

о наличии мнимой части у величины $\partial\alpha/\partial y$ свидетельствует о том, что обычно решаемая в одномодовом случае задача Коши перестает иметь физическое значение и необходимо ставить и решать краевую задачу для коэффициента $c(x, z)$.

Поступила 6 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Современное состояние проблемы устойчивости ламинарных течений. — В кн.: Механика турбулентных потоков. М.: Наука, 1980.
2. Жигулев В. Н. Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
3. Артамонов К. И. Проблема устойчивости в физической механике. М.: изд. МФТИ, 1977.
4. Mack L. M. Transition prediction and linear stability theory laminar-turbulent transition. AGARD-CP-224, 1977.
5. Решотко Э. Устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход в турбулентный. — Сб. пер. Механика. М.: Мир, 1979, № 21.
6. Жигулев В. Н., Сидоренко И. В., Тумин А. М. О генерации волн неустойчивости в пограничном слое внешней турбулентностью. — ПМТФ, 1980, № 6.
7. Довгаль А. В., Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П. Возникновение возмущений в пограничных слоях. — В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
8. Айзин Л. Б., Поляков Н. Ф. Генерация волны Толлмина — Шлихтинга звуком на отдельной неровности поверхности, обтекаемой потоком. Препринт ИТПМ № 17, Новосибирск, 1979.
9. Nayfeh A. N. Stability of three-dimensional boundary layers. — AIAA J., 1980, vol. 18, N 4.
10. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
11. Тумин А. М., Шепелев В. Е. Численный анализ развития возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине. — Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 3.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2. М.: ГИТТЛ, 1949.

УДК 532.526.013

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

А. М. Тумин, А. В. Федоров

(Москва)

В настоящее время в связи с решением проблемы предсказания точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный широко обсуждается задача о возбуждении волн неустойчивости (волн Толлмина — Шлихтинга) при наличии во внешнем течении того или иного типа возмущений из непрерывного спектра (акустические, вихревые и т. д.) [1]. В результате теоретических и экспериментальных исследований установлено, что возбуждение волн неустойчивости происходит на пространственных неоднородностях течения в пограничном слое [2]. Для аналитического решения задачи о генерации волн Толлмина — Шлихтинга широко используются методы теории возмущений, заключающиеся в разложении решений линеаризованных уравнений Навье — Стокса по собственным функциям локально-однородной задачи [3]. При этом анализируются возмущения, характеризующиеся фиксированной частотой и пространственным развитием. В связи с этим возникает необходимость анализа в рамках локально-однородного приближения полноты системы собственных функций линеаризованных уравнений Навье — Стокса для возмущений, развивающихся в пространстве. В [4] с помощью преобразования Лапласа по времени решена задача о развитии начального возмущения в несжимаемом пограничном слое. На основе результатов [4] в [5] доказана полнота системы собственных функций линеаризованных уравнений Навье — Стокса, описывающих развитие во времени возмущений несжимаемого пограничного слоя. Для пространственно-растущих возмущений эти вопросы остались открытыми. В данной работе проведен их анализ на примере пограничного слоя в сжимаемом газе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельное течение типа пограничного слоя. Выберем в качестве координат: ось Ox , направленную вниз по потоку, ось Oy , перпендикулярную к обтекаемой поверхности.

Выберем в качестве масштаба длины толщину пограничного слоя δ , скорости — U_0 , температуры — T_0 , плотности — ρ_0 , давления — $\rho_0 U_0^2$, вязкости — μ_0 , времени — δ/U_0 (индекс 0 означает величины, относящиеся к параметрам основного течения вне пограничного слоя). Коэффициент вязкости будем считать функцией температуры. Рассматривая двумерные возмущения, определим вектор-функцию \mathbf{A} :

$$A_1 = u, A_2 = \partial u / \partial y, A_3 = v, A_4 = p', A_5 = \Theta, A_6 = \partial \Theta / \partial y, \\ A_7 = \partial u / \partial x, A_8 = \partial v / \partial x, A_9 = \partial \Theta / \partial x,$$

где u, v — возмущения x -, y -компонент скорости соответственно; p' — возмущение давления; Θ — возмущение температуры. Запишем линеаризованные уравнения Навье — Стокса после преобразования Фурье по времени в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(L_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + L_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = H_1 \mathbf{A} + H_2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x},$$

где L_0, L_1, H_1, H_2 — матрицы 9×9 . Их ненулевые элементы выписаны в приложении. Сформулируем начальные и граничные условия:

$$(1.2) \quad A_1 = A_3 = A_5 = 0 \text{ при } y = 0, \\ |A_j| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 9), \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0(y) \text{ при } x = 0.$$

При формулировке граничного условия для возмущения температуры при $y = 0$ в (1.2) предполагалось, что обтекаемая поверхность выполнена из высокотеплопроводного материала [6].

