

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

И. Н. Кочина

(Москва)

Рассматривается задача о растекании прямоугольного бугра грунтовых вод между двумя каналами с разными уровнями воды. Испарение учитывается в зависимости от глубины грунтового потока. Задача приводится к решению нелинейного интегрального уравнения и приближенно решается методом, представляющим собой развитие метода последовательной смены стационарных состояний. Приводится численный пример.

1. Рассматривается следующая задача: найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f(h) \quad (1.1)$$

где $f(h)$ — нелинейная функция

$$f(h) = \begin{cases} 0 & (h < h_0) \\ -bh + cH & (h > h_0) \end{cases} \quad (b \geq 0) \quad (1.2)$$

в области $0 < x < L$ с начальным условием

$$h(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.3)$$

и граничными условиями

$$h(0, t) = H_1, \quad h(L, t) = H_2 \quad (1.4)$$

Эта задача относится к типу задач, рассмотренных в статьях [1-5].

К интегрированию уравнения (1.1), (1.2) с условиями (1.3) и (1.4) сводится решение задачи о растекании бугра грунтовых вод, имеющего начальную форму (1.3), между двумя каналами, находящимися на расстоянии L один от другого в предположении, что в начальный момент уровень воды в каналах внезапно становится равным H_1 и H_2 , причем считается также, что при $h > h_0$ происходит испарение, а при $h < h_0$ испарение отсутствует. Интенсивность испарения — $f(h)$ предполагается либо линейной функцией уровня грунтовых вод h ($b > 0$, $c = b$, $H = h_0$), либо постоянной ($b = 0$, $cH < 0$).

В формуле (1.1) $a^2 = kH_* / \sigma$, где k — коэффициент фильтрации, H_* — средняя глубина грунтового потока, σ — недостаток насыщения или водоотдача.

Рассмотрим случай, когда в начальный момент уровень грунтовых вод постоянен

$$h(x, 0) = H_0 \quad (1.5)$$

причем будем предполагать, что выполнены неравенства $H_1 < h_0 \leq H_0 \leq H_2$. Тогда задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) сводится к решению уравнений

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \quad h_1(0, t) = H_1, \quad h_1(\chi(t), t) = h_0 \quad (0 < x < \chi(t)) \quad (1.6)$$

и уравнений

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - bh_2 + cH$$

$$h_2(x, 0) = H_0, \quad h_2(L, t) = H_2, \quad h_2[\chi(t), t] = h_0 \quad (\chi(t) < x < L) \quad (1.7)$$

Здесь $x = \chi(t)$ — неизвестная заранее граница, на которой выполняются условия

$$h[\chi(t), t] = h_0, \quad \frac{\partial h_1[\chi(t), t]}{\partial x} = \frac{\partial h_2[\chi(t), t]}{\partial x} \quad (1.8)$$

Последнее условие означает непрерывность расхода в сечении $x = \chi(t)$; после предположения, что функция $\chi(t)$ такая, что $\chi(0) = 0$, известна, из (1.6) и (1.7) найдены функции $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$, зависимость $\chi(t)$ определяется из второго уравнения (1.8).

Рассмотрим асимптотическое представление решения искомой задачи вблизи значений $t = 0$, $x = 0$. Можно видеть, что имеют место равенства

$$h_1(x, t) = h_2(x, t) = H_1 + (H_0 - H_1) \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2) ds\right) \quad (1.9)$$

При этом уравнения (1.6) и (1.7) удовлетворены с точностью до членов высшего порядка малости, начальное условие (1.5), первое из граничных условий (1.4) и второе условие (1.8) также удовлетворены. Удовлетворяя первому граничному условию (1.8), находим уравнение для кривой $x = \chi(t)$ в окрестности значений $t = 0$, $x = 0$

$$x = \chi(t) = D\sqrt{t} \quad (1.10)$$

где D — единственный корень уравнения

$$\Phi\left(\frac{D}{2a}\right) = \frac{h_0 - H_1}{H_0 - H_1} \quad (1.11)$$

Рассмотрим случай $b > 0$, $c = b$, $H = h_0$. Подстановкой

$$v = (h - h_0)e^{bt} \quad (1.12)$$

сведем задачу (1.7) к задаче о решении уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.13)$$

$$v(x, 0) = H_0 - h_0 \quad (1.14)$$

$$v(L, t) = (H_2 - h_0)e^{bt}, \quad v[\chi(t), t] = 0, \quad (0 < \chi(t) < L) \quad (1.15)$$

При этом второе условие (1.8) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial h_1[\chi(t), t]}{\partial x} = \exp(-bt) \frac{\partial v[\chi(t), t]}{\partial x} \quad (1.16)$$

Будем рассматривать вместо функции $h_1(x, t)$ функцию $h_1(x, t) - h_0$. Тогда начальное условие (1.6) примет вид

$$h_1[\chi(t), t] - h_0 = 0 \quad (1.17)$$

Задача, аналогичная описываемой уравнениями (1.6) и (1.13) с начальным условием (1.14) и граничными условиями (1.6), (1.17) и (1.15), (1.16), была рассмотрена в работе [2].

