

УДК 539.37

**ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ
НА ПРИМЕРЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ СТАЛИ 40Х**

А. И. Чанышев

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: a.i.chanyshv@gmail.com,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Исследуются данные экспериментальных исследований, проведенных в ИГД СО РАН, по сложному нагружению стали 40Х при двухосном растяжении. Отыскивается собственный тензорный базис, в котором соотношения между приращениями напряжений и деформаций не зависят от вида как нагружения, так и догружения.

Сложное нагружение, собственный тензорный базис, упругость, пластичность

ВВЕДЕНИЕ

К задачам горного дела с применением теории пластичности относятся задачи внедрения инструмента в породу, оценка напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг выработок. В первом случае материал, например клиновидного инструмента, испытывает вначале лобовое сжатие, далее с боков — внешнее давление. Соотношение этих усилий может быть разнообразным, при этом могут возникнуть сложные пластические деформации. Во втором случае в процессе образования выработки освобождение ее границ от напряжений происходит также необратимо и по сложным траекториям изменений вертикальных и горизонтальных нагрузок. Данная работа посвящена исследованию процессов сложного нагружения упругопластических сред с использованием экспериментальных данных, проведенных в ИГД СО РАН, попытке построения некоторой теории, согласующейся с опытами.

Цель любой теории — предсказание, причем чем лучше оно согласуется с экспериментом, тем лучше теория. В геомеханике существуют две основные теории упругопластических деформаций — деформационная Генки–Надаи–Ильюшина [1–3] и пластического течения Прандтля–Рейсса [4, 5]. Обе они хорошо описывают поведение материалов (металлов) при простых (пропорциональных) путях нагружений [6–8]. Если обратиться к экспериментам со сложными (непропорциональными) путями нагружений, то данные, например опытов [9–11], говорят о существенном несоответствии теоретических предсказаний с реальностью. Основной вопрос здесь — описание ортогонального догружения, для которого по теории пластического течения модуль ортогонального догружения равен 2μ (2μ — модуль упругого сдвига), а по деформаци-

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Отделения наук о Земле РАН (проект ОНЗ-3.1).

онной теории пластичности равен $2\mu_c$, где $2\mu_c$ — секущий модуль на диаграмме деформирования “интенсивность касательных напряжений–интенсивность деформаций сдвига”. Опыты [9] свидетельствуют о том, что этот модуль в 2 раза меньше того, который предсказывает теория течения, и больше того, который предсказывает деформационная теория пластичности. В ИГД СО РАН в 70–80-е годы прошлого столетия были развернуты широкомасштабные работы как по построению новых теорий упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении [12–16], так и по накоплению экспериментальных данных при двух-, трех- и многозвенных траекториях нагружения материалов [17–19]. Теоретические изыскания в основном велись в рамках моделей, предложенных С. А. Христиановичем и Е. И. Шемякиным [12, 13], связанных с площадками действия максимальных касательных напряжений.

Отметим, что “правильное” предсказание экспериментального поведения материалов при сложном нагружении необходимо потому, что при решении конкретных задач мы находимся в континуальном множестве деформируемых точек, в каждой из которых имеет место однородное напряженно-деформируемое состояние со “своей” историей нагружения. Если теория неправильно предсказывает поведение среды в одной, другой, третьей точке, в континууме точек, то тогда теоретическое решение задачи даст неверный ответ, из-за которого могут быть проблемы с безопасностью людей, техники, производства. Задача исследователя — найти математическую модель, адекватно отражающую действительность.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Рассмотрим результаты экспериментов, полученные в работах В. М. Жигалкина [17–20], при нагружении тонкостенных цилиндрических образцов осевой растягивающей нагрузкой и внутренним давлением для стали 40Х (модуль Юнга $E = 21500$ МПа, $\nu = 0.32$).

Все особенности проведения экспериментов изложены в [20]. Отметим еще то, что эксперименты проводились с целью проверки теории Христиановича и Шемякина [12, 13]. В данной работе рассматривается несколько другой взгляд на результаты этих экспериментальных исследований — с позиции построения собственного тензорного базиса [20–23], в котором связи между приращениями напряжений и деформаций не зависят от вида нагружения и вида догружения.

