

УДК 539.4

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

С. В. Сукнёв

Институт физико-технических проблем Севера СО РАН, 677891 Якутск

Оценивается прочность пластины с эллиптическим отверстием, подверженной одноосному растяжению или сжатию, при произвольных углах между осями эллипса и направлением приложенной силы на основе градиентного критерия прочности. Результаты расчета критического напряжения согласуются с известными экспериментальными данными.

Постановка задачи. Рассматривается тонкая изотропная однородная линейно-упругая пластина из хрупкого материала, к которой приложено равномерно распределенное на бесконечности растягивающее напряжение σ или сжимающее напряжение p . В центре пластины находится эллиптическое отверстие, ориентированное под углом ω к направлению нагружения (рис. 1; a и b — большая и малая полуоси эллипса). Определим критическое напряжение $\sigma_c(p_c)$, при котором в пластине достигается предельное состояние (локальное разрушение). Усредненные механические свойства материала пластины характеризуются предельным напряжением σ_0 , которое определяется при растяжении пластины без отверстия.

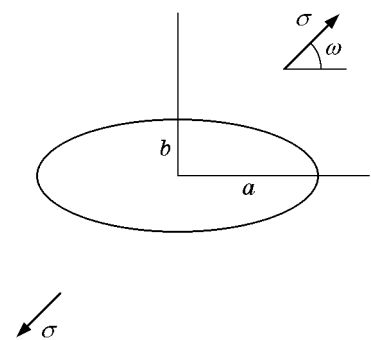


Рис. 1

В соответствии с традиционным подходом к расчетам на прочность σ_0 полагается константой материала, а условие прочности записывается в виде

$$\sigma_e < \sigma_0, \tag{1}$$

где $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$ — эквивалентное напряжение, характеризующее внутреннее напряженное состояние тела и в общем случае являющееся функцией компонент тензора напряжений σ_{ij} . Критическое напряжение оценивается следующим образом:

$$\sigma_c = \sigma_0 / K_t, \tag{2}$$

где K_t — коэффициент концентрации напряжений, характеризующий отношение эквивалентного напряжения σ_e в наиболее напряженной точке тела к приложенному напряжению σ .

Область применимости выражения (2) ограничена небольшими значениями K_t , когда размер зоны неоднородности напряжений достаточно велик, чтобы считать $\sigma_0 = \text{const}$. В данном случае это означает, что выражение (2) можно использовать лишь при малых углах ω . С увеличением ω коэффициент концентрации напряжений быстро растет, а с ним возрастает и погрешность определения критического напряжения по формуле (2), что подтверждается экспериментальными данными [1].

С целью расширения области применимости выражения (2) в [2–5] предложено использовать условие прочности (1) в точке максимума эквивалентного напряжения, находящейся не на границе отверстия, а на внешнем контуре, отстоящем на некотором расстоянии от отверстия. При этом возникает два вопроса: какова форма внешнего контура и на каком расстоянии от границы отверстия он находится? В [2, 4] в качестве внешнего контура используется окружность радиуса r с центром в точке максимума тангенциального напряжения на границе отверстия, а в работах [3, 5] — конфокальный эллипс с большой полуосью $a + r$. Величина r подбирается исходя из наилучшего соответствия результатов расчета экспериментальным данным. Расчет критического напряжения производился на основе различных критериев прочности: максимального тангенциального напряжения и максимального тангенциального главного напряжения [4], максимального главного напряжения [4, 5], максимальной тангенциальной деформации [3, 4], минимальной плотности энергии деформации [2, 4]. Сопоставление результатов расчета σ_c с экспериментальными данными не позволяет выбрать какой-то один из приведенных критериев [4]. Очевидно, это обусловлено тем, что параметр аппроксимации r не связан с физическими механизмами разрушения материала.

