УДК 519.624.3+519.632.6+519.642

Итерационная схема нахождения спектра от произведения двух некоммутативных операторов

В.И. Тараканов, С.А. Лысенкова, М.В. Нестеренко

Сургутский государственный университет, пр. Ленина, 1, г. Сургут, Тюменская обл., ХМАО-Югра, 628400
E-mails: sprtdv@mail.ru (Тараканов В.И.), lsa1108@mail.ru (Лысенкова С.А.), chernaya@gmail.com (Нестеренко М.В.)

Тараканов В.И., Лысенкова С.А., Нестеренко М.В. Итерационная схема нахождения спектра от произведения двух некоммутативных операторов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 411–427.

Рассматриваются спектральные свойства и итерационная схема нахождения спектра от произведения двух некоммутативных частично симметричных операторов в гильбертовом пространстве H, при этом предполагается, что один из операторов является компактным, а второй не обязательно компактным и даже ограниченным в H, но их произведение является компактным в H. Приводится численная реализация итерационной схемы для нахождения спектра оператора при численном решении задачи о собственных колебаниях балки Релея.

Ключевые слова: *оператор, спектр, итерационный алгоритм.*

Tarakanov V.I., Lysenkova S.A., Nesterenko M.V. Iterative scheme of finding a spectrum of the product of two non-commutative operators // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 4. — P. 411–427.

We consider spectral features and an iterative scheme of finding a spectrum of the product of two non-commutative partially symmetric operators in the Hilbert space H. In this case it is assumed that one of operators is compact, the second not necessarily being compact and even restricted in H. Numerical implementation of the iterative scheme for finding the operator spectrum of the problem of eigen-oscillations of the Rayleigh beam is presented.

Key words: *operator, spectrum, iterative algorithm.*

1. Введение

Теория соответствующих спектральных уравнений является обобщением теории самосопряженных компактных операторов, разработанной в начале XX века в работах Д. Гильберта (1906), В. Шмидта (1907), Ф. Рисса (1910), Г. Вейля (1911), Р. Куранта (1920), О. Келлога (1922) [1].

О. Келлогом была получена итерационная схема нахождения спектральных параметров, излагаемая практически без изменений и в настоящее время [2, 3].

Итерационная схема О. Келлога была разработана в докомпьютерную эпоху и имеет недостаток в практических расчетах при компьютерной реализации.

Дальнейшее обобщение некоторых результатов было сделано в работе [4], где рассматривается не самосопряженный оператор, а частично симметричный, т. е. симметричный на некотором подмножестве в H, а также оператор, являющийся линейной комбинацией компактного и единичного операторов. Конечно, эта линейная комбинация не является компактным оператором.

Для этих операторов была предложена итерационная схема нахождения спектра в виде:

$$\tau_{k+1} y_{k+1} = A y_k, \quad y_1 = h \in H, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

$$\tau_{k+1} = \|A y_k\| \,/\, \|y_k\|, \tag{2}$$

и доказана сходимость этой схемы в случае положительности оператора A к решению спектральной задачи

$$\lambda y = A y, \tag{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \lambda_1, \quad \lim_{k\to\infty} \|y_k - y\| = 0, \tag{4}$$

где λ_1 — наибольшее собственное число. Итерационная схема (1)–(3) является модификацией схемы Келлога, устраняющей ее недостатки при численных расчетах. Итерационная схема (1), (2), естественно, применима и для численных расчетов спектра классических компактных самосопряженных операторов.

В [5] эта схема использовалась при решении прикладных задач с целью селективного анализа спектра, например, нахождения спектрального параметра, ближайшего к некоторому заданному числу.

В работе [4] был сделан переход от исследования спектральных свойств оператора A к исследованию спектральных свойств операторного пучка

$$y = F y + \lambda A y, \tag{5}$$

где F, A — частично симметричные операторы: A — положительный, F — ограниченный ($\|F\| < 1$).

При этом была получена итерационная схема, сходимость которой доказана в [4], а численная апробация проведена и приведена в работах [6–9] на решениях прикладных задач:

$$y_{k+1} = F y_k + \tau_{k+1} A y_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad y_1 = Ah, \ h \in H, \tag{6}$$

$$\tau_{k+1} = \|A y_k\|^{-2} \Big(-(F y_k, A y_k) \pm \sqrt{(F y_k, A y_k)^2 + \|A y_k\|^2 \big(\|y_k\|^2 - \|F y_k\|^2\big)} \Big), \tag{7}$$

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \lambda, \quad \lim_{k\to\infty} \|y_k - y\| = 0. \tag{8}$$

Целью данной работы является исследование спектра операторного уравнения

$$\lambda y = B A y, \tag{9}$$

где A — компактный положительный частично симметричный оператор, $\mathrm{Ker} A = 0$; B — частично симметричный оператор, но его компактность и даже ограниченность в H не предполагается, т. е. B в общем случае не частично симметричный, а симметрический оператор, $\mathrm{Ker} B = 0$.

Операторы B и A некоммутативны, произведение BA является компактным оператором и отображает $H \to E \subseteq H$, а произведение BAB является ограниченным оператором.

Для исследования спектральных свойств уравнения (9) и для численного нахождения спектра предлагается итерационный алгоритм

$$\tau_{k+1} y_{k+1} = B A y_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad y_1 = h \in H, \tag{10}$$

$$\tau_{k+1} = (B A y_k, A B A y_k)^{1/2} (y_k, A y_k)^{-1/2}, \tag{11}$$

и доказывается его сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \tau_{k+1} = \lambda, \qquad \lim_{k\to\infty} \left\| A^{1/2} y_k - A^{1/2} y \right\| = 0,$$

где y — решение уравнения (9).

Проводится численная апробация этого алгоритма при решении прикладной задачи о собственных частотах колебаний балки Релея.

2. Теоретические результаты

Предварительно уточним понятие частично симметричного оператора, которое было введено в [4, 5] следующим образом.