Смешанная задача (1.1), (1.2) некорректна по Адамару [7]. Однако она может быть регуляризована, если предположить, что $\mathbf{A}_0(y)$ допускает построение решения линеаризованных уравнений Навье — Стокса $\mathbf{A}(x, y)$ с конечным показателем роста, т. е. существуют такие положительные константы M, s , что $|A_j(x, y)| < M e^{sx}$ ($j = 1, \dots, 9$). Ниже получены в явном виде интегральные соотношения, которым должен удовлетворять вектор \mathbf{A}_0 .

2. Решение задачи (1.1), (1.2). Переходя от $\mathbf{A}(x, y)$ с помощью преобразования Лапласа к образу $\mathbf{A}_p(p, y)$, где p — комплексная переменная, получим систему уравнений

$$(2.1) \quad \frac{d}{dy} \left(L_0 \frac{d \mathbf{A}_p}{dy} \right) + L_1 \frac{d \mathbf{A}_p}{dy} = H_1 \mathbf{A}_p + p H_2 \mathbf{A}_p + \mathbf{F}, \\ \mathbf{F} = -H_2 \mathbf{A}_0.$$

Решение системы (2.1) будем искать методом вариации постоянной. В однородной системе (2.1) уравнения для первых шести компонент отщепляются и приводятся к хорошо известной системе типа Лиза — Липца [6] для вектора \mathbf{z} , построенного по первым шести компонентам вектора \mathbf{A}_p :

$$(2.2) \quad d\mathbf{z}/dy = H_0 \mathbf{z},$$

где H_0 — матрица 6×6 (ее ненулевые элементы выписаны в приложении). При этом компоненты A_{pj} ($j = 7, 8, 9$) однозначно определяются по первым шести компонентам. Система (2.2) допускает шесть линейно-независимых решений, которые вне пограничного слоя имеют асимптотические зависимости от y : $\mathbf{z}_j \sim \exp(\lambda_j y)$ ($j = 1, \dots, 6$). Постоянные λ_j определяются соотношениями [8]:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-p^2 + \operatorname{Re}(p - i\omega)}, \\ \lambda_{3,4} = \pm \left\{ \frac{1}{2} (b_{22} + b_{33}) + \sqrt{\frac{1}{4} (b_{22} - b_{33})^2 + b_{23} b_{32}} \right\}^{1,2}, \\ \lambda_{5,6} = \pm \left\{ \frac{1}{2} (b_{22} + b_{33}) - \sqrt{\frac{1}{4} (b_{22} - b_{33})^2 + b_{23} b_{32}} \right\}^{1,2},$$

$$b_{11} = H_0^{21}, \quad b_{22} = H_0^{42}H_0^{24} + H_0^{43}H_0^{34} + H_0^{46}H_0^{64},$$

$$b_{23} = H_0^{42}H_0^{25} + H_0^{43}H_0^{35} + H_0^{46}H_0^{65}, \quad b_{32} = H_0^{64}, \quad b_{33} = H_0^{65},$$

где H_0^{jj} — элементы матрицы H_0 , вычисляемые при $y \rightarrow \infty$; Re — число Рейнольдса; ω — частота возмущения; i — мнимая единица. Зафиксируем ветви $\text{Real}(\lambda_j) < 0$ ($j = 1, 3, 5$), и для построения однозначного решения проведем в плоскости переменной p разрезы, определяемые уравнениями $\lambda_j^2 = -k^2$ ($j = 1, 3, 5, k > 0$). Для каждого линейно-независимого решения системы (2.2) построим линейно-независимое решение ξ_j ($j = 1, \dots, 6$) однородной системы (2.1). Ищем решение (2.1) в виде

$$\mathbf{A}_p = \xi \mathbf{Q}(y) + \mathbf{Y}, \quad Y_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 6), \quad Y_i = -F_i \quad (i = 7, 8, 9),$$

где $\xi = \|\xi_1, \dots, \xi_6\|$ — матрица фундаментальных решений (9×6); \mathbf{Q} — неизвестная вектор-функция из шести компонент. Для \mathbf{Q} получаем уравнения

$$(2.3) \quad 2L_0 \frac{d\xi}{dy} \frac{d\mathbf{Q}}{dy} + L_0 \xi \frac{d^2\mathbf{Q}}{dy^2} + \frac{dL_0}{dy} \xi \frac{d\mathbf{Q}}{dy} + L_1 \xi \frac{d\mathbf{Q}}{dy} = \mathbf{f},$$

$$f_1 = F_1 = 0, \quad f_2 = F_2 - pH_2^{27}F_7 + L_1^{28} \frac{dF_8}{dy},$$

$$f_3 = F_3, \quad f_4 = F_4 - pH_2^{48}F_8, \quad f_5 = F_5 = 0,$$

$$f_6 = F_6 - pH_2^{69}F_9, \quad f_j = 0 \quad (j = 7, 8, 9).$$

Система (2.3) содержит шесть уравнений для определения шести компонент вектора \mathbf{Q} . После несложных преобразований приводим (2.3) к виду