Можно видеть, что функция $h_1(x, t)$ описывается формулой

$$h_1(x, t) = h_0 + \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp \left\{ -\frac{[x-\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} - \exp \left\{ -\frac{[x+\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] d\tau + (H_1 - h_0) \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \quad (1.18)$$

$$\left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2) ds \right)$$

Для $v(x, t)$ получаем следующее выражение:

$$v(x, t) = -\frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp \left\{ -\frac{[x-\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} - \exp \left\{ -\frac{[x+\chi(\tau)-2L]^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] d\tau + \quad (1.19)$$

$$+ \frac{(H_0 - h_0)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^L \left[\exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(x+\xi-2L)^2}{4a^2 t} \right\} \right] d\xi -$$

$$- \frac{(H_2 - h_0)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-L}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ b\tau - \frac{(x-L)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau$$

Здесь

$$v_1(t) = \frac{\partial(h_1 - h_0)}{\partial x} \Big|_{x=\chi(t)-0}, \quad v_2(t) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\chi(t)+0} \quad (1.20)$$

Используя свойства теплового потенциала двойного слоя [6], из (1.18) — (1.20) для нахождения функций $v_1(t)$, $v_2(t)$ и $\chi(t)$ получим следующие интегральные уравнения:

$$v_1(t) = \int_0^t K_1(t, \tau) v_1(\tau) d\tau + \eta(t), \quad v_2(t) = - \int_0^t K_2(t, \tau) v_2(\tau) d\tau + \gamma(t) \quad (1.21)$$

Здесь

$$K_i(t, \tau) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left\{ [\chi(t) - \chi(\tau)] \exp \left\{ -\frac{[\chi(t) - \chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} - \right. \quad (1.22)$$

$$\left. - [\chi(t) + \chi(\tau) - 2(i-1)L] \exp \left\{ -\frac{[\chi(t) + \chi(\tau) - 2(i-1)L]^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right\} \quad (i=1,2)$$

$$\eta(t) = -\frac{2(H_1 - h_0)}{a\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{\chi^2(t)}{4a^2 t} \right\} \quad (1.23)$$

$$\gamma(t) = \frac{2b(H_2 - h_0)}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left\{ b\tau - \frac{(\chi(t) - L)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau + \quad (1.24)$$

$$+ \frac{2(H_2 - H_0)}{a\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(\chi(t) - L)^2}{4a^2 t} \right] +$$

$$+ \frac{(H_0 - h_0)}{a\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp \left[-\frac{\chi^2(t)}{4a^2 t} \right] + \exp \left[-\frac{(\chi(t) - 2L)^2}{4a^2 t} \right] \right\}$$

Решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.21) имеют вид [7]

$$v_1(t) = \xi(t) + \int_0^t \xi(\tau) S_1(t, \tau) d\tau, \quad v_2(t) = \mu(t) + \int_0^t \mu(\tau) S_2(t, \tau) d\tau \quad (1.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \eta(t) + \int_0^t K_1(t, \tau) \eta(\tau) d\tau, \quad \mu(t) = \gamma(t) - \int_0^t K_2(t, \tau) \gamma(\tau) d\tau \\ G_1^{(i)}(t, \tau) &= \int_\tau^t K_i(t, \sigma) K_i(\sigma, \tau) d\sigma \\ G_{m+1}^{(i)}(t, \tau) &= \int_\tau^t G_1^{(i)}(t, \sigma) G_m^{(i)}(\sigma, \tau) d\sigma, \quad S_i(t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m^{(i)}(t, \tau) \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Пользуясь соотношениями (1.16), (1.20), (1.22) — (1.26), находим для определения функции $\chi(t)$ такой, что $\chi(0) = 0$, следующее интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \gamma(t) - e^{bt} \eta(t) &= \int_0^t [K_2(t, \tau) \gamma(\tau) + e^{bt} \eta(\tau) K_1(t, \tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^t [\xi(\tau) S_1(t, \tau) e^{b\tau} - \mu(\tau) S_2(t, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (1.27)$$

2. Предположим, что начальный уровень грунтовых вод равен уровню воды в канале при $x = L$, $H_0 = H_2$. Для приближенного решения рассмотренной выше задачи и нахождения функции $\chi(t)$ используем некоторое развитие метода последовательной смены стационарных состояний [8,9].