Применение градиентного критерия прочности. Другой подход продемонстрирован в работе [6]. Он связан с отказом от гипотезы $\sigma_0 = \text{const}$. Условие прочности записывается в виде $\sigma_e < f(\sigma_0, L_0/L_e)$, а критическое напряжение определяется выражением $\sigma_c = \min \{f(\sigma_0, L_0/L_e)/(\sigma_e/\sigma)\} > 0$, где L_0 — характерный размер структуры материала; L_e — характерный размер деформируемой области. В условиях концентрации напряжений L_e определяется размером зоны неоднородности напряжений. Если он достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала включая допустимые дефекты структуры (т. е. выполняются условия усреднения механических свойств), то величина локальной прочности мало отличается от σ_0 . Если L_e сопоставим с размерами структурных элементов, их влияние на локальную прочность становится заметным, причем оно тем сильнее, чем меньше отношение L_e/L_0 . Для оценки L_0 предлагается использовать критический размер дефекта $l_c = 2K_c^2/(\pi\sigma_0^2)$ (K_c — критический коэффициент интенсивности напряжений), а для оценки L_e — радиус кривизны концентратора ρ в “опасной” точке.

С учетом данных оценок функция локальной прочности для базовой задачи о симметричном растяжении пластины с эллиптическим отверстием ($\omega = 0; 90^\circ$) имеет вид [6]

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0(1 + \sqrt{2l_c/\rho}). \quad (3)$$

Рассмотрим возможность распространения функции (3) на произвольные углы $0 \leq \omega \leq 90^\circ$ и значения геометрического параметра $0 \leq m < 1$, $m = (a - b)/(a + b)$ для случаев растяжения и сжатия, полагая, что в обоих случаях процесс разрушения происходит путем отрыва и определяется нормальными напряжениями, т. е. $\sigma_e = \sigma_\theta > 0$ (σ_θ — тангенциальное напряжение на контуре отверстия).

Растяжение. Задача определения σ_c сводится к нахождению минимума

$$\sigma_c = \min \left\{ \sigma_0 \frac{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta + \sqrt{2l_c(1 - m)/a} (1 + m)(1 + m^2 - 2m \cos 2\theta)^{1/4}}{1 - m^2 + 2m \cos 2\omega - 2 \cos(2\theta - 2\omega)} \right\}, \quad (4)$$

$$\sigma_c > 0.$$

Здесь использовано известное выражение [7] для напряжения σ_θ на контуре эллиптического отверстия, а также выражение для радиуса кривизны контура $\rho_\theta = a(1 + m^2 - 2m \cos 2\theta)^{3/2}/[(1 + m)^2(1 - m)]$.

Варьируемым параметром в выражении (4) является угол θ , который удовлетворяет уравнению

$$A - B \sin 2\theta - C \cos 2\theta - F(\theta) = 0, \quad (5)$$

где $A = 2m \sin 2\omega$; $B = (1 - m^2)(m - \cos 2\omega)$; $C = (1 + m^2) \sin 2\omega$; $F(\theta) = \sqrt{l_c/(2\rho\theta)} [0,5m \sin 2\theta(1 - m^2 + 2m \cos 2\omega - 2 \cos(2\theta - 2\omega)) - 2(1 + m^2 - 2m \cos 2\theta) \sin(2\theta - 2\omega)]$.

Уравнение (5) будем решать методом последовательных приближений:

$$A - B \sin 2\theta^{(k)} - C \cos 2\theta^{(k)} = F(\theta^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\sin 2\theta^{(k)} = \frac{A^{(k)}B - C\sqrt{B^2 + C^2 - (A^{(k)})^2}}{B^2 + C^2}, \quad \cos 2\theta^{(k)} = \frac{A^{(k)}C + B\sqrt{B^2 + C^2 - (A^{(k)})^2}}{B^2 + C^2},$$

где $A^{(k)} = A - F(\theta^{(k-1)})$; $A^{(0)} = A$.