$$(2.4) \quad Z d\mathbf{Q}/dy = \boldsymbol{\varphi}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = F_2 - pH_2^{27} +$$

$$+ L_1^{28} dF_8/dy - L_1^{28} F_3, \quad \varphi_3 = F_3,$$

$$\varphi_4 = \left[-H_0^{33}F_3 + F_4 - pH_2^{48}F_8 - \frac{d}{dy}(L_0^{43}F_3) \right] / (1 + L_0^{13}H_0^{34}),$$

$$\varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = F_6 - pH_2^{69}F_9,$$

где $Z = \|\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_6\|$ — матрица фундаментальных решений системы (2.2). Решая (2.4), получим

$$(2.5) \quad \mathbf{A}_p = \sum_{j=1}^6 \left(a_j + \int_{y_j}^y \frac{D_j}{W} dy \right) \xi_j + \mathbf{Y},$$

$$W = \det Z, \quad D_j/W = dQ_j/dy,$$

где константы a_j , y_j должны выбираться из граничных условий при $y = 0$ и $y \rightarrow \infty$. Хотя последние три компоненты в выражении (2.5) ничего не выражают, кроме их определения в векторе \mathbf{A} как производных по x от других компонент, их введение необходимо, так как их значение при $x = 0$ принципиально для построенного решения. Дальнейшее внимание сосредоточим на первых шести компонентах вектора \mathbf{A}_p . Поэтому будем опускать вектор \mathbf{Y} , а линейно-независимые решения ξ_j заменим на \mathbf{z}_j . В соответствии с выбором ветвей λ_j и граничными условиями (1.2) представим \mathbf{A}_p в виде

$$(2.6) \quad \mathbf{A}_p = \left(a_1 + \int_0^y \frac{D_1}{W} dy \right) \mathbf{z}_1 + \int_{-\infty}^y \frac{D_2}{W} dy \mathbf{z}_2 + \left(a_3 + \int_0^y \frac{D_3}{W} dy \right) \mathbf{z}_3 +$$

$$+ \int_{-\infty}^y \frac{D_4}{W} dy \mathbf{z}_4 + \left(a_5 + \int_0^y \frac{D_5}{W} dy \right) \mathbf{z}_5 + \int_{-\infty}^y \frac{D_6}{W} dy \mathbf{z}_6,$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left[\int_0^\infty \frac{D_2}{W} dy E_{235} + \int_0^\infty \frac{D_4}{W} dy E_{435} + \int_0^\infty \frac{D_6}{W} dy E_{635} \right] / E_{135}, \\
a_3 &= \left[\int_0^\infty \frac{D_2}{W} dy E_{125} + \int_0^\infty \frac{D_4}{W} dy E_{135} + \int_0^\infty \frac{D_6}{W} dy E_{165} \right] / E_{135}, \\
a_5 &= \left[\int_0^\infty \frac{D_2}{W} dy E_{132} + \int_0^\infty \frac{D_4}{W} dy E_{134} + \int_0^\infty \frac{D_6}{W} dy E_{136} \right] / E_{135}, \\
E_{ijk} &= \begin{vmatrix} z_{1i} & z_{1j} & z_{1k} \\ z_{3i} & z_{3j} & z_{3k} \\ z_{5i} & z_{5j} & z_{5k} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

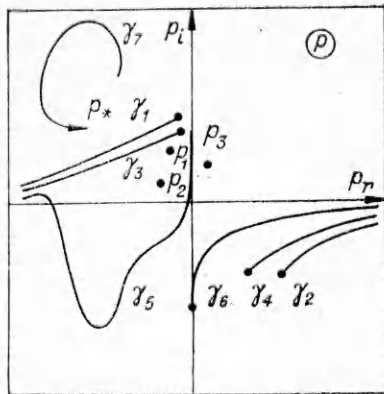
где z_{ij} означает i -ю компоненту j -го вектора. Обратное преобразование Лапласа от (2.6) будет определяться наличием точек ветвления и полюсов. Функция $W(y)$ из (2.5) может быть найдена из рассмотрения асимптотического представления z_j при $y \rightarrow \infty$ с использованием известного тождества Якоби [9]:

