

УДК 532.59:533.951

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. И. Задорожный, Р. А. Грунтфест

Ростовский государственный университет, 344006 Ростов-на-Дону

Задача о свободных колебаниях находящегося в горизонтальном магнитном поле тонкого слоя тяжелой несжимаемой невязкой жидкости конечной электропроводимости сведена к системе интегродифференциальных уравнений типа Фредгольма с переменными коэффициентами. Проведен численный анализ в широком диапазоне входных параметров, полученные результаты дополнены асимптотическими формулами при больших и малых магнитных числах Рейнольдса. Предложена классификация возникающих волновых режимов. Доказана возможность появления при определенных условиях неустойчивых колебаний жидкого слоя, растущих во времени.

Магнитное поле существенно влияет на свободные колебания жидкости конечной электропроводимости, прежде всего, за счет диссипации кинетической энергии в джоулево тепло. Обзор литературы показал, что по этой теме имеются лишь отдельные работы (см., например, [1–3]). В гидродинамике волновых движений обычно используется два подхода — длинноволновые и коротковолновые приближения [4]. В коротковолновом приближении принимается модель жидкости бесконечной глубины, в длинноволновом — модель тонкого слоя. В данной работе проведено теоретическое и численное изучение спектра свободных колебаний в приближении тонкого слоя. Рассмотрены поверхностные и внутренние МГД-волны для невязкой тяжелой жидкости конечной электропроводимости при действии внешнего магнитного поля, индуцированного постоянным электрическим током. Приведены результаты расчетов и предложена классификация волновых режимов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим физическую модель, показанную на рис. 1 (ось z направлена вертикально вверх). В нижней полуплоскости $-\infty < z < -d$ расположена подложка (твердый диэлектрик). В верхней полуплоскости $0 < z < \infty$ — вакуум или неионизированный газ. В этих областях действуют горизонтальные магнитные поля постоянной напряженности H_i ($i = 1$ для вакуума, $i = 2$ для подложки). Слой $-d < z < 0$ занимает

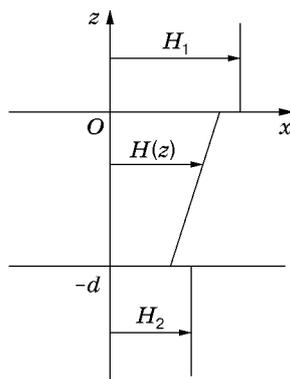


Рис. 1. Трехслойная модель вакуум — жидкость — подложка

невязкая электропроводная жидкость. Пусть на жидкость действуют сила тяжести и магнитное поле $H(z)$, направленное вдоль оси x . Такое магнитное поле может быть вызвано прохождением через жидкость электрического тока перпендикулярно плоскости Oxy . Согласно закону Ампера плотность этого тока $j = dH/dz$ (в системе СИ). Для постоянной по глубине слоя плотности тока имеем линейную зависимость напряженности магнитного поля от глубины $H(z) = H_0(1 - \gamma z/d)$, где H_0 — напряженность на свободной поверхности жидкости; $\gamma = -jd/H_0$. Предполагая течение жидкости плоским, введем вектор скорости $\mathbf{V} = (V_x, V_z)$ и возмущение напряженности магнитного поля $\mathbf{h} = (h_x, h_z)$, вызванное движением жидкости. Поскольку в дальнейшем рассматриваются собственные колебания жидкости, введем длину волны L , которую примем за характерный размер вдоль оси x . Параметр $\delta = d/L$ будем считать малым, что соответствует приближению тонкого слоя. В рамках этого приближения уравнения движения электропроводной жидкости в безразмерных переменных примут вид [2, 4]

