УДК 532.54

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЫТЕСНЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

С. В. Головин, М. Ю. Казакова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: golovin@hydro.nsc.ru, m.u.kazakova@gmail.com

Предложена одномерная модель переноса двухфазной жидкости (жидкость с песком и чистая жидкость) в ячейке Хеле-Шоу с проницаемыми стенками, через которые возможен отток чистой жидкости с увеличением концентрации песка. Построенная модель описывает процесс вытеснения двухфазной жидкости с образованием неустойчивости Саффмана — Тейлора и обобщает модель Коваля на случай изменения концентрации песка за счет оттока чистой жидкости через стенки ячейки. Проанализирована задача о распаде разрыва. Обнаружены новые по сравнению с моделью Коваля конфигурации течения.

Ключевые слова: ячейка Хеле-Шоу с проницаемыми стенками, неустойчивость Саффмана — Тейлора, двухфазная жидкость, перенос примеси.

DOI: 10.15372/PMTF20170102

Введение. Исследованию течения бинарных жидкостей в ячейке Хеле-Шоу посвящено большое количество работ, в которых основное внимание уделяется изучению развития неустойчивости Саффмана — Тейлора [1, 2] с учетом влияния различных факторов: сил инерции [3–5], сдвигового характера течения [6–9], непостоянства ширины ячейки [10], мембранной упругости стенок ячейки [11].

В настоящей работе моделируется перенос примеси (песка) основным течением жидкости в ячейке Хеле-Шоу. Данное исследование обусловлено необходимостью моделирования процесса переноса проппанта течением жидкости при создании трещины гидроразрыва пласта. Двумерная постановка такой задачи рассматривалась в работе [12], в которой построена модель переноса проппанта по трещине гидроразрыва пласта с учетом возможности образования застойных зон, оседания песка и его неравномерного распределения в ячейке. Однако в работе [12] рассматривался случай равномерного закачивания проппанта с увеличивающейся концентрацией, случай пульсовой закачки проппанта с развитием неустойчивости на фронте вытеснения не исследовался. Как и в [12] и многих других работах, в настоящей работе суспензия из жидкости с песком рассматривается в качестве неньютоновской жидкости, вязкость которой зависит от концентрации песка. Заметим, что существуют более полные модели, учитывающие микровращение частиц проппанта [13, 14], обобщающие закон Дарси на случай псевдопластических и дилатант-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-20013).

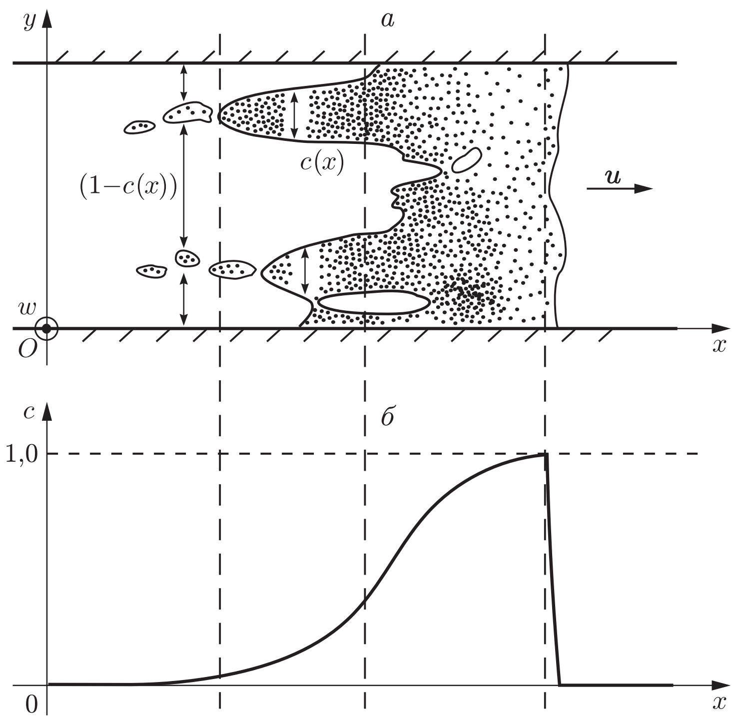

Рис. 1. Схема течения (a) и распределение массовой доли примеси в ячейке ($б$)

ных жидкостей Хершеля — Балкли, однако требующие определения большого количества эмпирических констант.

Особенностью рассматриваемого процесса является проницаемость стенок ячейки, через которые часть несущей жидкости покидает область течения, что приводит к увеличению концентрации песка и эффективной вязкости жидкости. Таким образом, целью настоящей работы является построение одномерной модели, описывающей развитие неустойчивости Саффмана — Тейлора с учетом возможности изменения эффективной вязкости жидкости за счет повышения концентрации песка вследствие оттока жидкости.

1. Основная модель. Рассмотрим течение жидкости, содержащей примесь (песок), в симметричной вертикальной прямоугольной ячейке длиной L, высотой H и толщиной $w(t,x) \ll H$ (толщина ячейки не меняется по высоте). Расположим оси декартовой системы координат Oxy вдоль ребер ячейки (рис. 1,a). Жидкость закачивается вдоль левой стенки ячейки при $x = 0$, верхняя и нижняя поверхности ячейки при $y = 0$, $y = H$ являются непроницаемыми, сток жидкости осуществляется на правой стенке $x = L$. Параметр d определяет объемную концентрацию песка в жидкости: при $d = 0$ в ячейке присутствует только жидкость, при $d > 0$ в жидкости содержится песок. Максимальному достигаемому значению концентрации песка соответствует значение $d = s_l < 1$. Обозначим плотности чистой (без песка) жидкости и песка через ρ_f и ρ_p соответственно. Тогда средняя плотность задается соотношением

$$\rho = \rho_f(1 - d) + \rho_p d.$$

Будем полагать, что боковые стенки ячейки являются пористыми и через них происходит отток чистой жидкости со скоростью $v_l(x,y)$, при этом песок остается в ячейке.

1.1. *Законы сохранения.* Закон сохранения массы для суспензии из жидкости с песком в ячейке имеет вид

$$\frac{\partial\,(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \boldsymbol{u}) = -Q_{lf}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость течения суспензии вдоль ячейки; $Q_{lf} = v_l \rho_f (1 - d/s_l)$ — расход чистой жидкости через боковую поверхность; v_l — скорость расхода жидкости, рассчитываемая по формуле Картера [15] или другим способом. Будем полагать, что отток жидкости в пласт прекращается при $d = s_l$.