Под частично симметричным оператором в гильбертовом пространстве H понимается оператор A, имеющий свойства:

- $R(A) \subseteq E, \quad E \subset H,$ (12)
- $(u, Av) = (v, Au) \quad \forall\, u, v \in E,$ (13)
- $\forall\, u \in H \backslash E \quad \exists v \in E : (u, Av) \neq (v, Au),$ (14)

где $R(A)$ — множество значений оператора A.

В данном определении проверка условия (14) является достаточно сложной и громоздкой процедурой. Этого можно избежать, если уточнить определение множества E следующим образом:

$$E = \{u \mid u \in L_2(0,1),\ (u, f_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{15}$$

где f_i — некоторые взаимно ортогональные элементы, получаемые из постановки задачи в операторной форме. Например, если исходная спектральная задача имеет дифференциальную форму, то соотношение $(u, f_i) = 0$ является эквивалентом краевых условий.

Утверждение 1. Если множество E задается в форме (15), $\mathrm{Ker}A = 0$ и хотя бы для одного элемента $\|f_i\| \neq 0$, то тогда условие (14) выполняется, в противном случае оператор A является самосопряженным.

Доказательство. Возьмем в (14) в качестве u выражение $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\right) \in H\backslash E$, а за v выражение $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A f_i\right) \in E$. Тогда в силу (15) выполняется

$$(u, Av) - (v, Au) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i,\ A\sum_{i=1}^n \alpha_i A f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A f_i,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i A f_i\right) = -\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i A f_i \right\|^2 \neq 0,$$

где α_i — произвольные константы. □

Замечание 1. В математической литературе [10, 11] используется термин симметрический оператор. Между терминами частично симметричный оператор и симметрический оператор имеется следующая разница. Частично симметричный оператор является компактным в H и симметричным на некотором подмножестве H, и для него существует сопряженный оператор, также определенный на всем H [10, 11]. Симметрический оператор также определен на некотором подмножестве H, где он симметричен, но сопряженный к нему оператор определен в более широком функциональном пространстве, чем H.

Как правило, к симметрическим операторам относятся дифференциальные операторы, а к частично симметричным интегральные операторы.

Принципиальное отличие дифференциальных операторов от интегральных операторов заключается в том, что у дифференциальных операторов область значений оператора $R(A)$ шире области определения оператора $D(A)$: $D(A) \subset R(A)$, а у интегральных операторов существует обратное соотношение, когда область определения шире области значений $R(A) \subset D(A)$.

Именно с этим связано отличие определения симметрического оператора от определения частично симметричного.

Область симметричности у симметрического оператора связана с областью задания оператора $D(A)$ [10, с. 217], а у частично симметричного оператора связана с областью значений оператора $R(A)$ соотношением (12). Однако и в том, и в другом случае, когда область симметричности оператора A совпадает с областью симметричности сопряженного оператора A^*, оператор A является самосопряженным [10, с. 190; 11, с. 204].

Если оператор A не самосопряженный, а симметрический, то область задания сопряженного оператора $D(A^*)$ выходит за пределы гильбертова пространства H и выполняется вложение $H \subset D(A^*)$. При этом возникает необходимость построения самосопряженного расширения оператора A [10, с. 218].

Для частично симметричного оператора этой необходимости нет, так как выполняется вложение $D(A^*) \subset H$.

И в этом состоит одно из преимуществ сведения задач к задачам с интегральными операторами. А главное преимущество заключается в том, что интегральные операторы, не являющиеся сингулярными, являются компактными операторами, а дифференциальные операторы компактными не являются. Условие компактности оператора является главным условием сходимости всех итерационных алгоритмов, рассмотренных в [4]. Именно по этой причине в работах [4–9] при исследовании и решении прикладных задач делается переход от постановки задач с дифференциальными операторами к задачам с интегральными операторами.

Утверждение 2. Если A компактный частично симметричный оператор в H, симметричный и положительный на некотором множестве $E \subset H$, то существует линейный оператор $A^{1/2}$, связанный с оператором A соотношением $A = A^{1/2} \cdot A^{1/2}$, который называется квадратным корнем из оператора A на множестве E, при этом выполняется

$$(u, A^{1/2}v) = (v, A^{1/2}u) \quad \forall\, u, v \in E, \tag{16}$$

$$(u, A^{1/2}u) > 0 \quad \forall\, u \in E. \tag{17}$$

Доказательство. Оператор $A^{1/2}$ — компактный. Компактность $A^{1/2}$ вытекает из того, что $A^{1/2}$ — ограниченный оператор и A — компактный оператор. В пространстве H рассмотрим операторы $P = \frac{1}{2}(A + A^*)$ и $Q = \frac{1}{2}(A - A^*)$, где A^* — сопряженный к A оператор. Операторы P и Q также являются компактными в H, и можно проверить, что P — симметричный в H, а Q — антисимметричный в H:

$$(u, Pv) = (v, Pu) \quad \forall\, u, v \in H, \qquad (u, Qv) = -(v, Qu) \quad \forall\, u, v \in H. \tag{18}$$

На основе операторов P и Q можно сконструировать вспомогательный оператор R, который также является компактным в H: $R = P^2 - Q^2 + PQ - QP$. Непосредственно проверяется, что оператор R симметричен и положителен в H:

$$(u, Rv) = (v, Ru) \ \ \forall\, u, v \in H, \qquad (u, Ru) > 0 \ \ \forall\, u \in H.$$

Тогда на основании теоремы о квадратном корне из оператора [10, 11] существует квадратный корень из оператора R: $R^{1/2}$. Оператор $R^{1/2}$ также компактный симметричный положительный в H, и тогда существует корень квадратный из него, который обозначим $R^{1/4}$ и который также компактный симметричный и положительный в H:

$$(v, R^{1/4}u) = (u, R^{1/4}v) \ \ \forall\, u, v \in H, \qquad (u, R^{1/4}u) > 0 \ \ \forall\, u \in H. \tag{19}$$

