} \frac{\beta'' u_2^2 u_3}{u_1^3} + \frac{177}{40} \frac{\beta'' u_2^4}{u_1^4} -$$
$$- \frac{9}{20} \beta''' u_4 + \frac{9}{5} \frac{\beta''' u_2 u_3}{u_1} - \frac{23}{20} \frac{\beta''' u_2^3}{u_1^2} + \frac{17}{40} \beta^{IV} u_1 u_3 + \frac{29}{40} \beta^{IV} u_2^2 +$$
$$\left. + \frac{17}{20} \beta^{V} u_1^2 u_2 + \frac{1}{8} \beta^{VI} u_1^4 \right] + \ldots$$

Аналогично для оператора $L_2 = v_1 D^{-1}$ имеем

$$
(5.3)\quad \widetilde{L}_2 = \Phi_*^{-1} L_2 \Phi_* = u_1 D^{-1} + \varepsilon\left[\frac{u_2}{u_1} D + \frac{u_3}{u_1} - \frac{u_2^2}{u_1^2}\right] + \varepsilon^2\left[\frac{3}{5}\frac{u_3}{u_1^2} D^3 - \right.
$$

$$
- \frac{4}{5}\frac{u_2^2}{u_1^3} D^3 + \frac{6}{5}\frac{u_4}{u_1^2} D^2 - \frac{28}{5}\frac{u_2 u_3}{u_1^3} D^2 + \frac{24}{5}\frac{u_2^3}{u_1^4} D^2 + \frac{3}{5}\frac{u_5}{u_1^2} D -
$$

$$
- \frac{23}{5}\frac{u_2 u_4}{u_1^3} D - \frac{17}{5}\frac{u_3^2}{u_1^3} D + \frac{96}{5}\frac{u_2^2 u_3}{u_1^4} D - 12\frac{u_2^3}{u_1^5} D - \frac{3}{5}\frac{u_2 u_5}{u_1^3} -
$$

$$
\left. - \frac{9}{5}\frac{u_3 u_4}{u_1^3} + \frac{27}{5}\frac{u_2^2 u_4}{u_1^4} + 9\frac{u_2 u_3^2}{u_1^4} - 24\frac{u_2^2 u_3}{u_1^5} + 12\frac{u_2^5}{u_1^6}\right] + \ldots
$$

Из формул (5.2), (5.3) видно, что для $\beta(u) = u$ формальная рекурренция $\widetilde{L} = \widetilde{L}_1 + 2\widetilde{L}_2$ задается обрывающимся рядом и совпадает с известной точной рекурренцией $\widetilde{L} = u + 2u_1 D^{-1} + 3\varepsilon D^2$ уравнения Кортевега — де Вриза (4.1).

6. Об обрыве ряда формальной симметрии модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза. Для уравнения

$$
(6.1)\qquad u_t = h(u) u_1 + \varepsilon u_3
$$

рассмотрим формальные симметрии (1.3) с коэффициентами f^i, не зависящими от t, x. Из теоремы 1.1 следует, что если f^0 — любая симметрия уравнения (1.1), то коэффициенты f^1, f^2, ... находятся из определяющих уравнений

$$
(6.2)\qquad \sum_{\alpha\geqslant 1}\left[D^\alpha(hu_1) - hu_{\alpha+1}\right] f_\alpha^i - h'(u) u_1 f^i =
$$

$$
= \sum_{\alpha\geqslant 0}\left[2D(f_\alpha^{i-1}) u_{\alpha+2} + D^2(f_\alpha^{i-1}) u_{\alpha+1}\right], \quad i \geqslant 1.
$$