Будем считать, что уравнение (1.1), где правая часть дана зависимостью (1.2), удовлетворяется только в интегральном смысле, т. е. после того как оно проинтегрировано по всей области $0 \leq x \leq L$ значений независимого переменного x

$$\int_0^L \frac{\partial h}{\partial t} dx = \int_0^L a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx + \int_0^L f(h) dx \quad (2.1)$$

Функции же $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$, удовлетворяющие соответственно граничным условиям (1.7), (1.8) и (1.11), (1.12), определим при $b \neq 0$ выражениями

$$h_1(x, t) = h_0 + (h_0 - H_1) \frac{[x - l(t)]}{l(t)} + C(t) x [x - l(t)] \quad (0 \leq x \leq l(t)) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} h_2(x, t) &= \frac{cH}{b} + \left(h_0 - \frac{cH}{b} \right) \frac{\text{sh } \omega(L-x)}{\text{sh } \omega[L-l(t)]} - \\ &- \left(H_2 - \frac{cH}{b} \right) \frac{\text{sh } \omega[l(t)-x]}{\text{sh } \omega[L-l(t)]} \quad \left(\omega = \frac{V\bar{b}}{a}, l(t) \leq x \leq L \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В формулы (2.2) и (2.3) входят две неизвестные функции $t - C(t)$ и $l(t)$. Здесь $l(t)$ — приближенное значение функции $\chi(t)$.

Задача теперь сведена к определению функций $C(t)$ и $l(t)$. Для нахождения функции $C(t)$ используем уравнение (1.14)

$$\frac{\partial h_1[l(t), t]}{\partial x} = \frac{\partial h_2[l(t), t]}{\partial x} \quad (2.4)$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{l} \left\{ \frac{H_1 - h_0}{l} - \frac{\omega}{\text{sh } \omega(L-l)} \left[\left(h_0 - \frac{cH}{b} \right) \text{ch } \omega(L-l) - \left(H_2 - \frac{cH}{b} \right) \right] \right\} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.1) с использованием выражений (2.2), (2.3) и (2.5) позволяет получить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $l(t)$, которое интегрируется в квадратурах

$$t = \int_0^l F(z) dz \quad (2.6)$$

$$F(z) = \frac{z}{f(z)} \{ \beta \operatorname{sh}^2 \omega(L-z) + 2\delta z \operatorname{sh} \omega(L-z) \operatorname{ch} \omega(L-z) + \\ + 2\nu z \operatorname{sh} \omega(L-z) + \omega [\alpha + \delta z^2 + (\mu + \nu z^2) \operatorname{ch} \omega(L-z)] \}$$

$$f(z) = 2a^2 \operatorname{sh} \omega(L-z) (H_1 - h_0) \operatorname{sh} \omega(L-z) - Az \operatorname{ch} \omega(L-z) + Bz$$

Здесь

$$A = \omega \left(h_0 - \frac{cH}{b} \right), \quad B = \omega \left(H_2 - \frac{cH}{b} \right), \quad \alpha = \frac{1}{\omega} \left(h_0 + H_2 - 2 \frac{cH}{b} \right) \quad (2.7)$$

$$B = -cH/b + {}^2/3 h_0 + {}^1/3 H_1, \quad \delta = {}^1/6 A, \quad \nu = {}^1/6 B, \quad \mu = -\alpha$$

Можно показать, что

$$F(z) \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow \chi_0$$

где χ_0 — корень уравнения $C = 0$, причем C определено формулой (2.5).

Интеграл (2.6) при $l = \chi_0$ расходится, следовательно $t \rightarrow \infty$. Полагая $l(t) = \chi_0$, $C = 0$ в формулах (2.2) и (2.3), получаем решение стационарной задачи, соответствующей рассматриваемой здесь нестационарной. В окрестности значения $l = 0$ имеем

$$l = M \sqrt{t} \quad (2.8)$$

$$M = 2a \sqrt{h_0 - H_1} \left[\frac{1}{3} \left(H_2 + h_0 - 2 \frac{cH}{b} \right) \operatorname{sch}^2 \frac{\omega L}{2} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{2}{3} h_0 - \frac{H_1}{3} + \frac{cH}{b} \right) \right]^{-1/2} \quad (2.9)$$