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \text{Al} \left(H'(z)h_z - H(z) \frac{\partial h_z}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где $p^* = p + z + \text{Al} H^2(z)/2 + \text{Al} H(z)h_x$; p — гидродинамическое давление. Напряженность магнитного поля удовлетворяет уравнениям индукции и неразрывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} (H(z)V_z) + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial h_z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} (H(z)V_z) + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В (1), (2) $\text{Al} = \mu_c H_0^2 / (\rho g d)$ — число Альфвена; $\text{Re}_m = d^2 \mu_c \sigma \sqrt{g d} / L$ — магнитное число Рейнольдса; ρ , σ , μ_c — плотность, электропроводность и магнитная проницаемость жидкости; g — ускорение свободного падения; d — толщина слоя. Наведенные движением жидкости магнитные поля в областях вакуума и подложки удовлетворяют уравнениям Максвелла [2]

$$\frac{\partial^2 h_{ix}}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 h_{ix}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial h_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial h_{iz}}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Рассмотрим краевые условия. На границе раздела жидкость — подложка имеем равенство нулю вертикальной скорости жидкости, непрерывность нормальной проекции вектора магнитной индукции и касательной составляющей тензора магнитных напряжений:

$$V_z = 0, \quad \mu h_z = h_{2z}, \quad \mu = \mu_c / \mu_2, \quad \mu(1 + \gamma + h_x)h_z = (k_2 + h_{2x})h_{2z}, \quad z = -1,$$

где $k_2 = H_2/H_0$; μ_2 — магнитная проницаемость подложки. Для третьего условия возможны следующие случаи.

1. Равенство нулю нормальных проекций напряженности магнитного поля:

$$h_z = 0, \quad h_{2z} = 0, \quad z = -1. \quad (4)$$

Касательные проекции напряженности магнитного поля могут иметь разрыв, вызываемый существованием в жидкости граничного тока, который может иметь как постоянную, так и переменную составляющие. Если $k_2 = 1 + \gamma$, то постоянный ток отсутствует, в случае $h_{2x} = h_x$ исчезает переменная часть тока.

2. Равенство касательных проекций напряженности магнитного поля

$$h_x = h_{2x}. \quad (5)$$

Отметим, что свободные колебания возможны только при $k_2 = 1 + \gamma$. Уравнение границы раздела жидкость — вакуум представим в виде $z = \zeta(x, y, t)$. Здесь должны выполняться

кинематическое условие $\partial\zeta/\partial t = V_z$, $z = 0$, динамическое условие непрерывности нормальной составляющей тензора полных напряжений

$$-p + T_{nn} = -p_a + T_{1nn}, \quad z = 0 \quad (6)$$

($p_a = \text{const}$ — внешнее давление на поверхности), а также условия непрерывности нормальной проекции магнитной индукции и касательной составляющей тензора магнитных напряжений [2]

$$\mu\left(h_z - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = h_{1z} - k_1 \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad \mu = \frac{\mu_c}{\mu_1}, \quad \mu(1+h_x)\left(h_z - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = (k_1+h_{1x})\left(h_{1z} - k_1 \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \quad z = 0.$$

Здесь $k_1 = H_1/H_0$; μ_1 — магнитная проницаемость вакуума (значениям $\mu > 1$ соответствует намагничивающаяся жидкость [5]). Вновь возможны два случая:

1) равенство нулю нормальных проекций напряженности магнитного поля, при этом

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = h_x, \quad k_1 \frac{\partial\zeta}{\partial x} = h_{1x}; \quad (7)$$

2) равенство касательных проекций напряженности магнитного поля

$$h_x = h_{1x}, \quad k_1 = 1. \quad (8)$$

Условие (6) после подстановки выражений для нормальных составляющих тензора полных напряжений приводится к виду

$$p^* = p_a + Al/2 + Al h_{1x} + \zeta, \quad z = 0. \quad (9)$$

К краевым условиям следует также добавить требование затухания возмущений магнитных полей на бесконечности в областях вакуума и подложки

$$h_{ix} = 0, \quad h_{iz} = 0, \quad z \rightarrow \pm\infty \quad (i = 1, 2). \quad (10)$$

Для приложений в металлургии естественными являются условия (5), (8) непрерывности касательных составляющих напряженности магнитного поля на поверхности и на дне [2], поэтому именно они используются в приводимых расчетах. Другие сочетания граничных условий представляют теоретический интерес [3].