На множестве $E \subset H$ выполняются соотношения:

$$A^* = A, \quad Q = 0, \quad P = A, \quad R = A^2, \tag{20}$$

поэтому

$$R^{1/4}u\,|_{u\in E} = A^{1/2}u\,|_{u\in E} \tag{21}$$

и выполняется

$$(u, A^{1/2}v) = (v, A^{1/2}u) \quad \forall\, u, v \in E \subset H, \qquad (u, A^{1/2}u) > 0 \quad \forall\, u \in E \subset H. \tag{22}$$

□

Теорема 1. *Спектральное уравнение* (9) *имеет, по крайней мере, одно собственное число* λ *и собственный элемент* y. *Итерационная схема* (10), (11) *сходится к решению спектрального уравнения* (9) *в смысле*

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \lambda, \quad \lim_{k\to\infty} \left\| A^{1/2}\,(y_k - y)\,\right\| = 0, \tag{23}$$

при этом выполняется

$$\tau_{k+1} > \tau_k, \quad (y_k, Ay_k) = (y_{k+1}, Ay_{k+1}) = \mathrm{const} \quad \forall\, k > 1. \tag{24}$$

Доказательство. Помимо итерационной схемы (10), (11) рассмотрим связанную с ней итерационную схему

$$\sigma_{k+1} z_{k+1} = A^{1/2} B A^{1/2} z_k, \quad \sigma_{k+1} = \frac{\left\|A^{1/2} B A^{1/2} z_k\right\|}{\|z_k\|}, \tag{25}$$

$$z_k = A^{1/2} y_k. \tag{26}$$

В этом случае выполняется равенство

$$\sigma_{k+1} = \tau_{k+1} \ \ \forall\, k > 1. \tag{27}$$

Из уравнения (25) выводится следующий вариант этой итерационной схемы:

$$\sigma_{k+1}\sigma_{k+2} z_{k+2} = A^{1/2} BABA^{1/2} z_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{28}$$

Из уравнения (25) и выражения для параметра σ_{k+1} следует

$$\|z_k\| = \|z_{k+1}\| \quad \forall\, k \geq 1. \tag{29}$$

Учитывая (26) и (29), получим

$$(y_{k+1}, Ay_{k+1}) = (y_k, Ay_k) \quad \forall\, k \geq 1. \tag{30}$$

Обозначая через F оператор $A^{1/2}BA^{1/2}$, уравнение (25) запишем для номеров k, $k+1$:

$$\sigma_{k+1} z_{k+1} = F z_k, \tag{31}$$
$$\sigma_{k+2} z_{k+2} = F z_{k+1}. \tag{32}$$

Умножая (31) скалярно на z_{k+1}, а (32) на z_k и вычитая одно соотношение из другого, получим

$$\sigma_{k+1} \|z_{k+1}\|^2 - \sigma_{k+2}(z_{k+2}, z_k) = (z_{k+1}, Fz_k) - (z_k, Fz_{k+1}) = 0.$$

Тогда с учетом (29) можно записать

$$\sigma_{k+1} \|z_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}\sigma_{k+2} \|z_{k+2} - z_k\|^2 - \sigma_{k+2} \|z_{k+1}\|^2 = 0,$$
$$\|z_{k+2} - z_k\|^2 = 2\left(1 - \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_{k+2}}\right) \|z_{k+1}\|^2. \tag{33}$$

Отсюда следует

$$\sigma_{k+2} > \sigma_{k+1} \quad \forall\, k \geq 1. \tag{34}$$

Из (28) в силу ограниченности операторов $A^{1/2}$ и BAB следует

$$\sigma_{k+1}\sigma_{k+2} \|z_{k+2}\|^2 \leq C^2 \|z_k\|^2.$$

А из этого неравенства и соотношения (29) получается оценка

$$\sigma_{k+2}\sigma_{k+1} \leq C^2 < \infty \quad \forall\, k \geq 1. \tag{35}$$

Последовательность σ_k является монотонно возрастающей на основании (34) и ограниченной сверху на основании (35), поэтому существует

$$\lambda^2 \leq C^2 : \lim_{k\to\infty} \sigma_{k+1}^2 = \lambda^2. \tag{36}$$

Из (28) и ограниченности оператора BAB следует компактность оператора $A^{1/2}BABA^{1/2}$ и компактность множества элементов z_k в H. Тогда существует подпоследовательность z_{k_j} и элемент $z \in H$, для которых выполняется

$$\lim_{k_j\to\infty} \left\|z_{k_j} - z\right\| = 0. \tag{37}$$

Обозначим через F_1 оператор $A^{1/2}BABA^{1/2}$, из соотношения (28) для подпоследовательности z_{k_j} получим

$$\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\left(z_{k_j+2} - z_{k_j}\right) + \sigma_{k+1}\sigma_{k+2} z_{k_j} - \lambda^2 z_{k_j} + \lambda^2 z_{k_j} = F_1 z_{k_j}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $k_j \to \infty$, получим с учетом (33), (36), (37):

$$\lambda^2 z = F_1 z, \quad z \in H. \tag{38}$$

Следует отметить, что оператор F_1 — положительный:

$$(u, F_1 u) > 0 \quad \forall\, u \in H. \tag{39}$$

Можно показать, что выполняется не только предельное соотношение (37), но и более сильное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\| = 0. \tag{40}$$

Предположим противное, что соотношение (40) не выполняется, тогда следует, что существует бесконечная подпоследовательность z_{k_i}, которая не сходится:

$$\exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, n_0 \in 1, 2, 3, \ldots,\ \exists\, k_i > n_0 :\ \|z_{k_i} - z\| > \epsilon. \tag{41}$$

Но так как последовательность z_{k_i} — компактная, то существует ее подпоследовательность z_{k_j}, $\{k_j\} \subset \{k_i\}$, и элемент $\varphi \in H$, такой что выполняется

$$\lim_{k_j\to\infty} \left\|z_{k_j} - \varphi\right\| = 0,$$

причем в силу соотношения (41), $\|\varphi - z\| \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq z$. Так как φ, z удовлетворяют одному и тому же уравнению $\lambda^2\varphi = F_1\varphi$, $\lambda^2 z = F_1 z$ и линейно независимы, то не теряя общности, можно считать, что они ортогональны:

$$(\varphi, z) = 0. \tag{42}$$

Из рекуррентного соотношения (28) и (38) следует

$$(z_{k+2}, z) = \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda^2}{\sigma_{m+2}\sigma_{m+1}} \cdot (h, z)\,, \tag{43}$$