Закон сохранения массы песка имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p w d) + \nabla \cdot (\rho_p w d \boldsymbol{u}) = 0. \tag{2}$$

Исключая ρ_p из (2), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(w d) + \nabla \cdot (w d \boldsymbol{u}) = 0.$$

В предположении, что число Рейнольдса для течения в трещине, вычисленное по толщине ячейки и характерной скорости потока, достаточно мало, течение можно считать ламинарным и для скорости жидкости использовать приближение Пуазейля

$$\boldsymbol{u} = -\Lambda(d, w) \nabla p.$$

Здесь p — давление жидкости в трещине; $\Lambda(d, w)$ — "мобильность" жидкости, в простейшем случае течения Пуазейля в щели шириной w имеющая вид

$$\Lambda = w^2/(12\mu(d)),$$

$\mu(d)$ — динамическая вязкость жидкости, зависящая от концентрации песка. Будем считать, что вязкость чистой жидкости равна $\mu(0) = \mu_f$, вязкость жидкости с максимальной концентрацией песка равна $\mu(s_l) = \mu_p$. При значениях концентрации песка $0 < d < s_l$ вязкость монотонно и непрерывно увеличивается от μ_f до μ_p. Зависимости эффективной вязкости жидкости от концентрации песка исследованы, например, в работе [16].

1.2. *Осредненная модель.* В практических приложениях высота ячейки много меньше ее длины: $H \ll L$. Это означает, что давление жидкости достаточно быстро выравнивается по высоте ячейки, а движение происходит за счет перепада давления вдоль оси Ox. Для построения одномерной модели переноса песка в ячейке проведем осреднение по высоте ячейки и получим упрощенную модель.

Используем односкоростную модель, при этом в каждом сечении $x = \mathrm{const}$ разделим течение на две фазы с разной вязкостью: чистую Γ_f (без песка) и загрязненную Γ_p (с песком): $\Gamma_f \bigcup \Gamma_p = [0, H]$. Таким образом, жидкость с песком занимает часть Γ_p сечения, в то время как остальная часть Γ_f сечения занята чистой жидкостью.

Осредненное уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{H} \int\limits_0^H \rho w \, dy + \frac{1}{H} \int\limits_0^H \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} w) \, dy = -\frac{1}{H} \int\limits_0^H Q_{lf} \, dy. \tag{3}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (3). Представим интеграл в виде суммы двух интегралов по множествам Γ_f, Γ_p:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{H} \int\limits_0^H \rho w \, dy = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{H} \int\limits_{\Gamma_f} \rho_f w \, dy + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{H} \int\limits_{\Gamma_p} \rho w \, dy.$$

Пусть часть сечения $x = \mathrm{const}$, занятая загрязненной фазой, определяется параметром $c(t, x) = |\Gamma_p|/H$ (см. рис. 1,*б*), где $|\Gamma_p|$ — мера множества Γ_p. Первый интеграл запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f (1 - c) w),$$

второй интеграл умножим и разделим на c:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{c}{cH}\int\limits_{\Gamma_p}\rho w\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\,c\Big[\rho_f\Big(1-\frac{1}{cH}\int\limits_{\Gamma_p} d\,dy\Big)+\rho_p\,\frac{1}{cH}\int\limits_{\Gamma_p} d\,dy\Big]w.$$

Обозначим среднюю концентрацию песка в загрязненной фазе через $s=\bar{d}$. Здесь и далее черта обозначает осреднение функции по Γ_p:

$$\bar{f}\equiv\frac{1}{cH}\int\limits_{\Gamma_p} f\,dy.$$

Параметр s определяет долю песка в загрязненной фазе, а полученная осредненная плотность $\rho_s=\rho_f(1-s)+\rho_p s$ — плотность загрязненной фазы. Таким образом, первое слагаемое в уравнении (3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[\rho_f(1-c)+\rho_s c]w.$$

Осредняя второе слагаемое уравнения (3), получаем

$$\frac{1}{H}\int\limits_0^H \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}w)\,dy = \frac{1}{H}\int\limits_0^H \frac{\partial}{\partial x}\,(\rho w u)\,dy + \frac{\rho w v}{H}\Big|_0^H,$$

где u, v — компоненты вектора скорости. В силу условия непротекания последнее слагаемое в (3) равно нулю. Далее будем полагать, что давление p выравнивается по высоте ячейки и движение происходит за счет перепада давления вдоль координаты x: $p=p(t,x)$. Получаем

$$\frac{1}{H}\int\limits_0^H \frac{\partial}{\partial x}\,(\rho w u)\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{H}\int\limits_0^H \rho w u\,dy\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\,w\Big(\frac{1}{H}\int\limits_{\Gamma_f}\rho_f u\,dy+\frac{1}{H}\int\limits_{\Gamma_p}\rho u\,dy\Big). \qquad (4)$$

Первый интеграл в (4) равен

$$\frac{1}{H}\int\limits_{\Gamma_f}\rho_f u\,dy = -(1-c)\rho_f\Lambda(0)\,\frac{\partial p}{\partial x} = (1-c)\rho_f u_f, \qquad u_f\equiv-\Lambda(0)\,\frac{\partial p}{\partial x},$$

для вычисления второго слагаемого в правой части (4) введем обозначения

$$d=s+d^*,\quad \Lambda(d)=\Lambda(s)+\Lambda^*(d),\quad \overline{d^*}=0,\quad \overline{\Lambda^*(d)}=0,\quad u_p=-\Lambda(s)\,\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Получаем

$$\rho=\rho_f(1-s)+\rho_p s+d^*(\rho_p-\rho_f)=\rho_s+d^*(\rho_p-\rho_f).$$

Следовательно,

$$\overline{\rho u} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\overline{(\rho_s+d^*(\rho_p-\rho_f))(\Lambda(s)+\Lambda^*(d))} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,c\,(\rho_s\Lambda(s)+(\rho_p-\rho_f)\,\overline{d^*\Lambda^*(d)}\,). \qquad (5)$$

Далее последним слагаемым в правой части (5) пренебрегается. Таким образом,

$$\frac{1}{H}\int\limits_0^H \frac{\partial}{\partial x}\,(\rho w u)\,dy \approx \frac{\partial}{\partial x}\,((\rho_f(1-c)u_f+\rho_s c u_p)w).$$

Осредненный общий закон сохранения массы принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho} w) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho_f(1-c)u_f + \rho_s c u_p)w) = -v_l \rho_f\Big(1 - \frac{sc}{s_l}\Big), \tag{6}$$

где $\tilde{\rho}$ — средняя плотность среды:

$$\tilde{\rho} = \rho_f(1-c) + c\rho_s = \rho_f(1-c) + c(\rho_f(1-s) + \rho_p s) = \rho_f(1-sc) + \rho_p sc.$$

Аналогичным образом получаем закон сохранения массы песка в загрязненной фазе:

$$\frac{\partial}{\partial t}(scw) + \frac{\partial}{\partial x}(wscu_p) = 0. \tag{7}$$

Представим уравнение (6) в виде суммы законов сохранения для чистой и загрязненной фаз:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}((1-c)w) + \frac{\partial}{\partial x}((1-c)wu_f) = -v_l(1-c) - Q, \\ \frac{\partial}{\partial t}(cw) + \frac{\partial}{\partial x}(cwu_p) = -v_l c\Big(1 - \frac{s}{s_l}\Big) + Q \end{gathered} \tag{8}$$

(слагаемое Q определяет межфазный обмен массой). В силу (7), (8) уравнение (6) удовлетворяется тождественно.