2. Разделение переменных и сведение к краевой задаче для интегродифференциальной системы уравнений. Все функции будем искать в виде $f(x, z, t) = F(z) \exp(-\lambda t + ix)$. Рассмотрим область подложки ($-\infty < z < -1$), полагая $(h_{2x}, h_{2z}) = (X_2(z), Z_2(z)) \exp(-\lambda t + ix)$. Используя уравнения (3) и условия затухания (10) для $i = 2$, нетрудно показать, что при малых δ (тонкий слой жидкости) $X_2(z) = O(\delta) = 0$, $Z_2(z) = Z_2(-1) \exp(\delta(z + 1))$. Отсюда с учетом граничного условия (4) получаем

$$h_{2x} = 0, \quad h_{2z} = 0. \quad (11)$$

Аналогично для вакуума ($0 < z < \infty$) введем $(h_{1x}, h_{1z}) = (X_1(z), Z_1(z)) \exp(-\lambda t + ix)$ и с учетом (3), (10) при $i = 1$ получим $X_1(z) = O(\delta) = 0$, $Z_1(z) = Z_1(0) \exp(-\delta z)$. Наконец, для жидкости введем обозначения $(h_x, h_z, V_x, V_z, \zeta, p) = (X(z), Z(z), U(z), W(z), S, P) \exp(-\lambda t + ix)$ и запишем уравнения индукции и движения (1),(2) в виде

$$\begin{aligned} -\lambda X(z) &= -\frac{\partial}{\partial z}(HW) + \frac{1}{\text{Re}_m} X''(z), & -\lambda Z(z) &= iH(z)W(z) + \frac{1}{\text{Re}_m} Z''(z), \\ -\lambda U(z) &= -iP + Al(ZH' - HZ'), & Z'(z) + iX(z) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

На дне ($z = -1$) для случая 1 граничного условия (4) имеем $W(-1) = 0$, $Z(-1) = 0$, поэтому из второго уравнения (12) следует $Z''(-1) = 0$. Продифференцируем по z третье уравнение (12), затем, положив $z = -1$, получим условие

$$U'(-1) = 0. \quad (13)$$

Для случая 2 условий на дне (5) из уравнений индукции (12) следует $Z'' = -\text{Re}_m \lambda Z$, $X'' = \text{Re}_m(1 + \gamma)W'$, $z = -1$. С учетом этих равенств третье уравнение (12) дает

$$\lambda U(-1) + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^0 U(z) dz + \frac{\gamma}{\text{Re}_m(1 + \gamma)} U'(-1) = 0. \quad (14)$$

На свободной поверхности ($z = 0$) для случая 1 условий (7) получаем

$$U'(0) = 0, \quad (15)$$

для случая 2 (см. (8)) справедливы равенства $\mu(Z - iS) = Z_1 - iS$, $Z' = 0$, $W = -\lambda S$ при $z = 0$. Отсюда с учетом уравнений (12) имеем

$$\lambda U(0) + \frac{1 + \text{Al}\gamma}{\lambda} \int_{-1}^0 U(z) dz + \frac{\gamma}{\text{Re}_m} U'(0) = 0. \quad (16)$$

Исключение P из третьего уравнения (12) с использованием (9) дает уравнение

$$\lambda U(z) + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^0 U(\xi) d\xi = \text{Al} H^2(z) \left(\frac{Z(z)}{H(z)} \right)'$$

Сделаем замену $\Phi(z) = (Z(z)/H(z))' = -(1/H(z))(iX(z) + \Gamma(z)Z(z))$, $\Gamma(z) = H'(z)/H(z)$. Функция $\Gamma(z)$ характеризует вертикальную стратификацию магнитного поля. Второе уравнение (12) разделим на $H(z)$ и продифференцируем по z . Учитывая при этом уравнение неразрывности, получим $U(z) + \lambda\Phi(z) + (1/\text{Re}_m)(Z''(z)/H(z))' = 0$. Дальнейшие преобразования связаны с исключением $Z(z)$ из последнего выражения. В результате для определения функций $U(z)$ и $\Phi(z)$ имеем систему однородных интегродифференциальных уравнений

$$\lambda U(z) + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^0 U(\xi) d\xi - \text{Al} H^2(z) \Phi(z) = 0, \quad (17)$$

$$\Phi''(z) + 2\Gamma(z)\Phi'(z) - 2\Gamma^2(z)\Phi(z) + \text{Re}_m(U(z) + \lambda\Phi(z)) = 0$$

и краевые условия на поверхности (15) или (16) и на дне (13) или (14). В дальнейшем, чтобы исключить появление особых точек (полюсов) в коэффициентах системы (17), считаем $\gamma > -1$. Следует отметить, что вхождение спектрального параметра λ в (17) имеет нелинейный характер.