$$W(y) = W(\infty) \exp \left[\int_\infty^y \text{Sp}(H_0) dy \right].$$

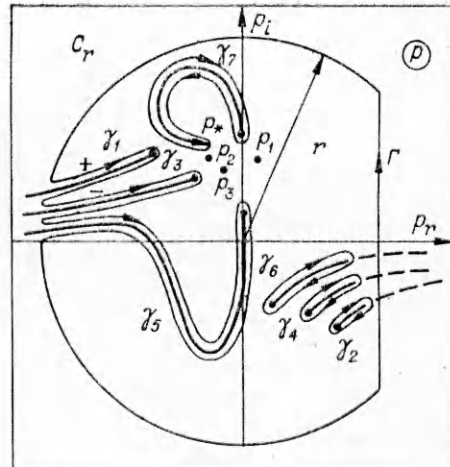
Константа $W(\infty)$ не может обращаться в нуль, так как равенство $W = 0$ при некотором значении p означало бы, что выбранная система решений z_j является линейно-зависимой и необходимо перестроить систему линейно-независимых векторов (аналогично анализу [4]). Полюса в (2.6) будут определяться нулями функции $E_{135}(p)$. Хорошо известно [6], что дисперсионное соотношение $E_{135} = 0$ определяет дискретный спектр линеаризованных уравнений Навье — Стокса, соответствующий волнам Толлмина — Шлихтинга, о котором, по крайней мере из численных расчетов, известно, что все нули E_{135} имеют вещественную часть $\text{Real}(p)$ меньше некоторого конечного числа p_0 . Оно может быть как больше, так и меньше нуля в зависимости от параметров задачи. Обратимся к структуре разрезов в плоскости комплексного переменного p , определяемых уравнениями $\lambda_j^2 = -k^2$ ($j = 1; 3; 5, k > 0$). Эти уравнения легко анализируются асимптотически при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$. При конечных значениях параметра k , числа Рейнольдса и переменной p уравнения решались численно. Получающаяся структура разрезов γ_j ($j = 1, \dots, 7$) приведена на фиг. 1 (число Маха $M < 1$) и на фиг. 2 ($M > 1$). Отметим, что один из разрезов γ_7 при $k \rightarrow \infty$ имеет предельную точку p_* , к которой он подходит вдоль линии $\text{Im}(p) = \text{const}$. В окрестности этой точки решение (2.6) характеризуется возмущением давления $\sim (p - p_*)^{-1/2}$. Обратим также внимание на существование трех разрезов, находящихся в полуплоскости $\text{Real}(p) > 0$ и уходящих на бесконечность. Их существование отражает факт некорректности задачи (1.1), (1.2). Если потребовать от начальных данных A_0 , чтобы решение (2.6) было непрерывным при переходе через разрезы при всех p , удовлетворяющих неравенству $\text{Real}(p) > s$, то задача будет регуляризована. При этом, замыкая путь интегрирования Γ дугой окружности C_r с обходом всех точек ветвления, как показано на фиг. 2, получим в пределе при $r \rightarrow \infty$ в результате обратного преобразования Лапласа решение $A(x, y)$, состоящее из суммы вычетов по дискретному набору полюсов p_v и интегралов по двум сторонам имеющих разрезов.

Рассмотрим подробно, как вычисляется вклад в обратное преобразование Лапласа от интегралов по двум берегам разреза γ_1 :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{dp}{dk} e^{px} (A_p^+ - A_p^-) dk,$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

где $p(k)$ определяется уравнением $\lambda_1^2 = -k^2$, индексы \pm означают значения функций на верхнем и нижнем берегах разрезов, отмеченных на фиг. 2. На верхнем берегу разреза $\lambda_1 = -ik$, на нижнем $\lambda_1 = ik$. Выразим все интегралы через значения функций на верхних берегах разрезов. При этом для γ_1 имеем

$$(2.7) \quad W^- = -W^+, \quad D_1^- = -D_2^+, \quad D_2^- = -D_1^+, \quad D_j^- = -D_j^+ \\ (j = 3, \dots, 6),$$

$$E_{135}^- = E_{235}^+, \quad E_{235}^- = E_{135}^+, \quad E_{1jk}^- = E_{2jk}^+ \quad (j, k \neq 1, 2).$$

Используя (2.7), после элементарных, но громоздких преобразований получим

$$(2.8) \quad \mathbf{I}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \alpha^x \frac{dp}{dk} G_1 [E_{235} z_1 - E_{135} z_2 + E_{125} z_3 + E_{132} z_5]_{\gamma_1} dk,$$

$$G_1 = \frac{1}{E_{135} E_{235}} \left[E_{135} \int_0^\infty \frac{D_1}{W} dy + E_{235} \int_0^\infty \frac{D_2}{W} dy - E_{345} \int_0^\infty \frac{D_4}{W} dy - \right. \\ \left. - E_{365} \int_0^\infty \frac{D_6}{W} dy \right]_{\gamma_1},$$