При $b \neq 0$, в формулах (2.2), (2.3), (2.5) — (2.7) и (2.9), дающих приближенное решение рассматриваемой нами задачи, нужно положить $c = b$, $H = h_0$, в случае же $b = 0$ решение получается из этих формул предельным переходом. Выпишем это решение

$$h_1(x, t) = h_0 + (h_0 - H_1) \frac{x-l}{l} + Cx(x-l) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.10)$$

$$h_2(x, t) = H_2 + \frac{H_2 - h_0}{L-l} (x-L) - \frac{cH}{2a^2} (x-l)(x-L) \quad (l \leq x \leq L) \quad (2.11)$$

$$C = \frac{1}{l} \left[\frac{H_2 - h_0}{L-l} - \frac{h_0 - H_1}{l} + \frac{cH}{2a^2} (L-l) \right] \quad (2.12)$$

$$f(z) = \frac{z}{(L-z)} \frac{\alpha(L-z)^2 + \beta z(2L-z) + \eta(4z-3L)(L-z)^2}{\zeta z(L-z)^2 + \gamma(L-z) + \delta z} \quad (2.13)$$

$$\alpha = \frac{h_0 + 2H_1 - 3H_2}{6}, \quad \beta = \frac{h_0 - H_2}{6}, \quad \eta = \frac{cHL}{12a^2}, \quad \zeta = cH \quad (2.14)$$

$$\gamma = -2a^2(h_0 - H_1), \quad \delta = 2a^2(H_2 - h_0)$$

$$M = \frac{2a \sqrt{h_0 - H_1}}{\sqrt{{}^1/c(3H_2 - 2H_1 - h_0 + {}^3/8 cHa^{-2}L^2)}} \quad (2.15)$$

Из (2.10) — (2.12) при $l = \chi_0$, $C = 0$ снова получаем решение соответствующей стационарной задачи.

Условие $M > 0$ дает в силу (2.8) и (2.15) неравенство, налагаемое на величины H_2 , H_1 , h_0 , L , a^2 , cH

$$H_2 > \frac{h_0}{3} + \frac{2}{3} H_1 - \frac{1}{2} \frac{cHL^2}{a^2} \quad (2.16)$$

которое, в свою очередь, выполняется, если

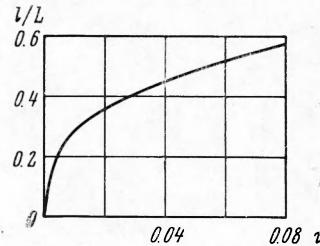
$$H_2 \geq h_0 - \frac{1}{2} \frac{cHL^2}{a^2} \quad (2.17)$$

Неравенство (2.17) представляет собой условие неотрицательности угла наклона касательной к параболе (2.10) в каждой ее точке, угол же наклона касательной к параболе (2.11) при выполнении условия (2.17) тоже будет в каждой точке неотрицателен, и для решения (2.10), (2.11) при $b = 0$ будут иметь место неравенства $h_1 \leq h_0$, $h_2 \geq h_0$.

При $b \neq 0$ из формулы (2.9) следует, что $M > 0$ при любых значениях $H_2 > h_0 > H_1$. Из формул (2.2) и (2.3), где следует положить $c = b$, $H = h_0$, вытекает, что $\partial h_1 / \partial x > 0$, $\partial h_2 / \partial x > 0$, и, следовательно $h_1 \leq h_0$, $h_2 \geq h_0$.

Таким образом, получено приближенное решение поставленной задачи.

На фигуре дана зависимость l/L от $\tau = a^2 t / L^2$, определенная формулой (2.6). При этом $H_2 = 1.25 h_0$, $H_1 = 0.5 h_0$, $b L^2 / a^2 = 1.25$, так что $\chi_0 / L = 0.672$.



Поступила 20 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. В е р и г и н Н. Н. Нагнетание вязких растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
2. Р у б и н ш т е й н Л. И. Об определении положения границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 2.
3. К а м ы н и н Л. И. Об одной задаче гидротехники. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 4.
4. K o l o d n e r I. I. Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. Comm. Pure. Appl. Math., 1956, vol. 9.
5. К о ч и н а Н. Н. Некоторые решения неоднородного уравнения диффузии. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1.
6. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
7. М ю н т ц Г. Интегральные уравнения, ч. 1. Линейные уравнения Вольтерра. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
8. Ч а р н ы й И. А. Основы подземной гидравлики. М., Гостоптехиздат, 1956.
9. П и р в е р д я н А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956.