Пусть r, z, θ — цилиндрическая система координат, ось z направлена по образующей цилиндрической трубки. Программы нагружений испытанных образцов представлены на рис. 1.

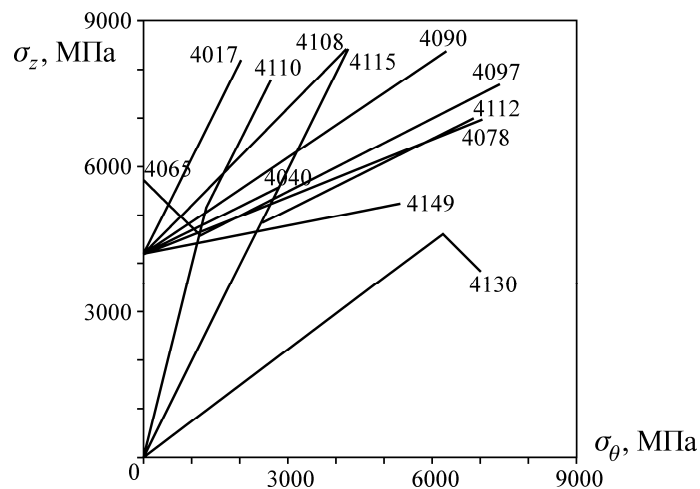


Рис. 1. Программы нагружений тонкостенных цилиндрических образцов осевой растягивающей нагрузкой (напряжение σ_z) и внутренним давлением (напряжение σ_θ). Эксперименты В. М. Жигалкина [17–20]

Для образцов с номерами 4017, 4108, 4090, 4040, 4078 программы нагружений имели вначале вид осевого растяжения до значения 4300 МПа, затем добавлялось внутреннее давление. Для образца с номером 4130 после пропорционального нагружения осевым растяжением и внутренним давлением шел процесс снятия осевой растягивающей нагрузки с увеличением давления.

Результаты экспериментов в виде зависимостей $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\varepsilon_\theta)$ можно найти в [17–20]. Наша цель — рассмотреть эти же эксперименты в других плоскостях, связанных с определением собственного тензорного базиса. Запишем закон Гука для рассматриваемого материала в базисе:

$$T_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Скалярное произведение здесь определяется выражением $t_{ij}^k t_{ij}^e$ [24]. В базисе (1) тензоры напряжений и деформаций T_σ , T_ε имеют координаты

$$S_z = \sigma_z, \quad S_\theta = \sigma_\theta, \quad S_r = \sigma_r, \quad \Omega_z = \varepsilon_z, \quad \Omega_\theta = \varepsilon_\theta, \quad \Omega_r = \varepsilon_r. \quad (2)$$

Закон Гука в координатах (2) в базисе (1) записывается в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} S_z \\ S_\theta \\ S_r \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_z \\ \Omega_\theta \\ \Omega_r \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Выражение (3) — линейное симметрическое преобразование одного вектор-столбца в другой. Определим собственные числа и собственные векторы преобразования (3). Решая уравнение $|A - \lambda E| = 0$, находим собственные числа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{E}{1+\nu}, \quad \lambda_3 = \frac{E}{1-2\nu}, \quad (4)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Для собственного числа λ_3 после нормировки получаем собственный вектор $\vec{b}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ и соответствующий ему собственный тензор

$$T_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} T_z + \frac{1}{\sqrt{3}} T_\theta + \frac{1}{\sqrt{3}} T_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Два других собственных вектора определяются неоднозначно. В качестве них можно взять любых два, образующих с \vec{b}_3 ортогональный векторный базис, например

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{k^2 - k + 1}} (2k - 1, 2 - k, -k - 1),$$

$$\vec{b}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k^2 - k + 1}} (1, -k, k - 1),$$

где k — любое число.