где h — начальный элемент z_1 итерационной схемы. В соотношении (43) k — любой номер, в том числе и номер бесконечной подпоследовательности z_{k_j}:

$$\left(z_{k_j+2}, z\right) = \prod_{m=1}^{k_j} \frac{\lambda^2}{\sigma_{m+2}\sigma_{m+1}} \cdot (h, z)\,. \tag{44}$$

Переходя к пределу $k_j \to \infty$ в левой части равенства (44), получим с учетом (42):

$$\lim_{k_j\to\infty} \left(z_{k_j+2}, z\right) = (\varphi, z) = 0. \tag{45}$$

В правой части (44), переходя к пределу при $k_j \to \infty$, получим

$$\lim_{k_j\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\sigma_{k+2}\sigma_{k+1}} \cdot (h, z) \neq 0, \tag{46}$$

так как $\lambda^2 \geq \sigma_{k+2}\sigma_{k+1}\ \forall\, k$, $(h, z) \neq 0$ по условию. Сравнивая (45) и (46), получаем противоречие с предположением (41).

Из (26), (27) следует, что итерационная схема (25) на всех итерациях совпадает с итерационной схемой (10), (11). Отсюда следует, что существует решение хотя бы одной спектральной задачи (9) и сходимость к этому решению итерационной схемы (10), (11) с условиями (12)–(14), если y, z связаны соотношением $z = A^{1/2}y$. $\square$

Замечание 2. Возникает вопрос: какой смысл параллельного использования двух эквивалентных спектральных уравнений (9) и (38) и двух эквивалентных итерационных схем (10), (11) и (25). Хотя уравнения и итерационные схемы эквивалентны, между ними имеется принципиальная разница с точки зрения численных расчетов.

Уравнение (37) и итерационная схема (25) содержат оператор $A^{1/2}$, достаточно точное вычисление которого проблематично, а уравнение (9) и итерационная схема (10), (11) не содержат оператор $A^{1/2}$. Поэтому для численных расчетов удобно использовать уравнение (9) и итерационную схему (10), (11), а для теоретических доказательств использовать уравнение (38) и итерационную схему (25).

Рассмотрим некоторые дополнительные свойства спектра в спектральной задаче (38) и соответственно (9).

Утверждение 3. Все собственные элементы оператора $F_1 = A^{1/2}BABA^{1/2}$ взаимно ортогональны:

$$(z_i, z_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{47}$$

Доказательство. Пусть z_i, z_j соответствуют различным собственным числам

$$\lambda_i^2,\ \lambda_j^2, \quad \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2: \quad \lambda_i^2 z_i = F_1 z_i, \quad \lambda_j^2 z_j = F_1 z_j.$$

Умножая скалярно первое уравнение на z_j, а второе уравнение на z_i и вычитая из одного уравнения другое, получим

$$\left(\lambda_i^2 - \lambda_j^2\right)(z_i, z_j) = 0 \Rightarrow (z_i, z_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Если одному и тому же собственному числу λ_i соответствуют две различные собственные функции, то их можно ортогонализировать в смысле (47). □

Утверждение 4. Для любого $g > 0$ существует конечное число собственных элементов, для которых $\lambda_i^2 > g$.

Доказательство. Предположим противное, что число таких элементов бесконечно. Так как оператор F_1 — компактный, а число элементов бесконечно, то можно записать

$$\|F_1 z_i - F_1 z_j\|^2 = \left\|\lambda_i^2 z_i - \lambda_j^2 z_j\right\|^2 = \lambda_i^4 + \lambda_j^4 \geq 2g^2 > 0.$$

Значит, ни последовательность z_i, ни какая-то ее подпоследовательность не может сходиться, но это противоречит условию компактности оператора F_i и множества z_i, когда существует некоторая подпоследовательность сходящаяся в H. □

Утверждение 5. Каждому собственному числу λ_i соответствует конечное число собственных элементов.

Доказательство. Предположим противное, что числу λ_α соответствует бесконечное количество собственных элементов $\lambda_{\alpha i}$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. В силу компактности оператора F_1, множество $\lambda_{\alpha i}$ будет компактным. Тогда будет существовать бесконечная подпоследовательность $\lambda_{\alpha_{ij}}$, которая сходится. Но с другой стороны, выполняется

$$\|Fz_{\alpha_{ij}} - Fz_{\alpha_{im}}\|^2 = \lambda_\alpha^2 \|z_{\alpha_{ij}} - z_{\alpha_{im}}\| \geq \lambda_\alpha^2 \left(\|z_{\alpha_{ij}}\|^2 + \|z_{\alpha_{im}}\|^2\right) > g.$$

Значит, подпоследовательность $z_{\alpha_{ij}}$ не сходится. То есть предположение оказывается неверным. □

Утверждение 6. Точкой сгущения спектра является точка ноль.

Доказательство. Это утверждение является следствием утверждений 4 и 5. □

Теорема 2. *Итерационная схема* (25) *сходится к собственному числу с максимальным по модулю значением* λ_1^2 *среди всех собственных чисел* λ_i^2, *для которых выполняется* $(h, z_i) \neq 0$, $\lambda_i^2 z_i = F_1 z_i$.

