

**ВРАЩЕНИЕ ТОНКОГО, ОТВОДЯЩЕГО ТЕПЛО СТЕРЖНЯ В ВЯЗКО-  
ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

Э. А. Леонова (Москва)

Автомодельные решения осесимметричной задачи о вращении линейной вязко-пластической среды найдены в работах [1, 2]. Ниже приводится решение автомодельной задачи о течении с теплообменом теплопроводной вязко-пластической среды, для которой напряжение сдвига — функция скорости деформации сдвига и температуры.

В бесконечной среде, имеющей постоянную начальную температуру  $T_0$  и находящейся в состоянии покоя, вращается бесконечно длинный, неизменно связанный со средой цилиндр малого радиуса  $r_0$ . Через поверхность цилиндра происходит теплоотвод, так что количество тепла, отводимого цилиндром в единицу времени на единицу его длины, постоянно и равно  $Q_0$ . На бесконечности среда остается в покое и имеет температуру  $T_0$ .

Течение и распространение тепла в среде без учета диссипации энергии описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} + 2 \frac{\Phi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= 0, \quad \Phi = \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \frac{T}{T_0} \right) \\ \varepsilon &= -\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \quad (\varepsilon_0, T_0 = \text{const}) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v$  — скорость,  $T$  — температура,  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $a^2$  — коэффициент температуропроводности среды,  $\Phi$  — функция, задающая напряжение сдвига в зависимости от скорости деформации сдвига и температуры.

Начальные и граничные условия будут

$$T(r, 0) = T_0, \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left( -2\pi r_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) = Q_0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, t) = T_0 \quad (2)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v(r, t) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi \rho}{2} r_0^4 \omega \right) + 2\pi r_0^2 \Phi \right] = M_0 t \quad (4)$$

Условие (4) — закон движения цилиндра,  $\omega$  — угловая скорость,  $M_0 t$  — приложенный момент. Введем  $\tau_0(\theta)$  и  $\tau(\theta, \gamma)$  таким образом:

$$\Phi = \tau_s [\tau_0(\theta) + \tau(\theta, \gamma)], \quad \tau(0, \theta) = 0, \quad \theta = T/T_0, \quad \gamma = \varepsilon/\varepsilon_0 \quad (5)$$

Можно показать, что решение задачи (1) — (4) имеет вид

$$T = T_0 \theta(\xi), \quad v = a \varepsilon_0 t^{1/2} u(\xi), \quad \xi = r/2 a \sqrt{t}$$

Здесь безразмерные  $\theta(\xi)$  и  $u(\xi)$  находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \left( \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{du}{d\xi} + \frac{u}{\xi^2} \right) - 2 \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\xi} - 4 \frac{\tau}{\xi} + p \left( \xi \frac{du}{d\xi} - u \right) - 2 \frac{d\tau_0}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} - 4 \frac{\tau_0}{\xi} = 0 \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( -\frac{du}{d\xi} + \frac{u}{\xi} \right), \quad p = \frac{2\rho \varepsilon_0 a^2}{\tau_s}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \left( \frac{1}{\xi} + 2\xi \right) \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (7)$$

Интегрирование уравнения (7) с граничными условиями, соответствующими (2)

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} (\xi d\theta/d\xi) = -2Q, \quad Q = Q_0/4\pi\lambda T_0$$

дает поле температур

$$\theta(\xi) = 1 - Q \operatorname{Ei}(-\xi^2), \quad \operatorname{Ei}(-z) = -\int_z^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz < 0 \quad \text{при } 0 < z < \infty \quad (8)$$

Теперь задача приводится к отысканию решения системы (6). Введем функцию  $F$  из (5):  $\gamma = F(\tau, \theta)$ . Это позволит привести (6) к виду

$$\frac{d\tau}{d\xi} + 2 \frac{\tau}{\xi} + p\xi F(\tau, \theta) + \frac{d\tau_0}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} + 2 \frac{\tau_0}{\xi} = 0 \quad (9)$$