3. Вывод уравнения баланса энергии. Обычно уравнение баланса энергии используют для доказательства теоремы о затухании свободных колебаний. Однако граничные условия (13)–(16) не всегда позволяют сделать это. Тем не менее вывод уравнения баланса энергии может быть полезен для получения некоторых оценок. Умножим третье уравнение (12) на $\bar{U}(z)$ (комплексно-сопряженную величину), запишем первое уравнение (12) в комплексно-сопряженном виде и умножим на $\text{Al} X(z)$. Затем проинтегрируем оба равенства по z в пределах $(-1, 0)$. Складывая результаты интегрирования, получим соотношение

$$\lambda \|U\|^2 + \bar{\lambda} \text{Al} \|X\|^2 - \frac{\text{Al}}{\text{Re}_m} \|X'\|^2 + \frac{1}{\lambda} |W(0)|^2 - \text{Al} \bar{\lambda} \gamma |Z(0)|^2 - \frac{\gamma \lambda}{\text{Re}_m} Z''(0)Z(0) = 0,$$

которое с учетом равенства $\|X\|^2 = \|H\Phi\|^2 - \gamma|Z(0)|^2$ принимает вид

$$\lambda\|U\|^2 + \bar{\lambda}Al\|H\Phi\|^2 - \frac{Al}{\text{Re}_m}\|X'\|^2 + \frac{1}{\lambda}|W(0)|^2 - \frac{\gamma\lambda}{\text{Re}_m}U'(0)Z(0) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, последнее внеинтегральное слагаемое отсутствует в следующих случаях:

1) внешнее магнитное поле в жидкости постоянно ($\gamma = 0$);

2) на свободной поверхности равны нулю нормальные компоненты напряженности магнитного поля: $U'(0) = 0$ (случай 1). При этом из формулы (18) после разделения действительных и мнимых частей следует неравенство $\text{Re}(\lambda) > 0$, означающее, что *все свободные колебания являются затухающими*. В остальных случаях (магнитное поле переменное, а на свободной поверхности выполняется равенство касательных проекций напряженности магнитного поля (случай 2)) внеинтегральное слагаемое в выражении (18) присутствует, что свидетельствует о возможности появления при определенных условиях неустойчивых режимов. Расчеты подтверждают их наличие при малых Re_m .

4. Выполнение расчетов и анализ результатов. Интегриродифференциальную систему уравнений (17) сведем к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем функции

$$V(z) = iW(z) = \int_{-1}^z U(\xi) d\xi, \quad \varphi(z) = H^2(z)\Phi(z), \quad \psi(z) = \varphi'(z).$$

Тогда система (17) примет вид

$$\begin{aligned} V' = U, \quad U' = \frac{\psi}{\lambda}, \quad \varphi' = \psi, \quad \psi' = -\frac{2\gamma}{H(z)}\psi - \widetilde{\text{Re}}_m(\tilde{\lambda}\varphi + H^2(z)U), \\ \widetilde{\text{Re}}_m = \text{Re}_m\sqrt{Al}, \quad \lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{Al}. \end{aligned} \quad (19)$$

В качестве граничных условий имеем любую парную комбинацию равенств (по одному на дне и свободной поверхности)

$$\begin{aligned} \psi(-1) = 0, \quad \tilde{\lambda}U(-1) + \frac{1}{\tilde{\lambda}Al}V(-1) + \frac{\gamma}{\widetilde{\text{Re}}_m\tilde{\lambda}(1+\gamma)}\psi(-1) = 0, \\ \psi(0) = 0, \quad \tilde{\lambda}U(0) + \frac{1+Al\gamma}{\tilde{\lambda}Al}V(0) + \frac{\gamma}{\widetilde{\text{Re}}_m\tilde{\lambda}}\psi(0) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