Спектральное множество λ_i^2 *уравнения* (10) *совпадает со спектральным множеством уравнения* (38) *и представляет счетное множество, которое можно находить последовательно, используя итерационную схему* (10), (11) *с различными начальными условиями по схеме*:

$$\begin{aligned} &h \in H \Rightarrow \varphi_1, \\ &h_1 = h - (h, A\varphi_1) \cdot \varphi_1/(\varphi_1, A\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2, \\ &h_2 = h_1 - (h_1, A\varphi_2) \cdot \varphi_2/(\varphi_2, A\varphi_2) \Rightarrow \varphi_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{48}$$

где φ_i *— собственные элементы оператора* BA. *Эти элементы не совпадают с собственными элементами* z_i *оператора* F_1 *и связаны с ними соотношением* $z_i = A^{1/2}\varphi_i$, *при этом условие ортогональности* (47) *для* z_i *переходит в условие ортогональности для значений* φ_i *в виде*

$$(\varphi_i, A\varphi_j) = \{0,\ i \neq j;\ (\varphi_i, A\varphi_i) \neq 0,\ i = j\}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается от противного. Предположим, что существует $\lambda_p^2 > \lambda_1^2$, $\lambda_p^2 z_p = F z_p$ и $(h, \varphi_p) \neq 0$, тогда из итерационной схемы следует

$$z_{k+2} = \frac{1}{\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}} F_1 z_k.$$

Умножая скалярно на z_p, получим

$$(z_{k+2}, z_p) = \frac{\lambda_1^2}{\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}} (z_k, z_p).$$

Из этого рекуррентного соотношения следует, учитывая условие $z_1 = h$:

$$(z_{k+2}, z_p) = \prod_{j=1}^{k+2} \frac{\lambda_p^2}{\sigma_{j+1}\sigma_{j+2}} (h, z_p). \tag{49}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в левой и правой части равенства (49), получим

$$\lim_{k\to\infty} (z_{k+2}, z_p) = (z_1, z_p) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k+2} \frac{\lambda_p^2}{\sigma_{j+1}\sigma_{j+2}} (h, z_p) \ \geq (h, z_p) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_p^2}{\lambda_j^2} = \infty.$$

Из этих соотношений следует, что предположение $\lambda_p^2 > \lambda_1^2$ неверно.

Второе утверждение теоремы следует из того, что начальные элементы h_i ортогональны на всех итерациях к элементам $A\varphi_i$ в смысле $(h_i, A\varphi_i) = 0$, и по первому утверждению теоремы итерационный процесс будет сходиться к элементу φ_{i+1}. □

Выводы по теоретической части. Спектральное уравнение (9) имеет качественно такой же спектр, как и спектр классического компактного самосопряженного оператора. Итерационная схема (10), (11) на всех итерациях совпадает с итерационной схемой (25), но в отличие от нее не содержит оператор $A^{1/2}$, что позволяет эффективно использовать ее на практике при численном решении задач.

3. Прикладная задача

В качестве иллюстрации теории, подтверждения ее содержательного характера, т. е. существования прикладных спектральных задач вида (9), а также для апробации итерационной схемы (10), (11) при численном решении рассматривается задача о собственных частотах колебаний балки Релея. Исходное уравнение колебаний имеет вид

$$\left(EIW_{,zz}\right)_{,zz} + \rho SW_{,tt} - \rho\left(IW_{,ztt}\right)_{,z} = 0, \quad 0 \le z \le \ell, \tag{50}$$

где $W \equiv W(z,t)$ — поперечное смещение балки в любой плоскости, проходящей через ось z, ℓ — длина балки, E — модуль упругости материала, $I = I(z)$ — момент инерции сечения $I(z) = \iint_S (y-y_0)^2\,dS$, $y_0 = \frac{1}{S}\iint_S y\,dS$, где y — координата в плоскости колебаний, $S = S(z)$ — площадь поперечного сечения.

Уравнение (50) решается при краевых условиях жесткого защемления:

$$W\,|_{z=0} = 0, \quad W\,|_{z=\ell} = 0, \quad W_{,z}\,|_{z=0} = 0, \quad W_{,z}\,|_{z=\ell} = 0. \tag{51}$$

Уравнение (50) представляет собой уравнение колебаний с использованием классической модели Бернулли–Эйлера, с использованием зависимости величин I, S от координаты z и добавлением слагаемого $-\rho\left(IW_{,ztt}\right)_{,z}$, которое учитывает момент инерции при угловом повороте сечения балки. В научную литературу это добавочное слагаемое было введено Релеем [11] в 1878 году, хотя сам Релей ссылался на то, что такое же уравнение вида (50) первым получил Клебш в 1862 году. В литературе за моделью балки вида (50) установилось название балка Релея [12].

Уравнение вида (50) имеет важное преимущество перед классическим уравнением Бернулли–Эйлера. В классической модели Бернулли–Эйлера скорость распространения поперечных сдвиговых волн является бесконечной, что противоречит физическим представлениям, а в модели Релея эта скорость является конечной величиной.

Собственные частоты колебаний балки ω ищутся на основе представления решения в виде

$$W(z,t) = u(z)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{52}$$

Переходя к безразмерной координате $x = z/\ell$, $0 < x < 1$, безразмерной площади сечения $\psi(x) = S(x)/S(0)$, безразмерному моменту инерции сечения $\varphi(x) = I(x)/I(0)$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, безразмерному спектральному параметру $\lambda = EI(0)/\rho\omega^2\rho_0\ell^4$, безразмерному параметру $a = EI(0)/S(0)\ell^2$, и используя (52), можно получить

$$EI\ell^{-4}\left(\varphi(x)u_{,xx}\right)_{,xx} - \rho S(0)\omega^2\psi(x)u + \rho I(0)\omega^2\ell^{-2}\left(\varphi(x)_{,x}\right)_{,x} = 0.$$

Разделив это выражение на $\rho S(0)\omega^2$, получим спектральную задачу в дифференциальной форме:

$$\lambda\left(\varphi(x)u_{,xx}\right)_{,xx} - \psi(x)u + a\left(\varphi(x)u_{,x}\right)_{,x} = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{53}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u_{,x}(0) = u_{,x}(1) = 0. \tag{54}$$

Параметр λ связан с собственной частотой колебаний ω, параметр a характеризует геометрию сечения балки в точке $x = 0$.