При $l_c < 2\rho\theta$ итерационный процесс (6) быстро сходится, обеспечивая необходимую точность определения критического напряжения. Так, при $l_c/a = 0,01$ и $m = 2/3$ одной итерации достаточно для определения σ_c с погрешностью 0,1% во всем диапазоне изменения угла ω . Если $l_c \gg 2\rho\theta$, итерационная процедура не может быть использована. На практике этот случай реализуется для узкого эллипса при больших значениях ω , когда σ_c почти не изменяется с увеличением ω . Следовательно, для нахождения "опасной" точки можно ограничиться в (6) нулевым приближением.

Рассмотрим случай $m \rightarrow 1$. Эллиптическое отверстие вырождается в разрез. В то же время реальная трещина в момент начала неустойчивого роста имеет конечный радиус закругления в вершине. В эксперименте контролируется только ее длина (с учетом медленного подрастания трещины до начала неустойчивого роста), поэтому мы имеем отверстие с известным a , но неизвестным ρ . Поскольку ρ является лишь оценочным параметром для характерного размера L_e , приведенная выше процедура определения критического напряжения может быть существенно упрощена.

Для данного наклонного эллипса рассмотрим эквивалентный симметричный эллипс с параметрами $K_t = K_{t\omega}$ и $a_e = a_\omega$, которые имеют вид

$$K_{t\omega} = \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\omega - 2 \cos(2\theta - 2\omega)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}, \quad a_\omega = a \frac{(1 + m^2 + 2m \cos 2\theta)^{1/2}}{1 + m}. \quad (7)$$

Здесь $K_{t\omega}$ — коэффициент концентрации напряжений наклонного эллипса; $2a_\omega$ — размер наклонного эллипса в "опасном" сечении, проходящем через точки концентрации напряжений; $2a_e$ — размер эквивалентного эллипса в "опасном" сечении. Угол θ в выражениях (7) определяется из решения уравнения (6) в нулевом приближении. Тогда для радиуса кривизны ρ_e в вершине эквивалентного эллипса имеем оценку

$$\rho_e = 4a_\omega / (K_{t\omega} - 1)^2, \quad (8)$$

которая следует из выражения для коэффициента концентрации напряжений симметричного эллипса $K_t = 1 + 2\sqrt{a_e/\rho_e}$.

Теперь можно использовать формулу для оценки критического напряжения в случае симметричного растяжения [6]

$$\sigma_c = \sigma_0(1 + \sqrt{2l_c/\rho_e})/K_t. \quad (9)$$

Таким образом, исходная задача о прочности пластины при растяжении в случае $\omega \neq 0$; 90° сводится к эквивалентной симметричной задаче ($\omega = 90^\circ$) с функцией локальной прочности (3) и оценкой (8) для характерного размера L_e .

Сжатие. Критическое напряжение определяется как $p_c = \min \{-f(\sigma_0, L_0/L_e)/(\sigma_\theta/p)\} > 0$. Используя для σ_θ и ρ_θ те же выражения, что и в случае растяжения, получим

$$p_c = \min \left\{ -\sigma_0 \frac{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta + \sqrt{2l_c(1-m)/a} (1+m)(1+m^2 - 2m \cos 2\theta)^{1/4}}{1 - m^2 + 2m \cos 2\omega - 2 \cos(2\theta - 2\omega)} \right\}, \quad (10)$$

$$p_c > 0.$$

Угол θ определяется из уравнения (5), которое решается с применением итерационной процедуры (6):

$$\sin 2\theta^{(k)} = \frac{A^{(k)}B + C\sqrt{B^2 + C^2 - (A^{(k)})^2}}{B^2 + C^2}, \quad \cos 2\theta^{(k)} = \frac{A^{(k)}C - B\sqrt{B^2 + C^2 - (A^{(k)})^2}}{B^2 + C^2},$$

где $A^{(k)} = A - F(\theta^{(k-1)})$; $A^{(0)} = A$.

Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными. Полученные на основе градиентного критерия выражения (4), (9) и (10) для критического напряжения использованы для оценки прочности пластин из полиметилметакрилата (ПММА), содержащих эллиптические отверстия и подверженных одноосному растяжению или сжатию.