где индекс γ_1 означает, что $p(k)$ выбирается в соответствии с уравнением разреза γ_1 . Вклад от интегралов по берегам разреза γ_1 равен нулю, если $\Lambda_p^+ = \Lambda_p^-$. Это будет выполнено при условии $G_1 = 0$. На разрезе γ_2 , определяемом также уравнением $\lambda_1^2 = -k^2$, получим, что разность $\Lambda_p^+ - \Lambda_p^-$ пропорциональна выражению

$$G_2 = \frac{1}{E_{135} E_{235}} \left[E_{135} \int_0^\infty \frac{D_1}{W} dy + E_{235} \int_0^\infty \frac{D_2}{W} dy - E_{345} \int_0^\infty \frac{D_4}{W} dy - \right. \\ \left. - E_{265} \int_0^\infty \frac{D_6}{W} dy \right]_{\gamma_2}.$$

Одно из условий регуляризации задачи: $G_2 = 0$ при $\text{Real}(p) > s$. Аналогичные условия получаются на разрезах γ_4, γ_6 . Запишем окончательный результат:

$$(2.9) \quad \mathbf{A}(x, y) = \Sigma' \text{Res}(\mathbf{A}_p e^{px}) + \sum_{j=1}^7 \mathbf{I}_j,$$

где \mathbf{I}_j соответствуют вкладам от интегралов по берегам разрезов γ_j (ввиду громоздкого выражения их явный вид не выписан); Σ' означает суммирование по дискретному набору полюсов. В настоящее время имеются лишь численные исследования дискретного спектра (аналитическое рассмотрение выполнено только для простейших случаев [6]). Поэтому необходимо сделать дополнительное предположение о том, что Σ' в (2.9) имеет смысл.

3. Биортогональная система векторов. Определим следующую биортогональную систему векторов $\{\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$:

$$(3.1) \quad \frac{d}{dy} \left(L_0 \frac{d\mathbf{A}_\alpha}{dy} \right) + L_1 \frac{d\mathbf{A}_\alpha}{dy} = H_1 \mathbf{A}_\alpha + i\alpha H_2 \mathbf{A}_\alpha,$$

$$A_{\alpha 1} = A_{\alpha 3} = A_{\alpha 5} = 0 \text{ при } y = 0, \quad |A_{\alpha j}| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 9);$$

$$(3.2) \quad \frac{d}{dy} \left(L_0^* \frac{d\mathbf{B}_\alpha}{dy} \right) - L_1^* \frac{d\mathbf{B}_\alpha}{dy} = H_1^* \mathbf{B}_\alpha - i\bar{\alpha} H_2^* \mathbf{B}_\alpha,$$

$$B_{\alpha 2} = B_{\alpha 4} = B_{\alpha 6} = 0 \text{ при } y = 0, \quad |B_{\alpha j}| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 9).$$

В уравнениях (3.1), (3.2) и далее α — комплексное число; * означает сопряженную матрицу, черта сверху — комплексное сопряжение. Система (3.1) совпадает с однородной задачей (2.1). Система (3.2) определяет сопряженную с (3.1) задачу.

Анализ спектра возможных собственных значений α для (3.1), (3.2) был начат в [10]. Имеется дискретный спектр, соответствующий волнам Толлмина — Шлихтинга, и непрерывный. Разрезы γ_j на фиг. 1, 2 фактически соответствуют непрерывному спектру α , если использовать равенство $p = i\alpha$. Имеет место следующее условие ортогональности:

$$(3.3) \quad \langle H_2 \mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\beta \rangle = \Delta_{\alpha\beta}, \quad \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \int_0^\infty (\mathbf{A}, \mathbf{B}) dy \equiv \sum_{j=1}^9 \int_0^\infty A_j \bar{B}_j dy,$$

где $\Delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, если одно из чисел α, β принадлежит дискретному спектру; $\Delta_{\alpha\beta} = \delta(\alpha - \beta)$ — дельта-функция, если оба числа относятся к непрерывному спектру [5].

Решение (3.1) для дискретного спектра можно записать в виде

$$\mathbf{A}_\alpha = c_1 \xi_1 + c_3 \xi_3 + c_5 \xi_5,$$

где одна из констант произвольна в силу линейности задачи, а две другие определяются из граничных условий при $y = 0$. Векторы ξ_j совпадают с линейно-независимыми решениями однородной системы (2.1). Здесь и далее используются результаты предыдущих пунктов для $p = i\alpha$. Так как граничных условий при $y = 0$ имеется три, то возникает задача на собственные значения $E_{135}(i\alpha) = 0$ и выделяется дискретный спектр. Каждая из ветвей непрерывного спектра получается, когда для некоторого j ($j = 1, 3, 5$) $\lambda_j = \pm ik$ ($k > 0$). В этом случае ограниченное при $y \rightarrow \infty$ решение будет строиться из четырех линейно-независимых решений. При этом все константы определяются с точностью до выбора нормировки решения задачи (3.1). Например, для непрерывного спектра, определяемого уравнением $\lambda_1 = -ik$, решение (3.1) запишется в виде

$$\mathbf{A}_\alpha = E_{235} \xi_1 - E_{135} \xi_2 + E_{125} \xi_3 + E_{132} \xi_5,$$

который совпадает с векторной частью подынтегрального выражения \mathbf{I}_1 в (2.8), (2.9). Аналогично можно показать, что все подынтегральные выражения из \mathbf{I}_j в (2.9) пропорциональны одному из собственных решений (3.1) из непрерывного спектра.