Из (7), (8) для описания течения получаем уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\partial (cw)}{\partial t} + \frac{\partial (cwu_p)}{\partial x} = -v_l c\Big(1 - \frac{s}{s_l}\Big) + Q, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (wu)}{\partial x} = -v_l\Big(1 - \frac{cs}{s_l}\Big), \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u_p \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{s}{w}\Big(v_l\Big(1 - \frac{s}{s_l}\Big) - \frac{Q}{c}\Big), \end{gathered} \tag{9}$$

где $u = cu_p + (1-c)u_f$ — средняя скорость течения. Для замыкания системы уравнений (9), содержащей пять неизвестных функций: w, c, s, u, u_p, необходимо определить скорость течения и зависимость ширины щели от давления жидкости.

1.3. *Замыкающие соотношения.* Будем полагать, что давление жидкости одинаково в чистой и загрязненной фазах и зависит только от переменных t и x. Полагая течение ламинарным, из осредненного по ширине щели закона сохранения импульса находим

$$\frac{w^2}{12\mu_f}\frac{\partial p}{\partial x} = -u_f = -\sigma(s)u_p$$

($\sigma(s) = \mu_p/\mu_f \geqslant 1$ — отношение вязкостей загрязненной и чистой фаз).

С учетом выражения для средней скорости течения $u = cu_p + (1-c)u_f$ получаем выражения для скоростей фаз в виде линейных функций средней скорости течения:

$$u_f = \frac{\sigma}{c + \sigma(1-c)}\,u, \qquad u_p = \frac{1}{c + \sigma(1-c)}\,u. \tag{10}$$

Пусть средняя вязкость жидкости μ равна

$$\mu = \mu_f\,\frac{\sigma}{c + \sigma(1-c)}.$$

Тогда среднюю скорость течения u можно выразить через градиент давления:

$$u = -\frac{w^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

В рамках данной модели возможны два варианта: ячейка с жесткими ($w = w(x)$) или упругими ($w = F[p(t,x)]$) стенками. В первом случае второе уравнение системы (9) определяет среднюю скорость u потока по заданной скорости оттока v_l и концентрациям s и c. Скорости чистой и загрязненной жидкостей u_f и u_p находятся с использованием средней скорости u из формул (10).

В случае ячейки с упругими стенками можно использовать подход Желтова — Христиановича [17], полагая, что рассматриваемая ячейка является вертикальной трещиной с постоянной шириной $w(t,x)$ в неограниченном упругом пространстве. Используя приближение плоской деформации и формулу Колосова — Мусхелишвилли [18], рассматривая горизонтальное сечение трещины, определим зависимость ширины трещины w от давления p:

$$w(t,x) = \frac{4}{\pi E'} \int\limits_0^L p(t,\xi) B(x,\xi;L)\,d\xi, \qquad E' = \frac{E}{1-\nu^2}.$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругой среды; сингулярное ядро B определяется по формуле

$$B(x,\xi;L) = \ln\Big|\frac{\sqrt{L^2-x^2}+\sqrt{L^2-\xi^2}}{\sqrt{L^2-x^2}-\sqrt{L^2-\xi^2}}\Big|.$$

Таким образом, в случае ячейки с упругими стенками скорости u, u_p, u_f, а также величина раскрытия щели w выражаются через давление p.

2. Упрощенная модель. Рассмотрим случай, когда ширина ячейки постоянна: $w =$ const.

2.1. *Случай постоянной ширины ячейки и нулевого оттока.* Рассмотрим случай $w =$ const, $v_l = 0$, $Q = 0$, когда средняя скорость потока является постоянной: $u = U =$ const. Уравнения модели сводятся к следующим законам сохранения:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(c\varphi(s,c)U) = 0, \qquad \frac{\partial\,(sc)}{\partial t} + \frac{\partial\,(sc\varphi(s,c)U)}{\partial x} = 0,$$
$$\varphi(s,c) = \frac{1}{(1-c)\sigma(s)+c}. \tag{11}$$

Здесь $\sigma = \sigma(s)$ — кусочно-линейная функция, принимающая значения $\sigma = 1$, $\sigma = \mu_p/\mu_f$, $\sigma = \mu_b/\mu_f$ при $s = 0$, $s = s_l$, $s = 1$ соответственно; $\mu_b \gg \mu_p^*$ — искусственная вязкость, необходимая для описания запирания потока вследствие образования пробки песка; μ_p^* — вязкость загрязненной жидкости при максимальной концентрации проппанта.

Система (11) сводится к инвариантам Римана, которыми в данном случае являются функции $\varphi(s,c)$ и s. Получаем

$$\frac{\partial\varphi(s,c)}{\partial t} + U\,\frac{\partial\,(c\varphi(s,c))}{\partial c}\,\frac{\partial\varphi(s,c)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + U\varphi(s,c)\,\frac{\partial s}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

Следует отметить, что при $s =$ const модель (11) совпадает с моделью Коваля [19] для описания распространения вязких “пальцев” при развитии неустойчивости Саффмана — Тейлора. Обобщение модели Коваля в данном случае заключается в описании изменения вязкостей жидкостей вследствие оттока жидкости через стенки ячейки.