Из анализа решений уравнения (6.2) можно увидеть, что при $h'''(u) = 0$ происходит обрыв ряда (1.3), если $f^0 = \varphi(u) u_1$ с полиномиальной функцией $\varphi(u)$. Это согласуется с хорошо известным фактом существования группы Ли — Беклунда для обычного и модифицированного уравнений Кортевега — де Вриза (см., например, [5, с. 215]). По-видимому, не существует функций $h(u)$, отличных от $h = C_1 u + C_2 u^2$, для которых происходит обрыв формального ряда (1.3), о чем свидетельствует структура первых членов этого ряда, полученных путем решения уравнений (6.2):

$$
f^1 = \psi_1 u_3 + 2\psi_1' u_1 u_2 + \frac{1}{2}\psi_1'' u_1^3,
$$

$$
f^2 = \frac{3}{5}\psi_2 u_5 + \frac{9}{5}\psi_2' u_1 u_4 + 3\psi_2' u_2 u_3 + \left(\frac{23}{10}\psi_2'' + \frac{2}{5}\psi_3 h'' - \frac{1}{10}\psi_2\frac{h'''}{h'}\right) u_1^2 u_3 +
$$

$$
+ \left(\frac{31}{10}\psi_2'' + \frac{4}{5}\psi_3 h'' - \frac{1}{5}\psi_2\frac{h'''}{h'}\right) u_1 u_2^2 + \left(\frac{8}{5}\psi_2''' + \frac{4}{5}\psi_3' h'' + \frac{3}{5}\psi_3 h''' -\right.
$$

$$
\left. - \frac{1}{5}\psi_2\frac{h^{\mathrm{IV}}}{h'} + \frac{1}{5}\psi_2\frac{h'' h'''}{(h')^2}\right) u_1^3 u_2 + \frac{1}{8}\left(\frac{8}{5}\psi_2^{\mathrm{IV}} + \frac{4}{5}\psi_3'' h'' + \frac{7}{5}\psi_3 h''' + \frac{2}{3}\psi_3 h^{\mathrm{IV}} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{5}\psi_3\frac{h'' h'''}{h'} + \frac{2}{5}\psi_2\frac{h'' h^{\mathrm{IV}}}{(h')^2} - \frac{1}{5}\psi_2\frac{h^{\mathrm{V}}}{h'} + \frac{1}{5}\psi_2\frac{(h''')^2}{(h')^2} - \frac{2}{5}\psi_2\frac{(h'')^2 h'''}{(h')^3}\right) u_1^5,
$$

$$
f^3 = \frac{9}{35}\psi_3 u_7 + \frac{36}{35}\psi_3' u_1 u_6 + \left(\frac{12}{5}\psi_3' - \frac{3}{40}\psi_2\frac{h'''}{(h')^2}\right) u_2 u_5 + \frac{1}{7}\left(\frac{129}{10}\psi_3'' -\right.
$$

$$
\left. - \frac{3}{5}\psi_3\frac{h'''}{h'} + 3\psi_4 h'' - \frac{3}{10}\psi_2\frac{h^{\mathrm{IV}}}{(h')^2} + \frac{3}{8}\psi_2\frac{h'' h'''}{(h')^2}\right) u_1^2 u_5 +
$$

$$
+ \left(\frac{18}{5}\psi_3' - \frac{9}{40}\psi_2\frac{h'''}{(h')^2}\right) u_3 u_4 + \ldots
$$

Здесь $\psi_1(u) = \varphi'(u)/h'(u)$, $\psi_k(u) = \psi_{k-1}'(u)/h'(u)$, $k = 2, 3, \ldots$

7. Формальные симметрии уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза. Для уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза

$$u_t = uu_1 + \varepsilon(au_3 + bu_2),\quad a,\ b = \mathrm{const} \tag{7.1}$$

найдем преобразование, переводящее его в уравнение переноса (4.2), и построим формальную симметрию, связанную с точечной симметрией $f_v = \varphi(v)v_1$ уравнения (4.2).

В данном случае $h = u$, $H = au_3 + bu_2$ и решение системы (2.3), (2.4) при условии независимости Φ^i от t, x дает