4. Полнота системы собственных функций. Предполагая полноту системы $\{\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$, запишем формальное решение задачи (1.1), (1.2)

в виде

$$(4.1) \quad A(x, y) = \Sigma' \langle H_2 A_0, B_{\alpha v} \rangle e^{i\alpha v x} A_{\alpha v} + \sum_{j=1}^7 \int_0^{\infty} \langle H_2 A_0, B_{\alpha j} \rangle e^{i\alpha_j x} A_{\alpha j} dk_j,$$

где α_v соответствует решению дискретного спектра с номером v ; $A_{\alpha v}$, $B_{\alpha v}$ — решения (3.1), (3.2), соответствующие α_v ; Σ' — сумма по всем решениям дискретного спектра; α_j соответствует непрерывному спектру с номером j ; $A_{\alpha j}$, $B_{\alpha j}$ — решения (3.1), (3.2) при $\alpha = \alpha_j$; k_j — вещественный параметр, определяющий непрерывный спектр с номером j . Чтобы регуляризовать задачу (1.1), (1.2), мы потребовали от начальных данных A_0 возможности построения решения с конечным показателем роста вниз по потоку. Это требование уже обсуждалось при построении решения с помощью преобразования Лапласа, что в формальном представлении решения (4.1) можно также записать в виде интегрального соотношения $\langle H_2 A_0, B_{\alpha j} \rangle = 0$, которое должно выполняться при всех α_j с $\text{Real}(i\alpha_j) > s$.

Для доказательства полноты системы $\{A_\alpha, B_\alpha\}$ из (3.1), (3.2) необходимо доказать, что формальное решение (4.1) совпадает с (2.9). Мы уже выяснили, что подынтегральные выражения в \bar{I}_j из (2.9) пропорциональны $\exp(i\alpha_j) A_{\alpha j}$. На примере I_1 , получающегося из интегрирования вдоль разреза γ_1 , покажем, что G_1 из (2.8) пропорционально $\langle H_2 A_0, B_{\alpha_1} \rangle$. Запишем G_1 в виде

$$G_1 = \frac{1}{E_{135} E_{235}} \int_0^{\infty} \left[E_{135} \frac{D_1}{W} + E_{235} \frac{D_2}{W} - E_{345} \frac{D_4}{W} - E_{365} \frac{D_6}{W} \right] dy.$$

При этом D_j , получающиеся из решения алгебраической системы (2.4), вычисляются как определители матрицы фундаментальных решений Z , в которой j -й столбец заменен вектором φ из (2.4). Нетрудно показать, что $D_j/W = (\varphi, \chi_j)$, где χ_j — линейно-независимое решение системы уравнений сопряженной к (2.2) задачи [11]:

$$(4.2) \quad -d\chi/dy = H_0^* \chi,$$

$$\chi_2 = \chi_4 = \chi_6 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |\chi_j| < \infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 6).$$

Можно проверить, что вектор-функция

$$\chi = E_{135} \chi_1 + E_{235} \chi_2 - E_{345} \chi_4 - E_{365} \chi_6$$

удовлетворяет граничным условиям из (4.2). Тогда получаем, что G_1 пропорционально $\langle \varphi, \chi \rangle$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что имеет место соответствие задач (3.2), (4.2):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} B_{\alpha 1} &= \chi_1 - i\bar{\alpha} L_0^{43} \chi_4 d, & B_{\alpha 2} &= \chi_2, \\ B_{\alpha 3} &= \chi_3 d - i\bar{\alpha} \chi_3 d - L_0^{43} H_0^{33} \chi_4 - L_0^{43} \bar{H}_0^{64} \chi_6 d, \\ B_{\alpha 4} &= \chi_4 d, & B_{\alpha 5} &= \chi_5 + \bar{H}_0^{16} \chi_6, & B_{\alpha 6} &= \chi_6, \\ d &= (1 + L_0^{43} \bar{H}_0^{34}). \end{aligned}$$

Используя (4.3), определение φ из (2.4), получим $\langle \varphi, \chi_\alpha \rangle = \langle F, B_\alpha \rangle = -\langle H_2 A_0, B_\alpha \rangle$, где индекс α означает, что решения (4.2), (3.2) отыскиваются при собственном значении α . Таким образом, для всех $j = 1, \dots, 7$ устанавливается, что подынтегральные выражения в I_j пропорциональны $\langle H_2 A_0, B_{\alpha j} \rangle$.