2.2. *Общий случай.* Введем функцию $m = cw$. Для функции $\tilde\varphi$ имеем

$$\tilde\varphi(m,s) = \frac{w}{(w-m)\sigma(s)+m}.$$

Будем полагать, что функции w, u определены из решения совместной задачи гидроупругости на n-м и $(n+1)$-м шагах по времени с использованием метода [20]. Далее необходимо решить систему двух уравнений для функций m, s. Законы сохранения принимают вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial\,(m\tilde{\varphi}(m,s)u)}{\partial x} = -\frac{v_l m(1-s)}{w}, \qquad \frac{\partial\,(sm)}{\partial t} + \frac{\partial\,(sm\tilde{\varphi}(m,s)u)}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Система (13) сводится к инвариантам Римана, в качестве которых используются функции $\tilde{\varphi}(m,s)$ и s. Получаем

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + u\,\frac{\partial\,(m\tilde{\varphi}(m,s))}{\partial m}\,\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} = -m\tilde{\varphi}\,\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial m}\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial m}\,\frac{v_l(1-s)m}{w} + \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s}\,\frac{v_l s(1-s)}{w},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\tilde{\varphi}\,\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{v_l s(1-s)}{w}.$$

2.3. *Точное решение задачи о распаде разрыва.* Для построения алгоритма численного решения систем уравнений (11), (13) и его тестирования необходимо решить задачу о распаде произвольного разрыва для однородной системы (11). Рассмотрим задачу Коши для уравнений (11) со следующими кусочно-постоянными начальными данными:

$$(c,s) = \begin{cases} (c_1, s_1), & x > 0, \\ (c_2, s_2), & x < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение будем искать в классе автомодельных решений в виде комбинации простых волн разрежения, контактного разрыва и ударных волн.

В рассматриваемом случае течение происходит слева направо. Состояние справа от волны назовем состоянием перед волной, состояние слева от волны — состоянием за волной. Параметры, соответствующие этим состояниям, обозначим индексами 1, 2.

Для нахождения решений в виде простых волн используем уравнения в инвариантах Римана (12). Система имеет два семейства характеристик

$$c_\varphi\colon \quad \frac{dx}{dt} = U\,\frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}, \qquad c_s\colon \quad \frac{dx}{dt} = U\varphi,$$

совпадающих при $c = 0$.

Для каждого инварианта Римана получаем решения в виде простых волн:

— φ-волны

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const}, \qquad x - U\varphi(c,s)t = F(s);$$

— s-волны

$$s = s_0 = \text{const}, \qquad x - U\,\frac{\partial\,(c\varphi(c,s))}{\partial c}\,t = F(c)$$

(F — произвольная функция).

Для решения поставленной задачи необходимо построить решение в виде центрированных волн, соответствующих автомодельным решениям. В случае φ-волны такое решение является тождественно постоянным:

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const},$$

$$\lambda = x/t, \quad s = s(\lambda) \quad \Rightarrow \quad -\lambda s' + U\varphi s' = 0 \quad \Rightarrow \quad s = s_0 = \text{const}\,.$$

Центрированная s-волна имеет вид

$$s = s_0 = \text{const}, \qquad U\,\frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c} = \frac{x}{t}.$$

В случае совпадения характеристик при $c = 0$ существует еще одно решение, называемое c-волной и получаемое из уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{U}{\sigma(s)}\,\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad c \equiv 0.$$

В автомодельной c-волне зависимость $s(\lambda)$ $(\lambda = x/t)$ определяется из неявного уравнения

$$\frac{U}{\sigma(s)} = \frac{x}{t}.$$

Поскольку в этом решении величина s увеличивается при увеличении x, скорость волны $U/\sigma(s)$ является монотонно возрастающей функцией.

Для построения решений в виде ударных волн необходимо определить условия Ренкина — Гюгонио на скачке. Интегрируя уравнения в виде законов сохранения (11) по контуру, охватывающему сильный разрыв, и переходя к пределу при стремлении контура к линии разрыва, получаем

$$[c(U\varphi - \dot{x})] = 0, \qquad [sc(U\varphi - \dot{x})] = 0. \tag{15}$$

Здесь $[\,\cdot\,]$ — скачок функции на разрыве; $x = x(t)$ — положение линии разрыва; $\dot{x}$ — скорость разрыва. Из уравнений (15) следует, что возможны только два типа решений с сильным разрывом: контактный разрыв и ударная волна.

Контактный разрыв определяется по формулам

$$\dot{x} = \varphi U, \quad [s] \neq 0, \quad [c] \neq 0, \quad [\varphi] = 0,$$

ударная волна задается соотношениями

$$\dot{x} = U[c\varphi]/[c], \qquad [s] = 0. \tag{16}$$

Согласно [21] не все определяемые формулами (16) решения имеют физический смысл. Необходимо проверить условие Лакса эволюционности разрыва, заключающееся в определении всех параметров за разрывом по заданному состоянию перед разрывом и по скорости ударной волны. Для этого количество условий Ренкина — Гюгонио минус один должно быть равно количеству уходящих с разрыва характеристик на плоскости (x, t) (характеристик, скорость которых больше скорости разрыва справа от него или меньше слева). В рассматриваемом случае необходимо определить соотношение между скоростью разрыва $\dot{x} = U[c\varphi]/[c]$ и скоростями характеристик $c_s = U\varphi$, $c_\varphi = U\,\partial\,(c\varphi)/\partial c$.

По теореме о среднем определим соотношение между скоростью разрыва и c_φ:

$$\frac{c_2\varphi_2 - c_1\varphi_1}{c_2 - c_1} = \frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}\,(c_*, s_0);$$

$$\frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}(c_1, s_0) \leqslant \frac{c_2\varphi_2 - c_1\varphi_1}{c_2 - c_1} \leqslant \frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}(c_2, s_0). \tag{17}$$

Здесь индекс 1 соответствует состоянию перед ударной волной (состояние 1), индекс 2 — за ударной волной (состояние 2), значение c_* соответствует некоторому промежуточному значению между c_1 и c_2. Из неравенства (17) следует, что c_φ всегда является приходящей на ударную волну характеристикой (рис. 2).

Для сравнения c_s и $\dot{x}$ найдем относительную скорость течения перед ударной волной и за ней:

$$v_1 \equiv \varphi_1 - \frac{c_2\varphi_2 - c_1\varphi_1}{c_2 - c_1} = \frac{c_2(\varphi_1 - \varphi_2)}{c_2 - c_1},$$

$$v_2 \equiv \varphi_2 - \frac{c_2\varphi_2 - c_1\varphi_1}{c_2 - c_1} = \frac{c_1(\varphi_1 - \varphi_2)}{c_2 - c_1}.$$

