

УДК 539.370

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ ВЫПУЧИВАНИЯ ПЛАСТИН ПРИ РАДИАЛЬНОМ СЖАТИИ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Нелинейные краевые задачи осесимметричного выпучивания шарнирно опертых и защемленных пластин при радиальном сжатии сформулированы для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с независимыми полями конечных перемещений и поворотов. Многочленные решения получены методом стрельбы с контролируемой точностью. В зависимости от параметра нагрузки исследовано ветвление решений задачи и построена параметрическая диаграмма ветвления. Приведены графики форм выпучивания, соответствующих трем ветвям решений. Результаты численного анализа задач согласуются с известными теоретическими результатами.

Ключевые слова: осесимметричное выпучивание, пластина, численный анализ.

**Введение.** Задача о выпучивании радиально-сжатой круговой пластины принадлежит к числу наиболее известных задач теории упругости и давно привлекает внимание не только механиков, но и математиков. Наряду с задачей Эйлера об устойчивости колонны она является классической задачей теории ветвления решений нелинейных краевых задач. Относящиеся к рассматриваемой задаче публикации можно разделить на две группы: работы, посвященные аналитическим методам решения задачи, и работы, посвященные ее теоретическому анализу. В [1, 2] получены точные аналитические решения линейризованных задач осесимметричного выпучивания пластины с защемленным и шарнирно опертым граничным контуром, которые трактуются как задачи устойчивости плоского состояния пластины. Решения, выраженные в функциях Бесселя, позволили обнаружить дискретный спектр собственных значений  $\lambda_n$  ( $n \in N$ ) параметра нагрузки  $\lambda$ . Кроме того, в работах [1, 3] обнаружен дискретный спектр линейризованной задачи для несимметричных (осциллирующих по окружной координате) форм выпучивания. Первое собственное значение у таких форм оказалось существенно бóльшим, чем у симметричных. Поэтому задача осесимметричного выпучивания пластины привлекает внимание исследователей.

Нелинейная задача осесимметричного выпучивания пластины при радиальном сжатии впервые сформулирована в [4] на основе системы уравнений Кармана (четвертого порядка). Методом разложения в степенные ряды по независимой переменной для шарнирно опертой пластины исследованы решения, отвечающие от первого собственного значения  $\lambda_1$  линейризованной задачи. Другие краевые задачи в такой постановке позднее анализировались прямыми методами (см. [5]).

Работа [6] положила начало теоретическому анализу нелинейных задач осесимметричного выпучивания радиально-сжатых пластин. В [6] доказано, что у шарнирно опертой пластины в интервале  $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$  имеется только одна (зеркально-симметричная) пара выпученных форм. В статье [7], посвященной обоснованию метода линейризации нелинейных задач выпучивания оболочек, доказано, что в задаче о пластине число  $\lambda$  является точкой бифуркации решения тогда и только тогда, когда оно совпадает с собственным значением линейризованной задачи. В работах [8–10] установлено, что у защемленных и

шарнирно опертых пластин для всех  $\lambda > \lambda_n$  существует  $n$  пар осесимметричных выпученных форм с  $n - 1$  внутренними узлами. Основные результаты работ [8–10] опубликованы в сборнике [11], а результаты [7] включены в монографию [12].

В настоящее время рассматриваемый класс нелинейных задач достаточно полно изучен теоретически. Однако недостаточно внимания уделялось получению численных решений этих задач. Нетривиальные решения большой нормы представлены в работе [13], однако получены они за счет упрощения математической постановки задачи: вместо краевой задачи четвертого порядка решалась не адекватная ей краевая задача для уравнения Бесселя относительно функции  $\sin \theta$  ( $\theta$  — локальный угол поворота радиального элемента пластины).

В настоящей работе нелинейная задача осесимметричного выпучивания радиально-сжатой пластины формулируется и решается в уточненной постановке: с использованием системы шести нелинейных уравнений первого порядка, справедливых для произвольных углов поворота и учитывающих деформации поперечного сдвига.