4. Операторная форма прикладной спектральной задачи

Спектральная задача (53) в дифференциальной форме приводится к спектральной задаче в операторной форме (9). Для этого вводится гильбертово пространство $H = \{u \mid u \in L_2(0,1)\}$ со скалярным произведением $(u,v) = \int_0^1 uv dx$ и нормой $\|u\|^2 = (u,u)$. В пространстве H вводятся множества P_0, P, E: $P_0 \subset P \subset E \subset H$ и

$$E = \left\{u \mid u \in L_2(0,1), \int\limits_0^1 u\,dx = 0, \int\limits_0^1 xu\,dx = 0\right\},$$

$$P = \left\{u \mid u \in C_2(0,1),\ u\mid_{x=0} = 0,\ u_{,x}\mid_{x=0} = 0\right\},$$

$$P_0 = \left\{u \mid u \in C_2(0,1),\ u\mid_{x=0} = 0,\ u_{,x}\mid_{x=0} = 0,\ u\mid_{x=1} = 0,\ u_{,x}\mid_{x=1} = 0\right\}.$$

В H формулируется спектральная задача относительно спектрального параметра λ:

$$\lambda y = BAy, \quad y \in H, \tag{55}$$

где операторы A, B имеют вид

$$Au = \int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^x \frac{1}{\varphi(x)}\left(\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^x u\,dx\,dx\right)dx\,dx + C_1(u)\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^x \frac{dx\,dx}{\varphi(x)} + C_2(u)\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^x \frac{x\,dx\,dx}{\varphi(x)}, \tag{56}$$

$\varphi(x) \in C_2(0,1)$, $0 < x < 1$, $\varphi(x) > 0$, $u \in H$. Функционалы $C_1(u)$, $C_2(u)$ находятся из условий:

$$\int\limits_0^1 (Au)_{,x}\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 x(Au)_{,xx}\,dx = 0, \tag{57}$$

что приводит к системе двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} C_1\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x \frac{dx}{\varphi(x)}\right)dx + C_2\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x \frac{xdx}{\varphi(x)}\right)dx = -\int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^x \frac{1}{\varphi(x)}\left(\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^x u\,dx\,dx\right)dx\,dx, \\ C_1\int\limits_0^1 \frac{dx}{\varphi(x)} + C_2\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\varphi(x)} = -\int\limits_0^1 \frac{1}{\varphi(x)}\left(\int\limits_0^x\!\!\int\limits_0^x u\,dx\,dx\right)dx. \end{gathered} \tag{58}$$

Оператор Bu задается в виде

$$Bu = \psi(x)u - a\left(\varphi(x)u_{,x}\right)_{,x} \equiv \psi(x)u - a\varphi_{,x}u_{,x} - a\varphi u_{,xx}, \tag{59}$$

$u \in P$, $\psi(x) \in C(0,1)$.

Относительно операторов A, B можно доказать следующие свойства.

Утверждение 7.

- Оператор A отображает $H \to P_0$, оператор B отображает $P \to C(0,1)$.
- Оператор A — компактный в H, оператор BA — компактный в H, оператор BAB — ограниченный и симметричный в P.
- Оператор A — частично-симметричный в H и положительный в E, оператор B — симметричный в P:

$$(u, Av) = (v, Au) \quad \forall\, u, v \in E, \qquad (u, Au) > 0 \quad \forall\, u \in E, \tag{60}$$

$$(u, Bv) = (v, Bu) \quad \forall\, u, v \in P. \tag{61}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения проверяются непосредственно рассмотрением структуры операторов A, B и использованием того, что оператор $Lu = \int_0^x u\, dx$ на основании критерия Ф. Рисса [2] отображает $H \to C(0,1)$ и является компактным в H, а оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ отображает $C_k(0,1)$ в $C_{k-1}(0,1)$ и также использованием утверждения, что произведение компактного оператора на ограниченный снова является компактным оператором [10, 11]. Соотношения (60), (61) проверяются интегрированием по частям. □

Утверждение 8.

- Операторы A и B некоммутативны:

$$ABy \neq BAy. \tag{62}$$

- $\mathrm{Ker}(A) = 0, \quad u \in H; \qquad \mathrm{Ker}(B) = 0, \quad u \in P.$ (63)

Доказательство. Соотношение (62) проверяется непосредственной подстановкой. Утверждение $\mathrm{Ker}(A) = 0$, $u \in H$ проверяется от противного. Предполагается, что существует u_0: $\|u_0\| \neq 0$, для которого $Au_0 = 0$. Это равенство дважды дифференцируется по x, затем умножается на $\varphi(x)$ и снова дважды дифференцируется по x. В результате получается $u_0 = 0$, что противоречит предположению. Равенство $\mathrm{Ker}(B) = 0$, $u \in P$ также доказывается от противного. Предположим, что существует $u_0 \in P$: $Bu_0 = 0$ и

$$\psi(x)u_0 - a\big(\varphi(x)u_{0,x}\big)_{,x} = 0, \tag{64}$$

а из условия $u_0 \in P$ следует

$$u_0\,|_{x=0} = 0, \quad u_{0,x}\,|_{x=0} = 0. \tag{65}$$

Соотношения (64), (65) представляют однородное дифференциальное уравнение второго порядка с нулевыми начальными условиями. По теореме Коши [14] решение этой задачи единственно, а значит, $u_0 = 0$, что противоречит предположению. □

Утверждение 9. Операторное уравнение (55) эквивалентно спектральной задаче (53), (54), если положить

$$y = Bu. \tag{66}$$

Доказательство. Подставляя (66) в (55), получим $B\,(\lambda u - ABu) = 0$. Тогда на основе (63) следует $\lambda u - ABu = 0$, $u \in P_0$. Дифференцируя это уравнение дважды по x, получим

$$\lambda u_{,xx} - \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_0^x \int\limits_0^x \Big(\psi(x)u - a\big(\varphi(x)u_{,x}\big)_{,x}\Big)\, dx\, dx + C_1(u)\frac{1}{\varphi(x)} + C_2(u)\frac{x}{\varphi(x)} = 0. \tag{67}$$

Умножая это равенство на $\varphi(x)$ и снова дважды дифференцируя, получим уравнение (53), а краевые условия (54) выполняются потому, что $u \in P_0$. □

На основе утверждений 7–9 для уравнения (55) справедливы теоремы 1, 2, и вместо решения спектральной задачи (53), (54) можно решать спектральную задачу в форме (55), используя итерационную схему (10), (11).