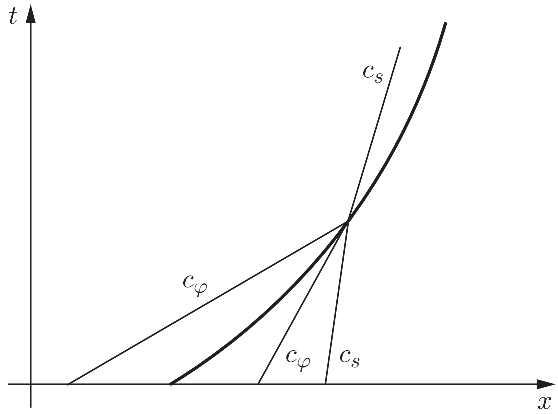

Рис. 2. Характеристики на сильном разрыве

Для выполнения условия эволюционности необходимо, чтобы выполнялось одно из условий

$$v_1 > 0, \quad v_2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \varphi_1 > \varphi_2, \quad c_1 < c_2, \\ \varphi_1 < \varphi_2, \quad c_1 > c_2; \end{array} \tag{18}$$

$$v_1 < 0, \quad v_2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \varphi_1 > \varphi_2, \quad c_1 > c_2, \\ \varphi_1 < \varphi_2, \quad c_1 < c_2. \end{array} \tag{19}$$

Неравенства (18) не выполняются, поскольку функция $\varphi(c,s)$ является возрастающей функцией переменной c при фиксированном значении s и такой случай не реализуется. Для неравенств (19) характеристика c_s является приходящей справа и уходящей слева от разрыва (см. рис. 2). Тогда из условия эволюционности разрыва следуют неравенства

$$c_2 > c_1, \qquad \varphi_2 > \varphi_1,$$

которые свидетельствуют об отсутствии ударных волн разрежения.

Решения задачи о распаде произвольного разрыва описываются следующим набором волн:

— постоянное решение c, $s = \text{const}$;

— простая c-волна (ПВ) $c = 0$, $[s] < 0$, $[\varphi] \neq 0$;

— волна разрежения (ВР) $[s] = 0$, $[c] < 0$, $[\varphi] \neq 0$;

— ударная волна (УВ) $[s] = 0$, $[c] > 0$, $[\varphi] \neq 0$;

— контактный разрыв (КР) $[s] \neq 0$, $[c] \neq 0$, $[\varphi] = 0$.

Доказательство теоремы о примыкании в данном случае аналогично классическому доказательству для уравнений газовой динамики [22]. Согласно этой теореме в непрерывном решении к постоянному течению может примыкать только простая волна.

На плоскости Ocs проведем кривую Φ: $\varphi(c,s) = \varphi(c_2,s_2)$ и прямую $s = s_1$. Точка пересечения этих кривых имеет координаты (c_3, s_1) при $c_3 > 0$ (индекс 3 означает промежуточное состояние). В случае если точка пересечения лежит в области отрицательных значений c, введем состояния $3'$: $(0, s_1)$ и $3''$: $(0, s_3)$, где через $(0, s_3)$ обозначена точка пересечения кривой Φ и прямой $c = 0$.

Рассмотрим два случая:

$$s_1 < s_2, \qquad s_1 > s_2.$$

В первом случае решение задачи Римана задано следующей теоремой.

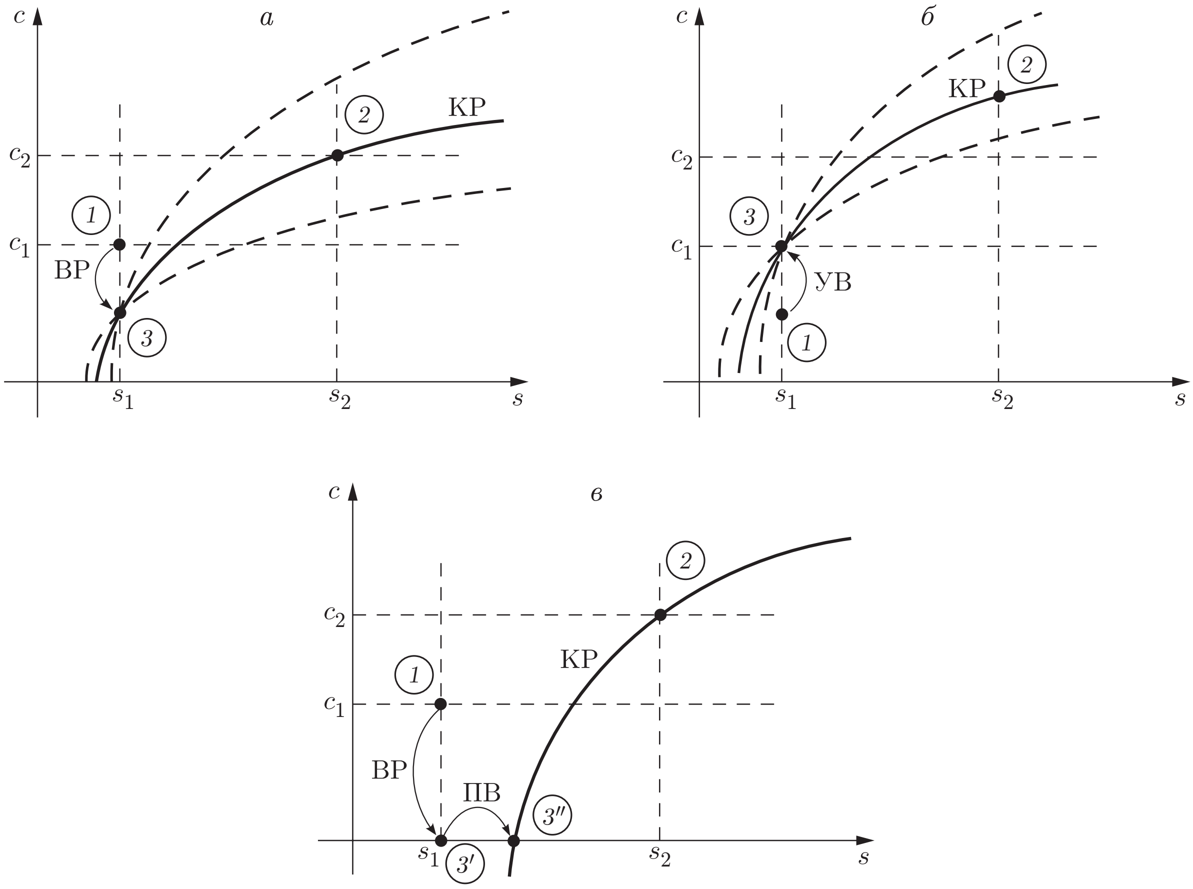

Рис. 3. Точное решение задачи о распаде разрыва, связывающее состояния *1* и *2* через состояние *3*, *3′* или *3″*, в случае $s_1 < s_2$ на плоскости (c, s) при различных начальных данных и комбинациях волн:
а — волна разрежения и контактный разрыв, *б* — ударная волна и контактный разрыв, *в* — волна разрежения, простая волна и контактный разрыв

Теорема 1. *Если начальные данные задачи о распаде произвольного разрыва* (9), (14) *таковы, что* $s_1 < s_2$, *то задача имеет единственное решение, являющееся комбинацией следующих волн (рис. 3):*

I. $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (c_3, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_2, s_2)$ при $0 \leqslant c_3 \leqslant c_1$.