В экспериментах [1] испытывались на растяжение пластины длиной 380 мм, шириной 152 мм и толщиной 3,2 мм. Полуоси эллиптического отверстия равны $a = 12,7$ мм, $b = 2,5$ мм. Критическая нагрузка определялась в момент разрушения образца, которое имело внезапный характер. На рис. 2, а приведены экспериментальные данные (точки), а также результаты расчета критического напряжения по формулам (4) и (9) (кривые 1 и 2 соответственно) и формуле (2) (штриховая кривая). Отметим, что расчет с использованием формулы (9) проще, чем с использованием (4).

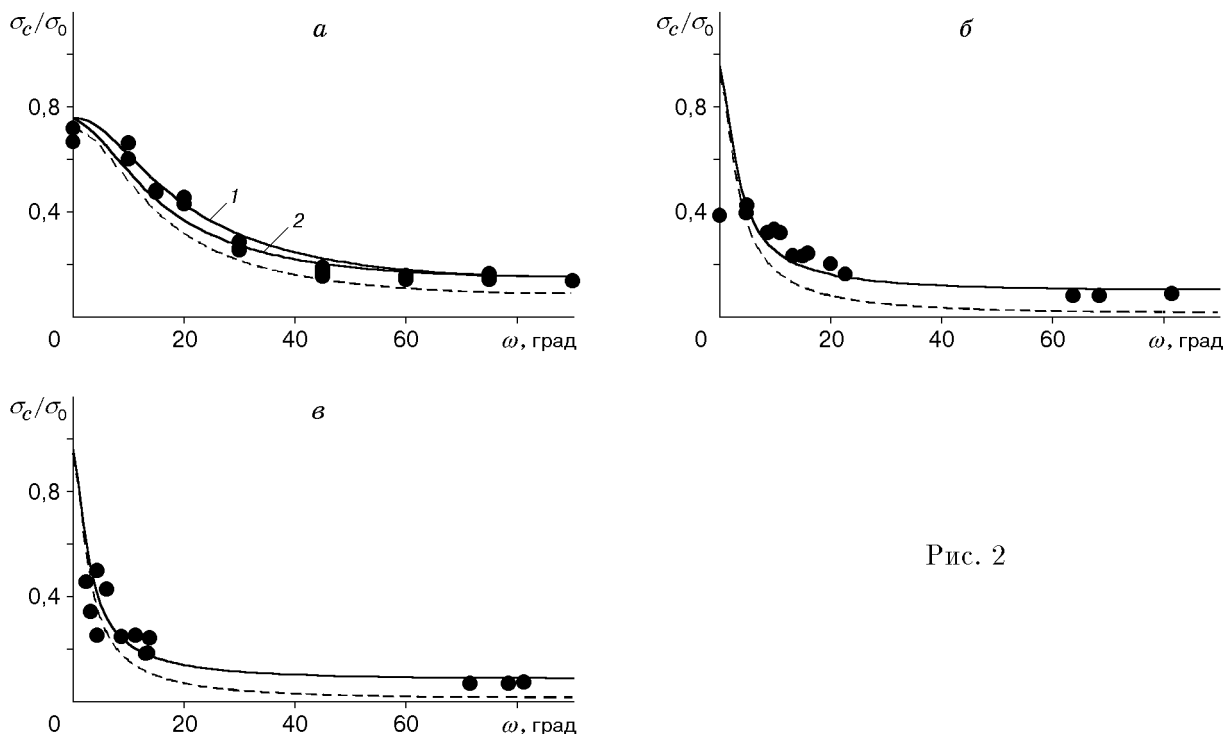


Рис. 2

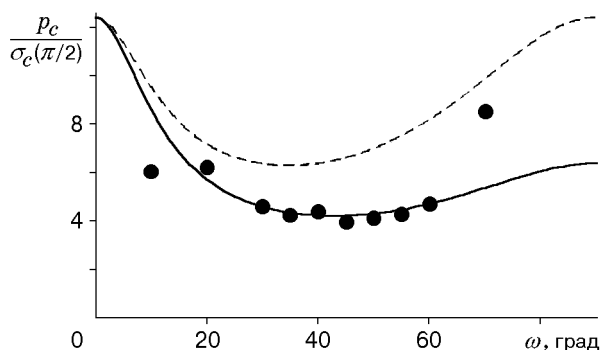


Рис. 3

В экспериментах [8] испытывались на растяжение пластины длиной 305 мм, шириной 152 мм и толщиной 3,2 мм. Отверстия имели форму узкой щели с заостренными бритвенным лезвием концами. Критическая нагрузка определялась в момент разрушения образца, при этом отбирались только те образцы, в которых до начала неустойчивого роста (разрушения) трещина медленно подрастала на величину не более 0,3 мм. На рис. 2, б, в представлены экспериментальные данные для $a = 12,7; 17,8$ мм соответственно (точки) и результаты расчета критического напряжения по формуле (9) (сплошные кривые). Видно, что результаты расчета согласуются с экспериментальными данными. Поскольку величина радиуса закругления в вершине надреза в момент разрушения экспериментально не определялась, использованное в расчетах значение $\rho = 0,02$ мм получено аппроксимацией экспериментальных данных. Штриховыми кривыми представлены результаты расчета по формуле (2).

В работе [9] приведены результаты испытаний на сжатие квадратных пластин со стороной 50 мм и толщиной 8 мм. Отверстия, сделанные с помощью CO_2 -лазера, представляли собой щель длиной 14 мм с диаметром закругления в вершине 0,43 мм. Экспериментальная зависимость критического сжимающего напряжения $p_c(\omega)$, отнесенного к критическому растягивающему напряжению σ_c , определенному при $\omega = 90^\circ$, показана на рис. 3 (точки). На рис. 3 представлены также результаты расчета отношения $p_c(\omega)/\sigma_c(\pi/2)$ с помощью формул (10) и (4) (сплошная кривая), которые согласуются с данными эксперимента (точки). Штриховая кривая рассчитана согласно критерию (1).