5. Аналитическое решение тестовой задачи

Для контроля результатов численного решения задачи (55) по схеме (10), (11), эквивалентной задаче (50), (51), рассмотрим частный случай задачи (53), (54), когда $\varphi(x) = 1,\ \psi(x) = 1$ и возможно получение аналитического решения задачи (53), (54).

Для удобства получения этого решения перейдем от промежутка $0 < x < 1$ к промежутку $-1/2 < x < 1/2$. При этом получается следующая спектральная задача относительно параметра λ:

$$\lambda u_{,xxxx} + a u_{,xx} - u = 0, \quad -1/2 < x < 1/2, \tag{68}$$

$$u\big(-1/2\big) = u(1/2) = 0, \quad u_{,x}(-1/2) = u_{,x}(1/2) = 0. \tag{69}$$

Разыскивая для уравнения (68) частное решение в виде $u = e^{\mu x}$, получим для μ характеристическое уравнение

$$\mu^4 + \frac{a}{\lambda}\mu^2 - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

которое имеет следующие корни: $\mu_{1,2} = \pm iq$, $\mu_{3,4} = \pm p$, где

$$q = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}} + \frac{a}{2\lambda}}, \qquad p = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}} - \frac{a}{2\lambda}}.$$

Общее решение уравнения (68) принимает вид

$$u = C_1 \sin(qx) + C_2 \cos(qx) + C_3 \operatorname{sh}(px) + C_4 \operatorname{ch}(px), \quad q = q(\lambda), \quad p = p(\lambda). \tag{70}$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений, получаемых на основе краевых условий (69). Эту систему удобно разбить на две подсистемы для четной и нечетной части решения (70). При этом подсистемы оказываются независимыми друг от друга и для их получения требуется удовлетворить краевые условия только на одном конце промежутка $-1/2 < x < 1/2$.

Каждая подсистема имеет второй порядок и для получения нетривиального решения этих подсистем необходимо приравнять нулю их определители. В результате получается два трансцендентных уравнения для нахождения параметра λ.

Для нечетной части функции (70) это уравнение имеет вид

$$q \operatorname{sh}\frac{p}{2} \cos\frac{q}{2} - p \sin\frac{q}{2} \operatorname{ch}\frac{p}{2} = 0. \tag{71}$$

Для четной части функции (70) это уравнение имеет вид

$$q \operatorname{ch} \frac{p}{2} \sin \frac{q}{2} + p \operatorname{sh} \frac{p}{2} \cos \frac{q}{2} = 0. \tag{72}$$

Далее численно находится первый корень λ_{1a} уравнения (71) и первый корень λ_{1b} уравнения (72). Максимальное значение λ_1 находится из выражения

$$\lambda_1 = \max\{\lambda_{1a}, \lambda_{1b}\}. \tag{73}$$

Значение λ_1 сравнивается со значением λ_1, полученным по итерационной схеме (10), (11).

6. Численные расчеты

Программа численного решения задачи (55) была составлена на основе алгоритма (10), (11). Интегралы, входящие в операторы, вычислялись по формуле трапеции с равномерным разбиением интервала на 3000 узлов.

Для избежания дополнительных погрешностей при дифференцировании оператор B отдельно не считался, а считался оператор BA, который имел вид

$$BAu = \psi(x)Au - a\varphi_{,x}A_{,x}u - a\varphi A_{,xx}u,$$

$$A_{,x}u = \int_0^x \frac{1}{\varphi(x)}\left(\int_0^x\!\!\int_0^x u\,dx\,dx\right)dx + C_3(u)\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)} + C_4(u)\int_0^x \frac{x\,dx}{\varphi(x)},$$

$$A_{,xx}u = \frac{1}{\varphi(x)}\left(\int_0^x\!\!\int_0^x u\,dx\,dx\right)dx + C_3(u)\frac{dx}{\varphi(x)} + C_4(u)\frac{x\,dx}{\varphi(x)}.$$

Программа тестировалась при сравнении спектральных чисел λ_1, полученных на основе алгоритма (10), (11) при $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = 1$ и полученных на основе формулы (73). Погрешность численного решения проверялась по величине, которая является косвенной характеристикой качества приближенного решения

$$\epsilon = \frac{\|\tilde\lambda\tilde u - BA\tilde u\|}{\tilde\lambda\|\tilde u\| + \|BA\tilde u\|},$$

где $\tilde\lambda$, $\tilde u$ — приближенные значения λ и u, полученные в результате численного решения на основе алгоритма (10), (11). Для всех вариантов расчетов величина ϵ была меньше значения 0.000006.

В табл. 1 приведены значения λ_1^*, полученные по формуле (73) и λ_1 по алгоритму (10), (11), когда $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = 1$. Как видно из таблицы, совпадение результатов достаточно хорошее.

Таблица 1. Сравнение значений спектрального параметра $\lambda_1 \cdot 10^3$, полученного на основе алгоритма (10), (11) со спектральным числом $\lambda_1^* \cdot 10^3$, полученным на основе формулы (73)

a	$\lambda_1 \cdot 10^3$	$\lambda_1^* \cdot 10^3$
0.001	2.0223304	2.0223319
0.01	2.2442070	2.2442088
0.05	3.2392625	3.2392649
0.1	4.493449	4.493452
0.2	7.0143496	7.014354

В табл. 2 приведены значения λ_1, полученные по алгоритму (10), (11), когда $\varphi(x) \neq 1$, $\psi(x) \neq 1$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принимают вид $\varphi(x) = 1 + \beta x^2$, $\psi(x) = 1 + \alpha x$ для разных значений параметра a.