$$v = u + \varepsilon\left(-\frac{a}{2}\frac{u_3}{u_1} + \frac{a}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} - b\frac{u_2}{u_1}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{a^2}{8}\frac{u_6}{u_1^2} - \frac{29}{40}a^2\frac{u_2u_5}{u_1^3} - \right.$$
$$- \frac{37}{40}a^2\frac{u_3u_4}{u_1^3} + \frac{12}{5}a^2\frac{u_2^2u_4}{u_1^4} + \frac{21}{8}a^2\frac{u_2u_3^2}{u_1^4} - \frac{11}{2}a^2\frac{u_2^3u_3}{u_1^5} + 2a^2\frac{u_2^5}{u_1^6} +$$
$$+ \frac{1}{2}ab\frac{u_5}{u_1^2} - \frac{9}{4}ab\frac{u_2u_4}{u_1^3} - \frac{5}{4}ab\frac{u_3^2}{u_1^3} + \frac{57}{10}ab\frac{u_2^2u_3}{u_1^4} - \frac{13}{5}ab\frac{u_2^4}{u_1^5} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}b^2\frac{u_4}{u_1^2} - \frac{5}{3}b^2\frac{u_2u_3}{u_1^3} + b^2\frac{u_2^3}{u_1^4}\right) + \ldots$$

При этом формула (2.7) принимает вид

$$f_u = \left\{1 + \varepsilon\left[\frac{a}{2u_1}D^3 + \left(-a\frac{u_2}{u_1^2} + \frac{b}{u_1}\right)D^2 + \left(-\frac{a}{2}\frac{u_3}{u_1^2} + a\frac{u_2^2}{u_1^3} - \right.\right.\right. \tag{7.2}$$
$$\left.\left. - b\frac{u_2}{u_1^2}\right)D\right] + \varepsilon^2\left[\frac{a^2}{8u_1^2}D^6 + \left(-\frac{41}{40}a^2\frac{u_2}{u_1^3} + \frac{1}{2}ab\frac{1}{u_1^2}\right)D^5 + \left(-\frac{73}{40}a^2\frac{u_3}{u_1^3} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{51}{10}a^2\frac{u_2^2}{u_1^4} - \frac{13}{4}ab\frac{u_2}{u_1^3} + \frac{1}{2}b^2\frac{1}{u_1^2}\right)D^4 + \left(-\frac{63}{40}a^2\frac{u_4}{u_1^3} + \frac{27}{2}a^2\frac{u_2u_3}{u_1^4} - \right.$$
$$\left. - 17a^2\frac{u_2^3}{u_1^5} - 4ab\frac{u_3}{u_1^3} + \frac{59}{5}ab\frac{u_2^2}{u_1^4} - \frac{7}{3}b^2\frac{u_2}{u_1^3}\right)D^3 + \left(-\frac{21}{40}a^2\frac{u_5}{u_1^3} + \right.$$
$$+ \frac{36}{5}a^2\frac{u_2u_4}{u_1^4} + \frac{45}{8}a^2\frac{u_3^2}{u_1^4} - \frac{87}{2}a^2\frac{u_2^2u_3}{u_1^5} + 35a^2\frac{u_2^4}{u_1^6} - \frac{7}{4}ab\frac{u_4}{u_1^3} + \frac{181}{10}ab\frac{u_2u_3}{u_1^4} -$$
$$\left. - \frac{123}{5}ab\frac{u_2^3}{u_1^5} - \frac{4}{3}b^2\frac{u_3}{u_1^3} + 5b^2\frac{u_2^2}{u_1^4}\right)D^2 + \left(\frac{33}{40}a^2\frac{u_2u_5}{u_1^4} + \frac{99}{40}a^2\frac{u_3u_4}{u_1^4} - \right.$$
$$- \frac{99}{10}a^2\frac{u_2^2u_4}{u_1^5} - \frac{33}{2}a^2\frac{u_2u_3^2}{u_1^5} + 55a^2\frac{u_2^3u_3}{u_1^6} - 33a^2\frac{u_2^5}{u_1^7} + \frac{11}{4}ab\frac{u_2u_4}{u_1^4} + \frac{11}{4}ab\frac{u_3^2}{u_1^4} -$$
$$\left.\left.\left. - \frac{121}{5}ab\frac{u_2^2u_3}{u_1^5} + 22ab\frac{u_2^4}{u_1^6} + 2b^2\frac{u_2u_3}{u_1^4} - 4b^2\frac{u_2^3}{u_1^5}\right)D\right] + \ldots\right\}f_v.$$