II. $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{УВ}} (c_3, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_2, s_2)$ при $c_3 > c_1$.

III. $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (0, s_1) \xrightarrow{\text{ПВ}} (0, s_3) \xrightarrow{\text{КР}} (c_2, s_2)$ при $c_3 < 0$.

Доказательство. Доказательство проводится путем сравнения соотношений между скоростями ударной волны, контактного разрыва и волны разрежения. Скорости ударной волны и волны разрежения всегда больше скорости контактного разрыва:

— при переходе $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_3, s_3)$ или $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{УВ}} (c_3, s_1)$

$$\text{УВ:} \qquad \varphi_1 < \frac{c_3\varphi_3 - c_1\varphi_1}{c_3 - c_1}.$$

— при переходе $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_3, s_3)$ или $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (c_3, s_1)$

$$\text{ВР:} \qquad \varphi_1 < \frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}\Big|_{c_3, s_3}.$$

Это означает, что либо состояния 1 и 2 соединены непосредственно через контактный разрыв, либо к состоянию 1 примыкает ударная волна или волна разрежения. Первый случай возможен только при выполнении равенства $\varphi(c_1, s_1) = \varphi(c_2, s_2)$. Во втором случае в зависимости от начальных данных возможны два решения ((c_3, s_1) — промежуточное состояние):

1) $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (c_3, s_1)$;

2) $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{УВ}} (c_3, s_1)$.

В первом случае сравнение скоростей волны разрежения и контактного разрыва позволяет соединить состояние (c_3, s_1) с некоторым промежуточным состоянием (c_*, s_2), которое может являться конечным состоянием (c_2, s_2) или быть некоторым дополнительным промежуточным состоянием (см. рис. 3,*а*):

$$(c_3, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_{3'} < c_2, s_1) \xrightarrow{\text{УВ}} (c_2, s_2),$$

$$(c_3, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_{3'} > c_2, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (c_2, s_2).$$

Сравнение скоростей следующей волны (разрежения или ударной) и контактного разрыва показывает, что такое промежуточное состояние невозможно:

$$\text{УВ:} \qquad \varphi_3 < \frac{c_2\varphi_2 - c_{3'}\varphi_3}{c_2 - c_3'},$$
$$\text{ВР:} \qquad \varphi_3 < \frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}\Big|_{c_{3'}, s_2} = \frac{\sigma(s_2)}{[(1 - c_{3'})\sigma(s_2) + c_{3'}]^2} = \sigma(s_2)\varphi_3^2 \tag{20}$$

и $\varphi_3 = \varphi_2$.

Во втором случае, когда состояние (c_3, s_1) получено путем перехода через ударную волну, выполняется необходимое неравенство

$$\frac{c_3\varphi_3 - c_1\varphi_1}{c_3 - c_1} < \varphi_3.$$

В этом случае также невозможны дополнительные промежуточные состояния после ударного перехода и $\varphi_3 = \varphi_2$. В обоих случаях условие $\varphi_3 = \varphi_2$ однозначно определяет промежуточное состояние и тип решения. Кроме того, при определенном соотношении начальных данных возможно решение с c-волной (см. рис. 3,*в*):

$$(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (0, s_1) \xrightarrow{\text{ПВ}} (0, s_*) \xrightarrow{\text{КР}} (c_2, s_2).$$

При этом выполняются неравенства

$$\frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}\Big|_{c_1, s_1} > \frac{\partial\,(c\varphi)}{\partial c}\Big|_{0, s_1} = \frac{1}{\sigma(s_1)} > \frac{1}{\sigma(s_3)} = \varphi_3.$$

Промежуточное состояние s_3 определяется из условия $\varphi(0, s_3) - \varphi(c_2, s_2) = 0$.

Формирование решения зависит от отношения значений c_1 и c_3, определенного условием $\varphi(c_3, s_1) = \varphi(c_2, s_2)$. При $c_3 > 0$, $c_1 > c_3$ формируется решение с ударной волной, при $c_3 > 0$, $c_1 < c_3$ — решение с волной разрежения, при $c_3 < 0$ — решение с c-волной.

Теорема доказана.

В случае $s_1 > s_2$ решение описывается следующим образом.

Теорема 2. *Если начальные данные задачи о распаде произвольного разрыва* (9), (14) *таковы, что $s_1 > s_2$, то задача имеет единственное решение в одной из следующих конфигураций (рис. 4):*

IV. $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{ВР}} (c_3, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_2, s_2)$ при $c_3 \leqslant c_1$.

V. $(c_1, s_1) \xrightarrow{\text{УВ}} (c_3, s_1) \xrightarrow{\text{КР}} (c_2, s_2)$ при $c_3 > c_1$.

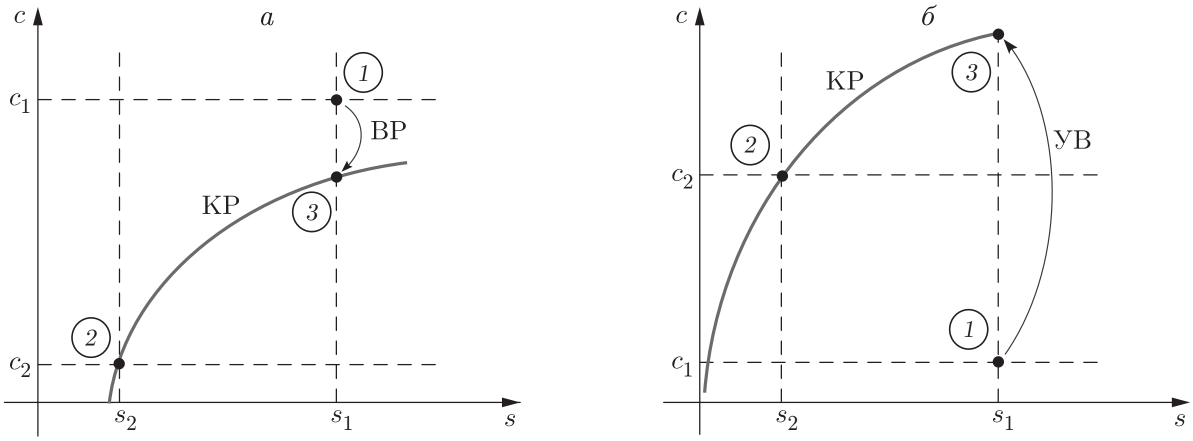

Рис. 4. Точное решение задачи о распаде разрыва, связывающее состояния *1* и *2* через состояние *3*, в случае $s_1 > s_2$ на плоскости (c, s) при различных начальных данных и комбинациях волн:
a — волна разрежения и контактный разрыв, *б* — ударная волна и контактный разрыв

Доказательство. Единственным возможным переходом в конечное состояние (c_2, s_2) является контактный разрыв. Переход в промежуточное состояние (c_3, s_1), определенное условием $\varphi(c_3, s_1) = \varphi(c_2, s_2)$, осуществляется через ударную волну при $c_1 < c_3$ и волну разрежения при $c_1 > c_3$. Решение с c-волной не реализуется, поскольку в этом решении s увеличивается. Теорема доказана.