Тогда для координат тензоров T_σ , T_ε в базисе T_1 , T_2 , T_3 получаем следующие выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{k^2 - k + 1}} [(2k - 1)\sigma_z + (2 - k)\sigma_\theta], \\ S_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k^2 - k + 1}} (\sigma_z - k\sigma_\theta), \\ S_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_z + \sigma_\theta), \\ \Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{k^2 - k + 1}} [(2k - 1)\varepsilon_z + (2 - k)\varepsilon_\theta - (k + 1)\varepsilon_r], \\ \Omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k^2 - k + 1}} [\varepsilon_z - k\varepsilon_\theta + (k - 1)\varepsilon_r], \\ \Omega_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r). \end{array} \right. \quad (5)$$

Отметим, что $S_3 = \lambda_3 \Omega_3$, $S_2 = \lambda_1 \Omega_2$, $S_1 = \lambda_1 \Omega_1$. Если допустить, что объем в процессе пластичности изменяется упруго, то из первого приведенного уравнения находим выражение для определения деформации ε_r :

$$\varepsilon_r = \Omega_3 \sqrt{3} - \varepsilon_z - \varepsilon_\theta = \frac{S_3 \sqrt{3}}{\lambda_3} - \varepsilon_z - \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{\lambda_3} - \varepsilon_z - \varepsilon_\theta. \quad (6)$$

С использованием (6) находятся все другие координаты тензоров T_σ , T_ε . При этом следует обратить внимание на начальные участки программ нагружения рассматриваемых экспериментов (рис. 1): они имеют вид прямых линий $\sigma_z = k\sigma_\theta$, где k — определенная константа для каждого эксперимента. Перебирая эти константы, можно видеть из второго уравнения (5), что для всех опытов $S_2 = 0$, т. е. в плоскости переменных S_1 , $|S_2|$ получаются программы нагружений, указанные на рис. 2.

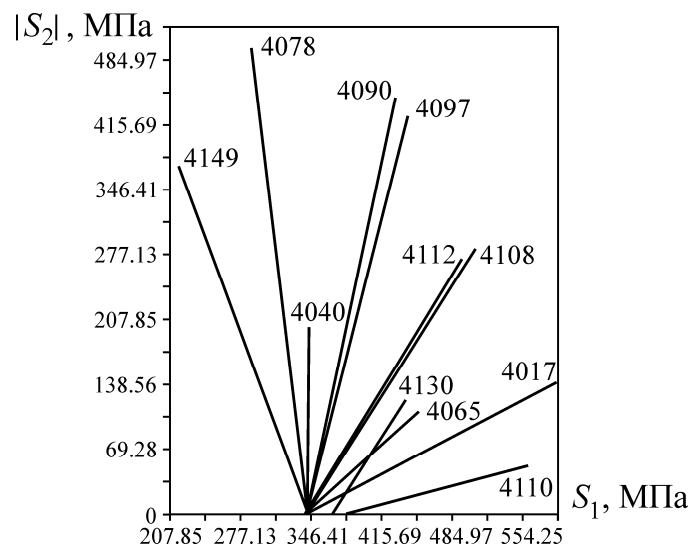


Рис. 2. Программы нагружений в плоскости переменных S_1 , $|S_2|$

Из рис. 2 следует, что до некоторого значения переменной S_1 нагружение имело пропорциональный характер, затем происходил излом траектории нагружения. Догружение для образцов с номерами 4110, 4017, 4065 имело активный характер. Для образцов с номерами 4108 и 4112 программы нагружений почти совпадают. Для образца с номером 4040 отмечено чисто ортогональное догружение. Для образцов с номерами 4078, 4149 происходила частичная разгрузка, когда по направлению тензора T_1 значение касательного напряжения S_1 уменьшалось, по оси T_2 — по абсолютному значению увеличивалось.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Ниже эти экспериментальные данные представлены в плоскостях переменных $\Delta\Omega_1^p, \Delta S_1; |\Delta\Omega_2^p|, |S_2|$ соответственно (рис. 3, 4). Из этих рисунков прослеживаются закономерности: чем больше догружение отличается от пропорционального (чем больше угол, образуемый “догрузкой” с осью абсцисс), тем кривая $\Delta S_1 = \Delta S_1(\Delta\Omega_1^p)$ располагается ниже аналогичной на рис. 3, в то же время кривая $|S_2| = |S_2|(|\Delta\Omega_2^p|)$ располагается выше аналогичной на рис. 4.