Действуя аналогично работе [5], приходим к пропорциональности Σ' из (2.9), (4.1). Далее, чтобы установить, что все получаемые в конечном итоге коэффициенты пропорциональности равны единице, задаем в качестве A_0 одну из собственных функций A_α из (3.1). Используя соотношения ортогональности (3.3) и рассматривая (2.9) при $x = 0$, получим, что коэффициенты пропорциональности равны единице. Таким образом, мы установили совпадение (2.9) с (4.1), что доказывает полноту системы $\{A_\alpha,$

\mathbf{B}_α из (3.1), (3.2). Заметим, что доказательство можно было бы завершить и не прибегая к использованию известных свойств решения (2.9), полученного с помощью преобразования Лапласа (при $x = 0$ оно совпадает с \mathbf{A}_0). Для этого необходимо вычислить коэффициент пропорциональности при $\Delta_{\alpha\beta}$ в (3.3) при произвольной нормировке решений (3.1), (3.2). Эта процедура также была проделана и не приводится здесь из-за чрезмерной громоздкости.

Приложение.

$$\begin{aligned}
 L_0^{43} &= -r\mu/\text{Re}, \quad L_1^{ii} = 1 \quad (i = 1, \dots, 6), \quad L_1^{28} = (m+1), \\
 H_1^{21} &= -i\omega \text{Re}/\mu T, \quad H_1^{22} = -D\mu/\mu, \quad H_1^{23} = \text{Re } DU/\mu T, \\
 H_1^{25} &= -D(\mu' DU)/\mu, \\
 H_1^{26} &= -\mu' DU/\mu, \quad H_1^{33} = DT/T, \quad H_1^{34} = i\omega\gamma M^2, \quad H_1^{35} = -i\omega/T, \quad H_1^{43} = \\
 &= i\omega/T, \\
 H_1^{62} &= -2(\gamma-1)M^2\sigma DU, \quad H_1^{63} = \text{Re } \sigma DT/\mu T, \quad H_1^{64} = i\omega(\gamma-1)M^2 \text{Re } \sigma/\mu, \\
 H_1^{65} &= -D(\mu' DT)/\mu - i\omega \text{Re } \sigma/\mu T, \quad H_1^{66} = -2D\mu/\mu, \\
 H_2^{21} &= \text{Re } U/\mu T, \quad H_2^{23} = -D\mu/\mu, \quad H_2^{24} = \text{Re}/\mu, \quad H_2^{27} = -r, \\
 H_2^{31} &= H_2^{69} = -1, \quad H_2^{34} = -\gamma M^2 U, \quad H_2^{35} = U/T, \quad H_2^{41} = mD\mu/\text{Re}, \\
 H_2^{42} &= (m+1)\mu/\text{Re}, \quad H_2^{43} = -U/T, \quad H_2^{45} = \mu' DU/\text{Re}, \quad H_2^{48} = \mu/\text{Re}, \\
 H_2^{63} &= -2(\gamma-1)M^2\sigma DU, \quad H_2^{64} = -(\gamma-1)M^2 \text{Re } \sigma U/\mu, \quad H_2^{65} = \text{Re } U\sigma/\mu T, \\
 H_0^{12} &= H_0^{56} = 1, \quad H_0^{21} = -p^2 + (pU - i\omega) \text{Re}/\mu T, \quad H_0^{22} = -D\mu/\mu, \\
 H_0^{23} &= -p(m+1)DT/T - pD\mu/\mu + \text{Re } DU/\mu T, \\
 H_0^{24} &= p \text{Re}/\mu + (m+1)\gamma M^2 p(pU - i\omega), \\
 H_0^{25} &= ip(m+1)(i\omega - pU)/T - D(\mu' DU)/\mu, \quad H_0^{26} = -\mu' DU/\mu, \quad H_0^{31} = -p, \\
 H_0^{33} &= DT/T, \quad H_0^{34} = \gamma M^2(i\omega - pU), \quad H_0^{35} = (pU - i\omega)/T, \\
 H_0^{41} &= -\beta p(rDT/T + 2D\mu/\mu), \quad H_0^{42} = -\beta p, \\
 H_0^{43} &= \beta[-p^2 + (i\omega - pU) \text{Re}/\mu T + rD^2T/T + rD\mu DT/\mu T], \\
 H_0^{44} &= -\beta r\gamma M^2 [pDU + (pU - i\omega)(DT/T + D\mu/\mu)], \\
 H_0^{45} &= \beta [rpDU/T + \mu' pDU/\mu - r(i\omega - pU)D\mu/\mu T], \\
 H_0^{16} &= -\beta r(i\omega - pU)/T, \quad H_0^{62} = -2(\gamma-1)M^2\sigma DU, \\
 H_0^{63} &= -2(\gamma-1)M^2\sigma pDU + \text{Re } \sigma DT/\mu T, \quad H_0^{64} = (\gamma-1)M^2 \text{Re } \sigma(i\omega - pU)/\mu, \\
 H_0^{65} &= -p^2 + \text{Re } \sigma(pU - i\omega)/\mu T - (\gamma-1)M^2\sigma\mu'(DU)^2/\mu - D^2\mu/\mu, \\
 H_0^{66} &= -2D\mu/\mu.
 \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $U(y)$, $T(y)$ — профили скорости и температуры основного течения; γ — показатель адиабаты; M — число Маха; Re — число Рейнольдса; σ — число Прандтля; $r = (2/3) \times (e+2)$; $m = (2/3)(e-1)$; e — отношение коэффициента второй вязкости к первой; $\mu(T)$ — первый коэффициент вязкости; $\mu' = d\mu/dT$; $D = d/dy$; $\beta = [\text{Re}/\mu + r\gamma M^2(pU - i\omega)]^{-1}$; ω — частота возмущения.