Таким образом, задача о распаде разрыва имеет одну из пяти перечисленных выше возможных конфигураций I–V.

2.4. *Интерпретация решений.* Конфигурации решений на плоскости (x, t) показаны на рис. 5. В случае модели Коваля при $s = \text{const}$ возможны только два типа решения: волна разрежения и ударная волна. Волна разрежения получается при $c_1 < c_2$ и соответствует течению, в котором менее вязкая жидкость вытесняет более вязкую. В этом случае происходит образование "пальцев" на фронте вытеснения, что в осредненном течении соответствует волне разрежения для доли загрязненной жидкости c. В случае $c_1 > c_2$ ударная волна соответствует устойчивому вытеснению жидкости с меньшей вязкостью более вязкой жидкостью. В этом случае осредненная доля загрязненной жидкости испытывает скачок на фронте вытеснения.

Известно, что при неустойчивом вытеснении модель Коваля дает завышенную скорость распространения переднего фронта "пальцев". Чтобы привести это значение скорости в соответствие со значением, полученным при расчете по полной двумерной модели, в работе [19] предложено использовать бóльшую эффективную вязкость вместо истинной вязкости. В работе [23] путем сравнения результатов двумерного и одномерного расчетов неустойчивого вытеснения жидкостей подтверждена правомерность данного подхода.

В случае непостоянной концентрации s возможны дополнительные конфигурации. Например, в конфигурациях I, III (см. теорему 1), когда вытесняющая жидкость имеет бóльшую концентрацию песка по сравнению с вытесняемой жидкостью, возможен отрыв фронта передней области жидкости с малой концентрацией песка в силу большей подвижности менее вязкой жидкости. На заднем фронте передней области жидкости волна разрежения, как и прежде, соответствует развитию неустойчивости Саффмана — Тейлора. В случае конфигурации V образуется область с устойчивыми границами и увеличенной долей загрязненной жидкости в области вытеснения. Вытесняющая жидкость с меньшей концентрацией песка поступает в эту зону, что приводит к ее расширению с течением

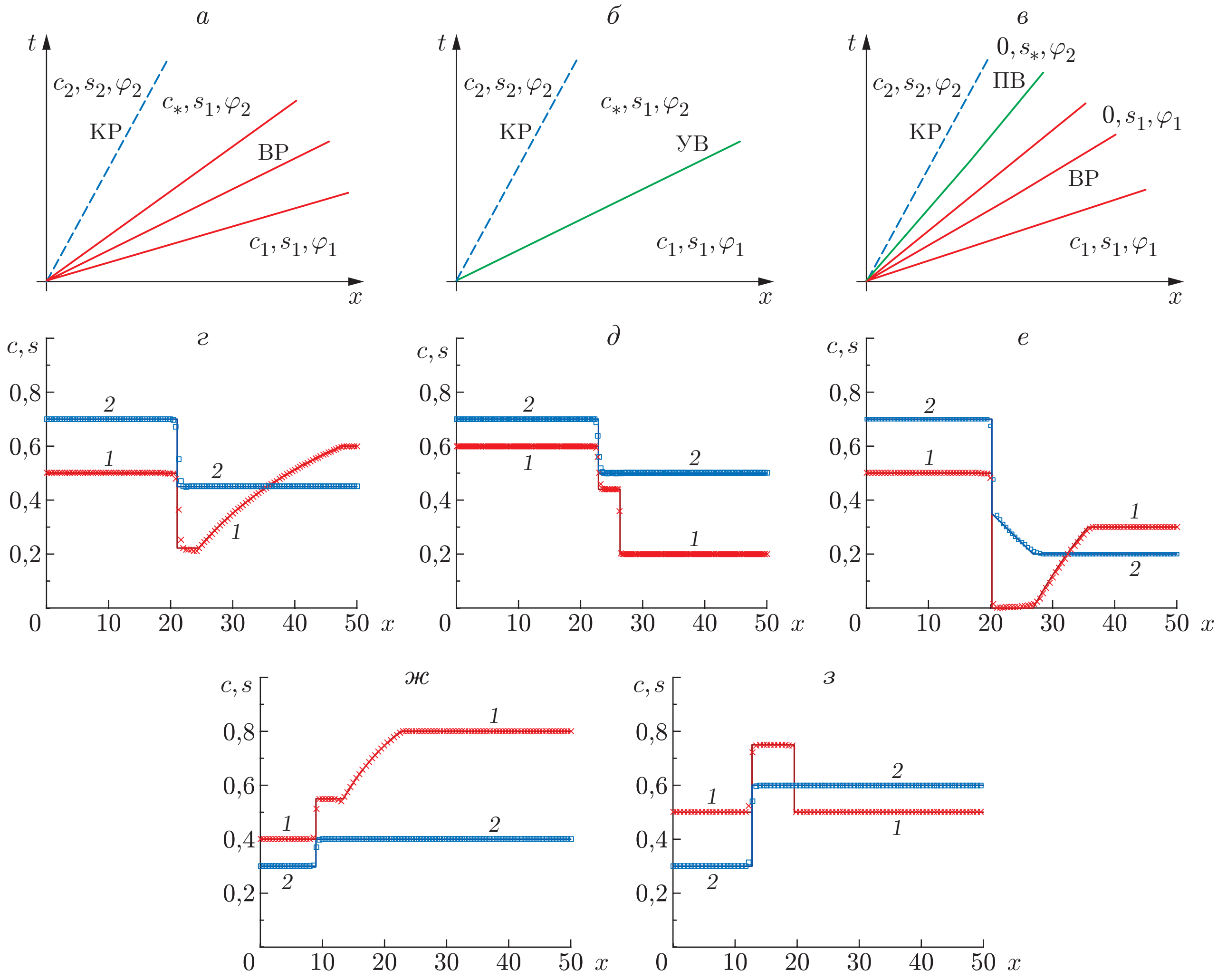

Рис. 5. Решения задачи о распаде разрыва:

а–*в* — конфигурации решения (*а* — типы I, IV, *б* — типы II, V, *в* — тип III), *г*–*з* — зависимости $c(x)$, $s(x)$ для различных конфигураций (сплошные линии — точное решение, точки — численное решение; *1* — функция c, *2* — функция s; *г* — тип I, *д* — тип II, *е* — тип III, *ж* — тип IV, *з* — тип V)

времени. Аналогичная ситуация в области вытеснения наблюдается в случае конфигурации IV. Конфигурация II является классической и соответствует случаю вытеснения менее вязкой жидкости более вязкой.