к которым следует добавить равенства

$$V(-1) = 0, \quad Al(\tilde{\lambda}U(0) - \varphi(0)) + V(0)/\tilde{\lambda} = 0. \quad (21)$$

Последнее граничное условие следует из первого уравнения системы (17) при $z = 0$. В дальнейшем знак “ \sim ” над соответствующими величинами опускаем. При интегрировании краевой задачи (19)–(21) спектральный параметр λ , а также все искомые собственные функции следует считать комплексными величинами и вводить для них действительные и мнимые части. В результате получим действительную систему восьмого порядка и 8 граничных условий. Численное решение этой системы с начальными условиями на дне ($z = -1$) проводилось методом Рунге — Кутты пятого порядка с относительной погрешностью порядка 10^{-6} . Выполнение граничных условий на поверхности ($z = 0$) и требование существования ненулевого решения дают сложную нелинейную систему относительно $\lambda = \alpha + i\beta$, для численного решения которой применялся метод Ньютона [6] с относительной погрешностью 10^{-4} . В расчетах использовались различные комбинации

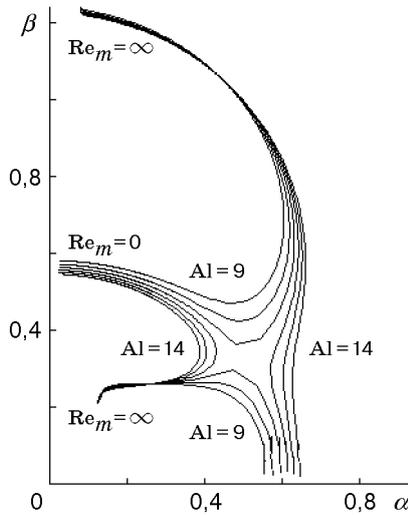


Рис. 2. Дисперсионные кривые в плоскости (α, β) при $\gamma = 0,4$ ($Al = 9, 10, \dots, 14$; $Al_1 = 11,5, Al_2 = 5,6$)

граничных условий. В данной работе, как отмечалось выше, выбраны условия непрерывности касательных проекций напряженности магнитного поля на дне и свободной поверхности, соответствующие процессам в металлургии. Гарантированная относительная погрешность расчета простых собственных чисел равна 10^{-4} .

Дисперсионная картина в комплексной плоскости λ при $\gamma = 0,4$ (напряженность внешнего магнитного поля нарастает от поверхности ко дну) и фиксированных числах Альфвена $Al = 9, 10, \dots, 14$ представлена на рис. 2. Можно выделить два режима колебаний, поведение которых при $Re_m \rightarrow \infty$ различно.

Первый режим (*высокочастотные гравитационные поверхностные волны*) характеризуется непрерывным предельным переходом к жидкости бесконечной проводимости, асимптотика которого строится методом Ломова [7] и имеет вид

$$\lambda = i\beta + \frac{1-i}{\sqrt{2Re_m}} \beta_1 + O\left(\frac{1}{Re_m}\right), \quad U(z) = \frac{\beta^2 - (1+\gamma)^2}{\beta^2 + (1-\gamma)^2},$$

$$\beta_1 = \frac{V(0)(U(0) - (1+\gamma Al)/(Al\beta^2)V(0) + 1/\sqrt{U(0)}(1-V(0)/(Al\beta^2)))}{Al\beta\sqrt{\beta - 1/\beta}(\|U\|^2 + \|HU\|^2/\beta^2 + V(0)/(Al\beta^2))},$$

где $U(z)$, β — собственные функция и значение вырожденной задачи ($Re_m = \infty$), причем β является бóльшим корнем дисперсионного уравнения

$$\left| \frac{(\beta-1)(\beta+1+\gamma)}{(\beta+1)(\beta-1-\gamma)} \right| = \exp(2Al\beta\gamma), \quad \beta > \max(1, 1+\gamma), \quad Al|\gamma| < 1. \quad (22)$$

Как следует из выражения для λ , первое приближение приводит к затуханию волн и уменьшению частоты их колебаний на величину декремента затухания. Для $Al < Al_1 = 11,5$ при убывании Re_m наблюдается максимум декремента затухания α и дальнейшее стремление его к нулю при $Re_m \rightarrow 0$ (незатухающие резонансные колебания). Если $Al > Al_1$, убыванию Re_m соответствуют рост декремента затухания и уменьшение частоты колебаний до нуля, затем возникает два аperiodических (неколебательных) движения жидкости. Максимальные амплитуды вертикальных смещений достигаются на поверхности жидкости.