$$du/d\xi - u/\xi + 2F(\tau, \theta) = 0 \quad (10)$$

Иследуем уравнение (9) для охлаждения среды цилиндром ( $Q < 0$ ); содержащийся в рассматриваемом решении случай нагрева может быть легко получен. На плоскости  $\xi\tau$  в области  $\xi \geq 0, \tau \geq 0$ , определяемой условиями задачи, через каждую точку проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (9), за исключением двух особых точек, расположенных в бесконечно удаленной части плоскости у осей координат. В случае ненулевого предела текучести  $\tau_0(\theta)$  все кривые пересекают ось  $\xi$  в конечных точках под определенным углом, в особую точку  $(\infty, 0)$  из конечной части плоскости не выходит ни одной интегральной кривой. При  $\tau_0(\theta) \equiv 0$  все кривые входят в эту точку; точка  $(0, 0)$  — особая, типа седла, оси  $\xi = 0, \tau = 0$  — интегральные кривые. Представляет интерес изучение поведения решения для часто предлагаемого экспериментально  $\tau_0(\theta) = B \exp(-\kappa_0\theta)$  и  $F(\tau, \theta)$ , возрастающей при больших  $\tau$  как  $F(\tau, \theta) = A \exp(\kappa_1\theta)\tau^N$  ( $\kappa_0, \kappa_1 > 0, N > 1$ ), в дальнейшем считаем  $B \neq 0$ . Ход интегральных кривых вблизи оси  $\tau$  существенно образом зависит от входящих в уравнение параметров. В зависимости от значений параметров выявляются следующие два существенно различных случая расположения интегральных кривых.

(1) Случай  $1 + \kappa_0 Q \geq 0$ .

Все интегральные кривые разбиваются на два класса. Кривые, принадлежащие первому классу, имеют вертикальные асимптоты. Второй класс при условии  $N < 2 - \kappa_1 Q$  представляет собой пучок монотонно убывающих кривых, которые при  $\xi \rightarrow 0$  ведут себя следующим образом:

$$\tau = E\xi^{-2} + o(\xi^{-2}), \quad E > 0 \quad (11)$$

Кривая  $\Omega$ , разделяющая эти классы, уходит в бесконечность при  $\xi \rightarrow 0$ , так что

$$\tau = D_1\xi^{-\nu_1} + o(\xi^{-\nu_1}), \quad \nu_1 = 2 \frac{1 - \kappa_1 Q}{N - 1}$$

$$D_1 = \left[ 2 \frac{2 - \kappa_1 Q - N}{(N - 1) A p} \right]^{1/(N-1)} \exp\left(\kappa_1 \frac{Qb - 1}{N - 1}\right) \quad (12)$$

( $b = 0.5772 \dots$ )

Если же  $N \geq 2 - \kappa_1 Q$ , то второй класс отсутствует, все кривые принадлежат первому классу.

(2) Случай  $1 + \kappa_0 Q < 0$ .

Имеются также два класса. Интегральные кривые первого класса ведут себя аналогично соответствующим кривым в первом случае. Кривые второго класса начинаются в конечных точках оси  $\xi$ , с увеличением  $\xi$  возрастают, проходят через максимум, затем убывают. Для разделяющей кривой  $\Omega$ , уходящей в бесконечность при  $\xi \rightarrow 0$ , имеет место либо соотношение (12) при  $-N\kappa_0 Q < 1 - \kappa_0 Q - \kappa_1 Q$ , либо

$$\tau = D_2\xi^{-\nu_2} + o(\xi^{-\nu_2}), \quad \nu_2 = 2 \frac{1 - \kappa_0 Q - \kappa_1 Q}{N} \quad (13)$$

$$D_2 = \left[ -\frac{(1 + \kappa_0 Q) B}{pA} \right]^{1/N} \exp\left[\frac{(\kappa_0 + \kappa_1)(Qb - 1)}{N}\right]$$

при  $-N\kappa_0 Q > 1 - \kappa_1 Q - \kappa_0 Q$ .

Поле интегральных кривых изображено на фиг. 1.

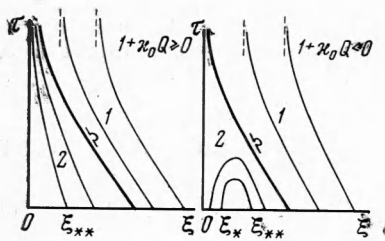
Перейдем к выяснению возможностей удовлетворения граничным условиям (3) и (4). Условия (3) требуют

$$\lim \tau = 0, \quad \lim u = 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow 0 \quad (14)$$

Легко видеть, что первое удовлетворяется для всех интегральных кривых. Каждой из них можно поставить в соответствие  $u(\xi)$ , интегрируя (10). При этом оказывается возможным удовлетворить второму условию (14)

$$u = 2\xi \int_{\xi}^{\xi^{**}} \frac{F(\tau, \theta)}{\xi} d\xi \quad (15)$$

где  $\xi^{**}$  — точка пересечения интегральной кривой с осью абсцисс (фиг. 1).