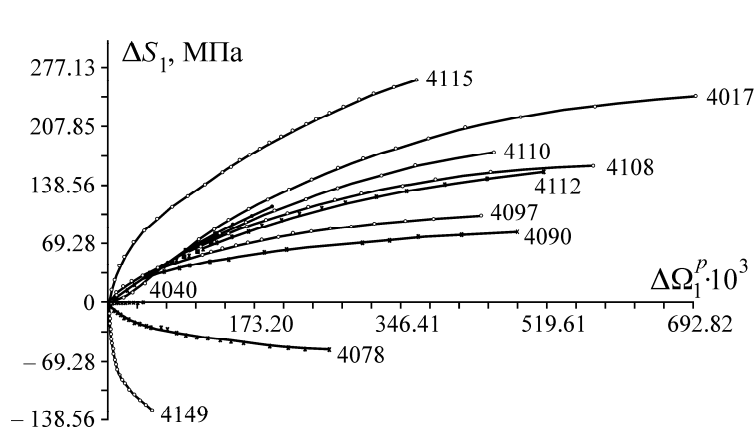


Рис. 3. Поведение среды в направлении простой догрузки

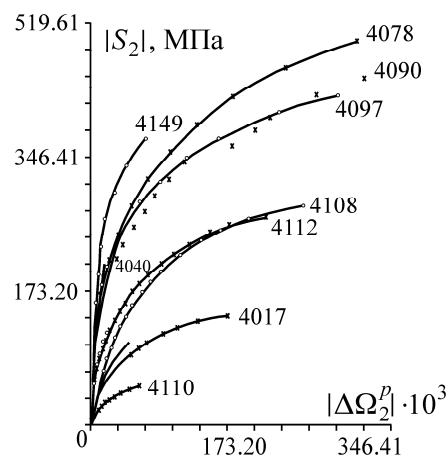


Рис. 4. Поведение среды в направлении ортогональной догрузки

Следует отметить, что по классическим теориям — деформационной теории пластичности и теории пластического течения — начальные участки догружения на рис. 3, 4 не должны зависеть от направления догрузки на рис. 2.

Возникает задача отыскания собственного тензорного базиса для приращений напряжений и приращений деформаций, не зависящего от вида догружения на рис. 2.

Обозначим через ϑ угол, который образует отрезок пути догружения на рис. 2 с начальным участком пути нагружения. Тогда зависимости на рис. 3, рис. 4 могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$2M'_p = \frac{d\Delta S_1}{d\Delta\Omega_1^p} = \frac{a}{1 + b \operatorname{tg} \vartheta}, \quad 2M'_t = \frac{d|S_2|}{d|\Delta\Omega_2^p|} = \frac{c}{1 + d \operatorname{ctg} \vartheta}. \tag{7}$$

Здесь a, c — значения модулей $2M'_p, 2M'_t$ при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$ соответственно; b и d — некоторые константы.

Проанализируем формулы (7). Видно, что при ϑ , стремящемся к нулю, касательный модуль $2M'_p$ стремится к a , а модуль $2M'_t$ — к нулю. То, что модуль $2M'_t$ уменьшается с уменьшением угла ϑ , видно из рис. 4 (образцы 4149, 4108, 4110). Если угол ϑ увеличивать монотонно от 0 до $\pi/2$, то из (7) следует, что модуль $2M'_p$ падает от значения a до нуля (см. рис. 3), модуль $2M'_p$ равен нулю для образца с номером 4040. При этом модуль $2M'_t$ увеличивается с ростом угла ϑ потому, что $\operatorname{ctg} \vartheta$ уменьшается, а при $\vartheta = \pi/2$ модуль $2M'_t$ равен значению c . Если угол ϑ превосходит значение $\pi/2$, то тангенс и котангенс угла ϑ становятся отрицательными, значение модуля $2M'_t$ остается еще положительным, но больше значения c (сравни на рис. 4 диаграммы деформирования для образцов 4149, 4040, 4078). Вместе с тем значение модуля $2M'_p$, как видно из (7) и рис. 3 для образцов 4078, 4149, становится отрицательным, стремясь по абсолютной величине к $+\infty$.

Проведенный анализ показывает, что характер изменения начальных модулей деформирования на рис. 3, 4 достаточно точно описывается формулами (7). Возникает вопрос: являются ли параметры a, b, c, d произвольными величинами. Есть ли между ними какая-то связь, диктуемая ограничениями на вид определяющих соотношений между приращениями напряжений и деформациями, вытекающими из непрерывности сплошной среды, и отсюда невозможностью слежения за историей догружения среды в каждой ее точке. С этим также связан вопрос определения собственного тензорного базиса для приращений напряжений и деформаций.