Таким образом, определенная на основе градиентного подхода [6] функция локальной прочности (3) может быть использована для оценки прочности пластины с эллиптическим отверстием как при растяжении, так и при сжатии, что подтверждается сопоставлением результатов расчета критического напряжения с известными экспериментальными данными, полученными на образцах из ПММА.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wu H. C., Yao R. F., Yip M. C.** Experimental investigation of the angled elliptic notch problem in tension // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 3. P. 455–461.
2. **Kipp M. E., Sih G. C.** The strain energy density failure criterion applied to notched elastic solids // Intern. J. Solids Structures. 1975. V. 11, N 2. P. 153–173.
3. **Wu H.-C., Chang K.-J.** Angled elliptic notch problem in compression and tension // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1978. V. 45, N 2. P. 258–262.
4. **Maiti S. K., Smith R. A.** Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress-strain field. Pt I. Slit and elliptical cracks under uniaxial tensile loading // Intern. J. Fract. 1983. V. 23, N 4. P. 281–295.

5. **Yeh H.-Y., Kim C. H.** Fracture mechanics of the angled elliptic crack under uniaxial tension // Engng Fract. Mech. 1995. V. 50, N 1. P. 103–110.
6. **Сукнёв С. В.** О применении градиентного подхода к оценке локальной прочности // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 222–228.
7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1984. Т. 2.
8. **Williams J. G., Ewing P. D.** Fracture under complex stress — the angled crack problem // Intern. J. Fract. Mech. 1972. V. 8, N 4. P. 441–446.
9. **Tirosh J., Catz E.** Mixed-mode fracture angle and fracture locus of materials subjected to compressive loading // Engng Fract. Mech. 1981. V. 14, N 1. P. 27–38.

Поступила в редакцию 20/VII 1999 г.