Фиг. 1

Переходя к (4), видим, что функции, представляемые интегральными кривыми первого класса, ему не удовлетворяют. Действительно, каждая такая кривая расположена в области  $\xi > \xi^0$  ( $\xi^0$  — ее асимптота). Допущение же, что часть среды, прилегающая к цилиндру, движется с ним как твердое тело, приводит к необходимости выполнения условия

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi^0} \left[ \frac{1}{2} p \xi^3 u(\xi) + \xi^2 \tau_0(\theta) + \xi^2 \tau \right] = M, \quad M = \frac{M_0}{8\pi a^2 \tau_0} \quad (16)$$

которое для кривых первого класса вследствие того, что  $\tau \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow \xi^0$ , а все члены положительны, нарушается.

Для кривых  $\Omega$  из (12) и (13) имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 (\tau_0(\theta) + \tau) = +\infty \quad \text{при } \xi \rightarrow 0$$

Отсюда следует, что условие (4), приводящееся к виду

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} [(1/4) p \xi^4 F(\tau, \theta) + \xi^2 \tau_0(\theta) + \xi^2 \tau] = M \quad \text{при } \xi \rightarrow 0 \quad (17)$$

не удовлетворяется. Для кривых класса 2 в случае (1) имеет место

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^4 F(\tau, \theta) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \tau(\xi) = c, \quad 0 < c < \infty$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \tau_0(\theta) \xi^2 = \begin{cases} B \exp[-\kappa_0(1+Qb)] & \text{при } 1 + \kappa_0 Q = 0 \\ 0 & \text{при } 1 + \kappa_0 Q > 0 \end{cases}$$

Следовательно, каждому значению  $0 < M < \infty$  соответствует одна и только одна кривая. Каждая кривая второго класса дает единственное решение поставленной задачи.

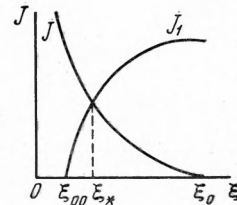
В случае (2) для кривых второго класса условие (4) может выполняться только в виде (16). Для интегральной кривой, выходящей из какой-либо точки  $\xi_*$  оси  $\xi$ , для которой  $(d\tau/d\xi)_{\xi_*} > 0$ , из (16) и (15) имеем

$$p \int_{\xi_*}^{\xi_{**}(\xi_*)} \frac{F(\tau, \theta)}{\xi} d\xi = \frac{M - \tau_0(\xi_*) \xi_*^2}{\xi_*^4} \quad (18)$$

Можно показать, что если  $M < \tau_0(\xi_0) \xi_0^2$ ,  $\xi_0^2 = \ln(-\kappa_0 Q)$ , то уравнение не имеет решения, так как для любого  $\xi_*$  будет  $\tau_0(\xi_*) \xi_*^2 > \tau_0(\xi_0) \xi_0^2$ . Если же

$$M > \tau_0(\xi_0) \xi_0^2 \quad (19)$$

то для любого  $M$ , удовлетворяющего этому условию, имеется единственный корень  $\xi_*$  уравнения (18), причем  $\xi_{00} < \xi_* < \xi_0$ , где  $\xi_{00}$  — решение уравнения  $\tau_0(\xi) \xi^2 = M$ . Действительно, представленные на фиг. 2 графики функций



Фиг. 2

$$J(\xi) = \int_{\xi}^{\xi_{**}(\xi)} \frac{F(\tau, \theta)}{\xi} d\xi, \quad J_1(\xi) = \frac{M - \xi^2 \tau_0(\xi)}{\xi^4}$$

доказывают это. Таким образом, в указанном случае каждому значению  $M$ , ограниченному условием (19), соответствует одна и только одна интегральная кривая уравнения (9), принадлежащая второму классу и дающая единственное решение поставленной задачи. После того как распределение напряжений найдено, поле скоростей определяется выражением (15).

Итак, в зависимости от свойств среды и значений внешних воздействий могут осуществляться два различных вида движения. В случае (1), соответствующем для заданной среды относительно небольшой интенсивности охлаждения, течение возникает непосредственно у стержня при любом значении внешнего момента, зона течения увеличивается со временем, постоянно примыкая к стержню; либо отсутствует область среды, отличная от самого стержня, вовлеченная в движение. В случае (2), отвечающем интенсивному теплоотводу, течение возникает при условии, если внешний момент превосходит некоторое значение. На стержне образуется жесткий слой, нарастающий со временем по закону  $r_*(t) = 2a\xi_* \sqrt{t}$ . При этом растущий стержень вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 1/2 \varepsilon_0 u(\xi_*)/\xi_*$ .