Таблица 2. Значения спектрального параметра $\lambda_1 \cdot 10^3$ при различных значениях параметров задачи

a	$\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$	$\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$	$\alpha = 0.2$, $\beta = -0.2$	$\alpha = -0.2$, $\beta = 0.2$
0.001	2.044	2.067	2.417	1.697
0.01	2.238	2.234	2.707	1.864
0.05	3.175	3.117	3.847	2.764
0.1	4.429	4.367	5.114	4.035
0.2	7.015	6.999	7.442	6.687

По результатам численных расчетов можно сделать следующий вывод. Численные расчеты подтвердили практическую работоспособность алгоритма (10), (11) при реализации этих расчетов на компьютере.

7. Заключительные замечания

Работ по спектральным свойствам операторов и алгоритмам вычисления спектра как в старых научных изданиях, так и в публикациях современных отечественных и зарубежных исследователей очень много. Чтобы перечислить их, необходимо писать большую обзорную статью, по объему превосходящую данную. Пакеты прикладных программ опираются на часть этих исследований.

Однако во всех этих работах под оператором понимается явно или неявно конечномерный матричных оператор. Между тем в данной статье речь идет об операторах в бесконечномерных пространствах, и цель этой статьи и публикаций [4–9] заключается в получении итерационных алгоритмов, не прибегая к аппроксимации реальных дифференциальных операторов конечномерными матрицами.

Проблема эта важная, потому что спектр операторов в бесконечномерных пространствах, как правило, бесконечный, а в конечномерных матрицах он является конечным. Поэтому говорить о полной аппроксимации бесконечного спектра конечномерным, конечно, нельзя. Можно лишь говорить о частичной аппроксимации некоторого спектрального подмножества бесконечного спектра спектром матриц.

Но в этом случае возникает такая проблема: по каким критериям можно оценивать границы этого подмножества. Без наличия такого критерия говорить об аппроксимации бессмысленно. Во многих работах этот вопрос даже не поднимается.

К этому надо добавить, что с точки зрения аппроксимации необходимо различать матричные спектральные уравнения, построенные на аппроксимациях дифференциальных спектральных уравнений и на эквивалентных интегральных спектральных уравнениях. Добиться аппроксимации, хотя бы частичной, можно только на основе спектральных матричных уравнений, построенных на основе спектральных интегральных уравнений, потому что область значений дифференциальных операторов значительно шире области их определения, а в интегральных операторах область значений оператора не шире его области значений.

Матричные спектральные уравнения, построенные на основе спектральных уравнений с дифференциальными операторами, просто маскируют отсутствие аппроксимации дифференциального спектрального уравнения. Это объясняется тем, что матричные операторы в гильбертовом пространстве при любом как угодно большом, но конечном порядке матрицы, являются компактными. Этим же свойством обладают интегральные операторы, не являющиеся сингулярными. Дифференциальные операторы не только не являются компактными, но и не являются ограниченными. А именно такие матричные спектральные уравнения, в основном, предлагаются в научной литературе и используются в пакетах прикладных программ.

Предлагаемый итерационный алгоритм, как и итерационные алгоритмы в работах [4–9], не используют спектральные матричные алгоритмы в явном виде и могут применяться только для спектральных уравнений, записанных в форме интегральных спектральных уравнений, которые в бесконечномерном пространстве эквивалентны дифференциальным спектральным уравнениям.

В этом и состоит основное и принципиальное отличие данной статьи и работ [4–9] от большинства существующих публикаций и пакетов прикладных программ.

Следует отметить, что итерационный алгоритм (10), (11) так же, как и итерационные алгоритмы (1), (2) и (6), (7), рассматриваются в гильбертовом пространстве, которое является бесконечномерным, и поэтому эти алгоритмы можно использовать как инструменты теоретического исследования спектра операторов, а в этом качестве они не нуждаются ни в каких аппроксимациях.

Литература

1. **Гильберт Д.** Избранные труды. В 2 томах. Том 2. Анализ. Физика. Проблемы. Personalia.— М.: Факториал, 1998.
2. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.
3. **Васильева А.Б., Тихонов Н.А.** Интегральные уравнения.— М.: Изд-во МГУ, 1989.
4. **Тараканов В.И.** Уравнения с компактными операторами в гильбертовом пространстве и итерационные алгоритмы их решения.— Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
5. **Никифоров И.В., Тараканов В.И.** Методы селективного численного анализа спектра оператора, компактного в гильбертовом пространстве // Вычислительные технологии.— 2004.— Т. 9, № 3.— С. 58–71.
6. **Тараканов В.И., Нестеренко М.В.** Итерационные алгоритмы исследования и численного решения спектральных задач для линейного пучка компактных, частично симметричных операторов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2010.— Т. 13, № 3.— С. 343–359.
7. **Тараканов В.И., Лысенкова С.А.** Итерационные алгоритмы определения устойчивости уравнения колебаний при наличии демпфирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2012.— Т. 15, № 1.— С. 103–119.
8. **Tarakanov V.I., Nesterenko M.V.** Iterative algorithm of investigation and numerical solving spectral problems for a linear bunch of compact, partially symmetrical operators // Numerical analysis and Application.— 2010.— Vol. 3, iss. 3.— P. 279–293.— (DOI: 10.1134/S 1995423910030079).
9. **Tarakanov V.I., Lysenkova S.A.** Iterative algorithm of determining the stability of an equation of oscillations with damping // Numerical Analysis and Application.— 2012.— Vol. 5, iss. 1.— P. 84–98.— (DOI: 10.1134/S1995423912010089).
10. **Крейн С.Г.** Функциональный анализ. Справочник.— М.: Наука, 1972.
11. **Садовничий В.А.** Теория операторов.— М.: Изд-во МГУ, 1986.

12. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. — Л.: Изд-во “Политехник”, 1990.

13. **Стретт Дж. В. (лорд Релей)** Теория звука. Пер. с 3-го англ. издания 1926 г., 1-го издания в 1878 г. — М.-Л.: Гостехиздат, 1940.

14. **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.

Поступила в редакцию 5 июня 2012 г.,
в окончательном варианте 13 января 2014 г.