Второй режим (*низкочастотные электромагнитные поверхностные волны*) (рис. 2) имеет нулевое предельное собственное значение при $Re_m \rightarrow \infty$ и асимптотику пограничного слоя вида

$$\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{(1+(1+\gamma)(1+Al\gamma))^2}{Re_m\sqrt{Al}(1+Al(1+\gamma))^2}} + O\left(\frac{1}{Re_m^{2/3}}\right).$$

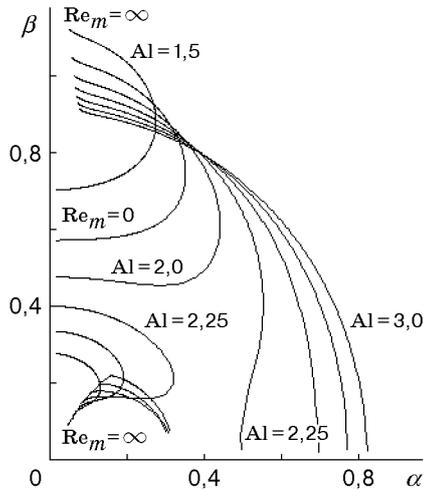


Рис. 3

Рис. 3. Дисперсионные кривые в плоскости (α, β) при $\gamma = -0,8$ ($Al = 1,5; 1,75; \dots; 3,0$; $Al_1 = 2,1, Al_2 = 3,1$)

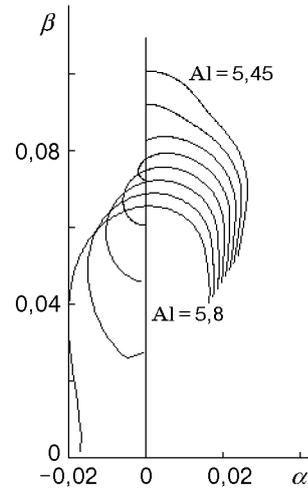


Рис. 4

Рис. 4. Появление неустойчивых режимов при $\gamma = -0,4$ ($Al = 5,45; 5,5; \dots; 5,8$; $Al_1 = 2,9, Al_2 = 5,6$)

Во втором режиме спектр обладает свойствами, аналогичными свойствам спектра в первом режиме, но при выполнении неравенства $Al < Al_1$. Такое сложное поведение дисперсионных кривых связано с существованием при $Al = Al_1$ и $Re_m = Re_{m1}$ двукратного комплексного собственного числа, через которое проходят сепаратрисы, разделяющие оба режима. Установлено, что поведение кратной моды определяется законом $(F_k^*(z) + tF_k(z)) \exp(-\lambda_k t)$, где $F_k(z), F_k^*(z)$ — собственная и присоединенная функции. Максимальные вертикальные смещения вновь имеют место на поверхности жидкости. Заметим, что аналогичная картина получена в [8] при $\gamma = 0$.

На рис. 3 показана дисперсионная картина при $\gamma = -0,8$ (напряженность магнитного поля убывает от поверхности ко дну) и фиксированных числах Альфвена $Al = 1,5; 1,75; \dots; 3,0$. Наблюдается два описанных выше режима колебаний, разделенных значением $Al_1 = 2,05$, но теперь появляются неустойчивые колебания с растущей амплитудой при $Al > Al_2 = 3,15$ и малых магнитных числах Рейнольдса. Более подробно неустойчивая область спектра показана на рис. 4. Здесь $\gamma = -0,4$, числа Альфвена $Al = 5,45; 5,5; \dots; 5,8$, а неустойчивость начинается при $Al > Al_2 = 5,6$.

В таблице приведены зависимости критических чисел Альфвена $Al_i(\gamma)$ ($i = 1$ соответствует двукратному комплексному собственному значению, $i = 2$ — началу неустойчивости).