Полученное решение дает возможность определить параметры предела текучести среды по значениям количества тепла, отводимого в единицу времени, и приложенного момента. Отмечая значение  $Q = Q_*$ , при котором на стержне впервые появляется жесткий слой, получаем параметр

$$\kappa_0 = 1/Q_*$$

Затем, измеряя в условиях  $1 + \kappa_0 Q < 0$  минимальный момент  $M_{\min}$ , способный вызвать течение, находим

$$B = \frac{M_{\min}}{\Gamma \pi (-\kappa_0 Q)} \exp [-\kappa_0 Q \operatorname{Ei}(-\ln(-\kappa_0 Q)) + \kappa_0]$$

Поступила 17 IX 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гурбанов С. Г., Мирзаджанзаде А. Х. Об одном автомодельном решении задачи о вращении круглого цилиндра в вязко-пластичной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 11.
2. Finzi. Atti Accad. Naz. Lincei, 1936, vol. 23, No. 10.

### О ЗАТУХАНИИ В АЛЮМИНИИ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН, ВЫЗВАННЫХ УДАРОМ

*И. В. Белинский, Б. Д. Христофоров*  
(Москва)

Ниже приведены экспериментальные данные о затухании в алюминии плоской ударной волны, вызванной ударом (разогнанной продуктами взрыва до скорости 5.9 км/сек) тонкой алюминиевой пластины, и расчет этой задачи в квазиакустическом приближении. Измерения проводились в диапазоне относительных расстояний от границы соударения  $6 \leq X/\Delta \leq 190$ , где  $X$  — расстояние, пройденное ударной волной,  $\Delta$  — толщина ударника.

1. В опытах использовались образцы из алюминия АД-1 диаметром 70 мм и толщиной от 3 до 15 мм и ударники из алюминиевой фольги диаметром 60 мм и толщиной 0.08, 0.13, 0.6 мм. Ударники толщиной 0.6 мм, запрессованные в латунные кольца той же толщины, разгонялись зарядом из сплава тротила с гексогеном (ТГ-50/50), толщиной 25 мм и диаметром 60 мм. В качестве генераторов плоской ударной волны применялись взрывные линзы из ТГ 50/50 с наполнителем из баритола. При разгоне пластинок толщиной 0.08 и 0.13 мм взрывная линза и основной заряд из литого ТГ 50/50 толщиной 12.5 мм отделялись от разгонявшего пластину заряда из прессованного ТГ 50/50 толщиной 3 мм латунным экраном толщиной 3 мм. Введение экрана позволило отсеять продукты взрыва основного заряда и линзы и уменьшить давление продуктов взрыва за ударником в момент соударения до 60 кбар. Ударная волна, проходящая через экран, имела достаточную интенсивность для возбуждения детонации в 3-мм заряде за время  $\sim 10^{-7}$  сек. Экран ударял по образцу через 7.5 мксек после ударника и поэтому не искажал результатов измерений.

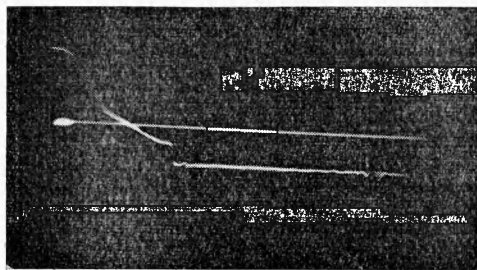
Искривление и перекося ударника при соударении с образцом не превышали 0.6 мм на диаметре 50 мм, а его скорость равнялась  $5.9 \pm 0.2$  км/сек.

В опытах непосредственно измерялась скорость  $w$  свободной поверхности образцов электроконтактным и емкостным методами [1,2]. При определении параметров фронта ударной волны по результатам измерений предполагалось, что скорость свободной поверхности равна удвоенной массовой скорости вещества на фронте.

Сигнал от емкостного датчика подавался на осциллограф ОК-17М, входное сопротивление  $R$  которого равнялось волновому сопротивлению кабеля.

Проведенный анализ работы емкостного датчика показал, что в этом случае скорость свободной поверхности определяется формулой

$$w = \frac{V(t)h}{ERC} \left( 1 - \int_0^t \frac{w dt}{h} \right)^2 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь  $V(t)$  — выходное напряжение датчика,  $E$  — э. д. с. источника питания,  $h$  и  $C$  — зазор и емкость измерительного конденсатора соответственно.