2.5. *Численные эксперименты.* Для численного решения задачи использовалась центральная схема второго порядка Ниссяху — Тэдмора [24]. На рис. 5 для каждой характерной конфигурации волн при распаде разрыва показаны точное решение системы (11) и результат численного расчета. Для численной реализации использовалась равномерная сетка с 300 узлами вдоль оси Ox. На рис. 5 видно, что точное и численное решения хорошо согласуются.

При исследовании оттока жидкости через стенки ячейки будем считать его постоянным по всей длине трещины и суммарно равным 0,1 объема закачиваемой жидкости. Средняя скорость течения u определяется путем интегрирования второго уравнения системы (9). Результаты численных экспериментов свидетельствуют об уменьшении в процессе движения доли загрязненной жидкости c и одновременном увеличении концентрации песка s в ней. При увеличении соотношения вязкостей чистой и загрязненной жидкостей $\sigma(s)$, обусловленном ростом концентрации s, замедляется распространение фронтов загрязненной жидкости.

Заключение. В работе предложена математическая модель, позволяющая в рамках одномерного приближения исследовать двумерное вытеснение двухфазной жидкости в ячейке Хеле-Шоу с проницаемыми стенками. В качестве физической модели рассматривается взаимодействие в ячейке чистой ньютоновской жидкости и суспензии жидкости с песком. Суспензия моделируется ньютоновской жидкостью, вязкость которой зависит от объемной концентрации песка. Отток чистой жидкости через стенки ячейки приводит к увеличению концентрации песка, вследствие чего увеличивается вязкость суспензии. Предложена осредненная одномерная модель данного процесса, учитывающая возможность развития неустойчивости Саффмана — Тейлора на фронте вытеснения более вязкой жидкости менее вязкой. Данная модель обобщает модель Коваля [19] и позволяет учитывать образование “пальцев” на фронте вытеснения с учетом увеличения концентрации одной из фаз вследствие оттока чистой жидкости через стенки ячейки.

Исследование задачи о распаде произвольного разрыва выявило наличие новых по сравнению с моделью Коваля конфигураций течения. В частности, вследствие различия концентраций вязкой жидкости возможны разрыв фронта между чистой и загрязненной жидкостями, контактные разрывы на заднем фронте загрязненной жидкости. Учет оттока жидкости через стенки ячейки и увеличение концентрации песка приводит к уменьшению скорости движения фронта загрязненной жидкости. Данную модель можно использовать для моделирования переноса проппанта при создании трещины гидроразрыва пласта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Saffman P. G., Taylor G.** The penetration of a fluid into a porous medium or a Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. P. 312–329.
2. **Homsy G. M.** Viscous fingering in porous media // Annual Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 271–311.
3. **Chevalier C., Amar M., Bonn D., Linder A.** Inertial effects on Saffman — Taylor viscous fingering // J. Fluid Mech. 2006. V. 552. P. 83–97.
4. **Dias E. O., Miranda J. A.** Influence of inertia on viscous fingering patterns: rectangular and radial flows // Phys. Rev. Ser. E. 2011. V. 83. 066312.
5. **Yuan Q., Azaiez J.** Inertial effects of miscible viscous fingering in a Hele-Shaw cell // Fluid Dynamics Res. 2015. V. 47. 015506.
6. **Gondret P., Rabaud M.** Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell // Phys. Fluids. 1997. V. 9. P. 3267–3274.
7. **Zvyagin A. V., Ivashnev O. E., Logvinov O. A.** Effect of small parameters on the structure of the front formed by unstable viscous-fluid displacement from a Hele-Shaw cell // Fluid Dynamics. 2007. V. 42, iss. 4. P. 518–527.
8. **Chesnokov A. A., Stepanova I. V.** Stability analysis of shear flows in a Hele-Shaw cell // Appl. Math. Comput. 2015. V. 265. P. 320–328.
9. **Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu.** Viscosity-stratified flow in a Hele-Shaw cell // Arxiv.org/abs/1501.00366, 2015.
10. **Al-Housseiny T. T., Tsai P. A., Stone H. A.** Control of interfacial instabilities using flow geometry // Natur. Phys. 2012. V. 8. P. 747–750.
11. **Pihler-Puzovic D., Perillat R., Russell M., et al.** Modelling the suppression of viscous fingering in elastic-walled Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. 2013. V. 731. P. 162–183.

12. **Dontsov E. V., Peirce A. P.** Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // J. Fluid Mech. 2014. V. 760. P. 567–590.
13. **Shelukhin V. V., Ružička M.** On Cosserat — Bingham fluids // Z. angew. Math. Mech. 2013. Bd 93, N 1. S. 57–72.
14. **Шелухин В. В., Неверов В. В.** Течение микрополярных и вязкопластических жидкостей в ячейке Хеле-Шоу // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 3–15.
15. **Economides M. J.** Reservoir stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte. Chichester: John Wiley and Sons, 2000.
16. **Кузькин В. А., Кривцов А. М., Линьков А. М.** Сравнительный анализ реологических свойств суспензий при компьютерном моделировании течений Пуазейля и Куэтта // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2014. № 6. С. 23–33.
17. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
18. **Мусхелишвилли Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
19. **Koval E. J.** A method for predicting the perfomance of unstable miscible displacement in heterogeneoud media // Soc. Petroleum Engrs J. 1963. V. 450. P. 145–154.
20. **Golovin S. V., Isaev V. I., Baikin A. N., et al.** Hydraulic fracture numerical model free of explicit tip tracking // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2015. V. 76. P. 174–181.
21. **Куликовский А. Г.** Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. М.: Моск. лицей, 1998.
22. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
23. **Booth R. J. S.** On the growth of the mixing zone in miscible viscous fingering // J. Fluid Mech. 2010. V. 655. P. 527–539.
24. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. P. 408–463.

Поступила в редакцию 1/XII 2015 г.