Для приложений представляет интерес асимптотика всех режимов при $Re_m \rightarrow 0$ [1]. Построение такой асимптотики является нетривиальной математической задачей, поэтому в данной работе ограничимся приведением конечной формулы

$$\lambda = i\sqrt{\frac{1}{Al} + \frac{\gamma(\gamma + 3)}{6}} + O(Re_m),$$

справедливой при положительном подкоренном выражении. В противном случае имеет место неустойчивость. Расчет дисперсионных картин, представленных на рис. 3, 4 и в таблице, подтверждает этот результат, возможность получения которого обсуждалась при выводе уравнения баланса энергии.

γ	Al_1	Al_2
-0,8	2,05	3,15
-0,6	2,43	3,80
-0,4	2,95	5,60
-0,2	3,68	10,60
0	5,15	—
0,2	6,77	—
0,4	11,10	—
0,6	32,50	—

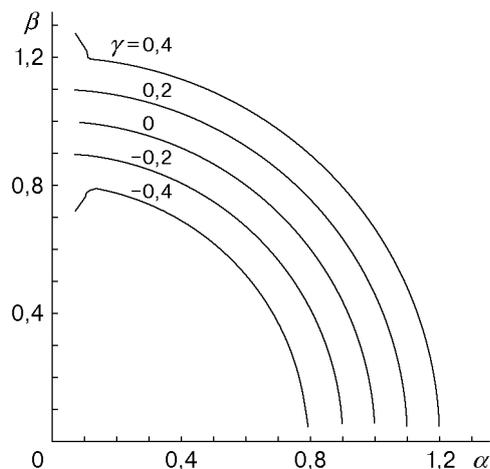


Рис. 5. Дисперсионные кривые в плоскости (α, β) для альфвеновских внутренних диссипативных волн ($\gamma = -0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4$)

Существует еще один тип колебаний, которые назовем *альфвеновскими внутренними диссипативными волнами* (рис. 5). Дисперсионные кривые здесь слабо зависят от Al и практически сливаются. Для данного значения Al имеем счетное число колебательных мод, которым соответствуют различные диапазоны значений Re_m . В точках M_k , расположенных на вещественной оси, происходит смена колебательного движения жидкости на два апериодических движения (двукратное действительное собственное значение). Им соответствует монотонно возрастающая последовательность чисел $Re_{m,k} \rightarrow \infty$. Для k -й моды имеем $Re_m > Re_{m,k}$, но все моды при $Re_m \rightarrow \infty$ имеют одну предельную точку (второй, меньший корень дисперсионного уравнения вырожденной задачи (22)). В окрестности предельной точки содержится конечное число собственных значений, которое может стать сколь угодно большим с увеличением Re_m . При достаточно больших числах Рейнольдса на глубине $z = (1 - \text{Im}(\lambda))/\gamma$ находится точка поворота дифференциального оператора, в окрестности которой поле скоростей претерпевает резкое изменение, вырождающееся в тангенциальный разрыв второго рода, имеющий место в бесконечно проводящей жидкости. Колебания жидкости во всех модах имеют характер внутренних волн, поскольку максимальные амплитуды расположены внутри слоя. Заметим, что эти волны хорошо описываются совместным приближением “твердой крышки” ($W(0) = 0$) и Буссинеска ($|\gamma| \ll 1, H = \text{const}$), что позволяет получить все результаты в аналитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирко И. М. Жидкий металл в электромагнитном поле. М.; Л.: Энергия, 1964.
2. Ладиков Ю. П., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. М.: Наука, 1983.
3. Баринов В. А., Тактаров Н. Г. Математическое моделирование магнитогиродинамических поверхностных волн. Саранск: Мордов. ун-т, 1991.
4. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка, 1976.
5. Фертман В. Е. Магнитные жидкости. Минск: Вышэйш. шк., 1988.
6. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979.

7. **Ломов С. А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
8. **Задорожный А. И.** О спектре одного интегродифференциального оператора, возникающего в теории длинных МГД-волн // Интегродифференциальные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Ростов н/Д: Издат. центр Дон. гос. техн. ун-та, 1997. Вып. 2. С. 79–88.

*Поступила в редакцию 9/II 1999 г.,
в окончательном варианте — 9/III 2000 г.*