Поступила 25 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.

3. Жигулев В. П. О возбуждении и развитии неустойчивостей в трехмерных пограничных слоях. Препринт № 3. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
4. Gustavsson L. H. Initial-value problem for boundary layer flows.— *Phys. Fluids*, 1979, vol. 22, p. 1602.
5. Salwen H., Grosh C. E. The continuous spectrum of the Orr — Sommerfeld equation. Pt 2. Eigenfunction expansions.— *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 104, p. 445.
6. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
7. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1971.
8. Mack L. M. Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer.— In: *Methods in computational Physics*. Vol. 4, 1965.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ГИИТТ, 1953.
10. Сидоренко Н. В., Тумин А. М. Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа.— В кн.: *Механика неоднородных сред*. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.

УДК 532.5 + 532.516

К УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

В. А. Владимиров
(Новосибирск)

Исследованию устойчивости вращающихся течений посвящено большое количество работ. Значительный прогресс достигнут в понимании частного идеализированного случая — задачи об устойчивости течений идеальной жидкости с круговыми линиями тока (см., например, [1—7]). Изучение этой задачи позволило сделать вывод о существовании в закрученном потоке двух фундаментальных механизмов неустойчивости — «центробежного» и «сдвигового». Осознание этих механизмов послужило основой для моделирования целого ряда переходных явлений и турбулентности [2, 4, 7—12]. В то же время реальные течения часто лишь близки к круговым. Поэтому встает вопрос о влиянии небольших отличий от круговой геометрии на устойчивость потока. Изучение этого вопроса проводилось в [13—16]. В [13, 14] экспериментально и теоретически исследовалась задача устойчивости вращения жидкости внутри сосуда, имеющего форму эллиптического цилиндра с малым эксцентриситетом. Экспериментально обнаружена неустойчивость, приводящая к изгибам оси вращения. Для теоретического описания этой неустойчивости предложена модель, построенная методом Галеркина с использованием двух хорошо подобранных базисных функций. Существование неустойчивости в такой постановке, на первый взгляд, представляется удивительным, поскольку известно, что твердотельное вращение обладает большим запасом устойчивости [4]. Качественно близкая к [13, 14] задача об устойчивости линейного вихря в потенциальном потоке рассматривалась в [15, 16]. Ядро вихря считалось подверженным малой деформации так, что форма его поперечного сечения близка к эллипсу с малым эксцентриситетом. Вычисления, сделанные с помощью теории возмущений, также показали существование неустойчивости, связанной с изгибами оси вращения. Как в [13, 14], так и в [15, 16] теоретическое рассмотрение ограничено изучением устойчивости течений относительно возмущений частного вида в линейной постановке.

Задача [13, 14] об устойчивости течения жидкости внутри эллиптического цилиндра является простейшей среди большого класса задач, связанных с устойчивостью деформированного вращения жидкости, и заслуживает подробного изучения. В данной работе представлены результаты по устойчивости этого течения относительно возмущений общего вида. Используется теория возмущений по параметру ϵ , характеризующему малость деформации. Согласно проведенным вычислениям, рассмотренное течение уже в первом приближении по ϵ всегда неустойчиво относительно трехмерных возмущений с длинами волн $2\pi/k$ вдоль оси вращения. Соответствующие волновые числа k непрерывно заполняют счетное число отрезков ширины порядка ϵ . В середине каждого отрезка (точках k_0) инкремент нарастания возмущения максимален. Значения k_0 соответствуют условиям вырождения задачи нулевого приближения. Касаясь физической трактовки неустойчивости, отметим, что ее механизм аналогичен известным «резонансным взаимодействиям» [17] в усложненном случае, когда решения линейной задачи не являются плоскими волнами. Полученный результат можно интерпретировать как разновидность утверждения Хассельмана [18] о неустойчивости волны конечной амплитуды при существовании соответствующей «резонансной триады». Условия резонанса здесь принимают вид уже упомянутых условий вырождения. Роль «первичной»