Для $f_v = \varphi(v)v_1$ по формуле (7.2) получаем

$$f_u = \varphi(u)u_1 + \varepsilon\left(a\varphi'u_3 + 2a\varphi''u_1u_2 + \frac{1}{2}a\varphi'''u_1^3 + b\varphi'u_3 + b\varphi''u_1^2\right) +$$
$$+ \varepsilon^2\left(\frac{3}{5}a^2\varphi''u_5 + \frac{5}{4}ab\varphi''u_4 + \frac{1}{10}ab\varphi''\frac{u_2u_3}{u_1} - \frac{1}{20}ab\varphi''\frac{u_2^3}{u_1^2} + \frac{2}{3}b^2\varphi''u_3 + \right.$$
$$+ \frac{9}{5}a^2\varphi'''u_1u_4 + 3a^2\varphi'''u_2u_3 + \frac{7}{2}ab\varphi'''u_1u_3 + \frac{23}{10}ab\varphi'''u_2^2 +$$
$$+ \frac{5}{3}b^2\varphi'''u_1u_2 + \frac{23}{10}a^2\varphi^{\mathrm{IV}}u_1^2u_3 + \frac{31}{10}a^2\varphi^{\mathrm{IV}}u_1u_2^2 + \frac{15}{4}ab\varphi^{\mathrm{IV}}u_1^2u_2 +$$
$$\left. + \frac{1}{2}b^2\varphi^{\mathrm{IV}}u_1^3 + \frac{8}{5}a^2\varphi^{\mathrm{V}}u_1^3u_2 + \frac{1}{2}ab\varphi^{\mathrm{V}}u_1^4 + \frac{1}{8}a^2\varphi^{\mathrm{VI}}u_1^5\right) + \ldots$$

Из этого выражения и из анализа формулы перехода (2.7) видно, как симметрии Ли — Беклунда для уравнений Кортевега — де Вриза и Бюргерса переходят в неудовлетворяющую условию обрыва ряда формальную симметрию (7.2) для уравнения (7.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнений механики // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М.: Наука, 1972.
3. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные симметрии // Мат. сб.— 1988.— Т. 136, № 4.
4. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенный групповой анализ нелинейного уравнения $u_{tt} - (f(u)u_x)_x + \varepsilon\varphi(u)u_t = 0$ // Дифференц. уравнения.— 1988.— № 7.
5. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
6. **Rosales R. R.** Exact solutions of some non-linear evolution equations // Stud. Appl. Math.— 1978.— V. 59.— P. 117.
7. **Flato M., Pinczon G., Simon J.** Non-linear representations of Lie groups // Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. Paris.— 1977.— V. 10, N 4.
8. **Taflin E.** Analytic linearization of the Korteweg — de Vries equation // Pacif. J. Math.— 1983.— V. 108, N 1.

Поступила 12/IX 1988 г.

УДК 519.6

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

С. К. Годунов

(*Новосибирск*)

В классической линейной теории управления подробно изучается возможность подбора управления $u(t)$, которое позволило бы получить то или иное оптимальное поведение траектории $x(t)$, описываемой системой

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

При этом обычно предполагается возможность получения информации о поведении траектории только по вектору наблюдения $z(t) = Cx(t)$. Ограничимся рассмотрением частного, но важного и во многом типичного случая не зависящих от времени t матриц A, B, C. Широко используются (см., например, [1—3]) понятия управляемости пары A, B и двойственное к нему понятие наблюдаемости пары A, C, а также двойственные друг другу понятия стабилизируемости пары A, B и детектируемости пары A, C. (Если A, B управляема или стабилизируема, то A^*, B^* наблюдаема или детектируема, и наоборот.)

Приведем критерии (необходимые и достаточные) управляемости и стабилизируемости. Пара A, B управляема, если линейная оболочка столбцов составной матрицы

$$(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \dots \vdots A^{N-1}B) \tag{2}$$

имеет максимально возможный ранг N. Здесь N — размерность пространства, в котором действует оператор, задаваемый $N \times N$ матрицей A. Пара A, B стабилизируема, если линейная оболочка столбцов матрицы (2) содержит все инвариантные корневые подпространства, отвечающие точкам спектра, не лежащим строго в левой полуплоскости.

Следствием этих критериев является утверждение: пара A, B управляема тогда и только тогда, когда обе пары A, B и $-A$, B стабилизируемы. Приведенные факты позволяют при обсуждении вопроса о выработке