В заключение отметим, что из (7) следуют зависимости:

$$d(\Delta\Omega_1^p) = \frac{1}{a} d(\Delta S_1) + \frac{b}{a} d(|\Delta S_2|), \quad (8)$$

$$d(|\Delta\Omega_2^p|) = \frac{d}{c} d(\Delta S_1) + \frac{d(|\Delta S_2|)}{c}.$$

Спрашивается, в какой связи должны находиться коэффициенты $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$.

Должно ли иметь место соотношение

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}. \quad (9)$$

Если справедливо (9), то тогда матрица коэффициентов в (8) — симметрическая, для нее строятся собственные числа и собственные векторы (тензоры), составляющие ортогональный (ортонормированный) базис. Необходимость (9) и равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов (8), — это тема другой работы.

ВЫВОДЫ

Установлено, что модуль ортогонального догружения увеличивается с ростом угла догрузки, а модуль простого догружения уменьшается. Определены закономерности деформирования материалов при сложном нагружении.

Показано, что поведение пластических материалов при сложном нагружении не отвечает законам деформационной теории пластичности и теории пластического течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hencky H. Zur theorie plastischer deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nachspannungen, Zs. f. angew. Math. u. Mech, 1924, Vol. 4.

2. **Надаи А.** Пластичность. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.
3. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. — М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
4. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
5. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1988.
6. **Можаровский Н. С., Бобырь Н. И.** Упругопластическое деформирование и разрушение материалов в условиях плоского напряженного состояния при различных путях пропорционального нагружения // Пробл. прочности. — 1980. — № 10.
7. **Жуков А. М.** Сложное нагружение и теории пластичности изотропных материалов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1955. — № 8.
8. **Жуков А. М., Работнов Ю. Н.** Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении // Инж. сб. — 1954. — № 8.
9. **Нахди Р. М., Роулли Дж.** Экспериментальное изучение зависимости между напряжениями и деформациями в пластической области при двухосном напряженном состоянии // Механика: сб. пер. — 1955. — № 3(31).
10. **Budianski B., Dow N. F., Peters R. W., and Shepferd R. P.** Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity, Proc. I-st U. S. Nat. Congr., Appl. Mech., 1951, N. Y., 1952.
11. **Дощинский Г. А.** Об экспериментальной проверке закона подобия девиаторов в теории пластичности // Изв. ТПИ. — 1974. — Т. 188.
12. **Шемякин Е. И.** Анизотропия пластического состояния // Числ. методы механики сплошной среды. — 1973. — Т. 4. — № 4.
13. **Христианович С. А.** Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1981.
14. **Бабаков В. А.** Модель пластического тела с внутренним трением и дилатансией // ФТПРПИ. — 1987. — № 3.
15. **Коврижных А. М.** Об условиях локализации пластической деформации в металлах // Докл. РАН. — 1996. — Т. 351. — № 5.
16. **Чанышев А. И.** О пластической деформации материалов при сложном нагружении // ПМТФ. — 1979. — № 4.
17. **Жигалкин В. М.** О характере упрочнения пластического материала. Сообщ. 1 // Пробл. прочности. — 1980. — № 2.
18. **Жигалкин В. М.** О характере упрочнения пластического материала. Сообщ. 2 // Пробл. прочности. — 1980. — № 2.
19. **Жигалкин В. М., Гинзбург И. Э., Семенов В. Н., Усольцева О. М.** Влияние сложного нагружения с частичными разгрузками на характер упрочнения стали // ФТПРПИ. — 1994. — № 3.
20. **Аннин Б. Д., Жигалкин В. М.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
21. **Рыхлевский Я.** Разложение упругой энергии и критерии предельности // Успехи механики. — 1984. — Т. 7. — № 3.
22. **Чанышев А. И.** О пластичности анизотропных сред // ПМТФ. — 1984. — № 2.
23. **Chastenot de Gery J.** Une representation intrinseque simple du tenseur de deformation (cas anisotrope) par de operateurs lineares de \square espace a trois dimensions, Compte rend us Acad. Sci. Paris, 1959, Vol. 248, No. 12.
24. **Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // ПММ. — 1963. — Т. 27. — Вып. 5.

Поступила в редакцию 5/VIII 2014