**Система уравнений.** В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  круговая пластина задается уравнением

$$r = Rt \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad \forall z \in [-h, h],$$

где  $t$  — независимая переменная;  $R$  — радиус пластины;  $2h$  — толщина пластины. Изучается деформация пластины, в процессе которой ее срединная поверхность остается осесимметричной и представляется параметрическими зависимостями

$$r = Ry_2(t), \quad z = Ry_3(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi],$$

где  $y_2, y_3$  — искомые координаты точки.

Для анализа осесимметричной деформации пластины используются уравнения нелинейной модели деформации оболочки с независимыми полями конечных перемещений и поворотов [14]. Материал, из которого изготовлена пластина, считается трансверсально-изотропным и линейно-упругим. Исходная система уравнений включает определяющие соотношения

$$\begin{aligned} U_{11} &= (1 - \nu^2)F^{-1}T_{11} - \nu U_{22}, & V_{11} &= (1 - \nu^2)H^{-1}M_{11} - \nu V_{22}, \\ U_{13} &= \gamma F^{-1}T_{13}, & T_{22} &= \nu T_{11} + FU_{22}, & M_{22} &= \nu M_{11} + HV_{22}, \end{aligned} \quad (1)$$

кинематические зависимости

$$\begin{aligned} RV_{11} &= \theta', & RV_{22} &= t^{-1} \sin \theta, & U_{22} &= t^{-1}(y_2 - t), \\ y_2' &= (1 + U_{11}) \cos \theta + U_{13} \sin \theta, & y_3' &= -(1 + U_{11}) \sin \theta + U_{13} \cos \theta \end{aligned} \quad (2)$$

и статические уравнения

$$\begin{aligned} (tT_1)' - T_{22} + RtP_1 &= 0, & (tT_3)' + RtP_3 &= 0, & (tM_{11})' - M_{22} \cos \theta - RtT_{13} + RtQ_2 &= 0, \\ T_{11} &= T_1 \cos \theta - T_3 \sin \theta, & T_{13} &= T_1 \sin \theta + T_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

В (1)–(3)  $F = 2hE$ ;  $3H = 2h^3E$ ;  $\gamma = E/G$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $G$  — модуль поперечного сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\theta(t)$  — искомый угол поворота локального базиса относительно базиса цилиндрической системы координат;  $U_{iJ}(t)$ ,  $V_{ii}(t)$ ,  $T_{iJ}(t)$ ,  $M_{ii}(t)$  — компоненты метрических и изгибных деформаций, усилий и моментов в повернутом базисе;  $i = 1, 2$ ;  $J = 1, 2, 3$ ;  $T_1(t)$ ,  $T_3(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$ ,  $Q_2(t)$  — компоненты усилий, поверхностных сил и моментов в базисе цилиндрической системы координат; штрих обозначает производную по  $t$ .

Не зависящий от перемещений поворот порождает сдвиги поперечных волокон, мерой которых является метрическая компонента  $U_{13}(t)$ , связанная с перерезывающим усилием  $T_{13}(t)$  определяющим соотношением (1).

Уравнения (1)–(3) преобразуются в систему

$$\begin{aligned} y'_0 &= t^{-1}[(1 - \nu^2)y_1 - \nu \sin y_0], & y'_1 &= t^{-1}(\nu y_1 + \sin y_0) \cos y_0 + \varepsilon^{-1}f_3 - tq_2, \\ y'_2 &= \varepsilon\gamma t^{-1}f_3 \sin y_0 + (1 + \varepsilon f_1) \cos y_0, & y'_3 &= \varepsilon\gamma t^{-1}f_3 \cos y_0 - (1 + \varepsilon f_1) \sin y_0, \\ y'_4 &= t^{-1}[\nu f_2 + \varepsilon^{-1}(y_2 - t)] - tp_1, & y'_5 &= -tp_3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$f_1 = t^{-1}[(1 - \nu^2)f_2 - \varepsilon^{-1}\nu(y_2 - t)], \quad f_2 = y_4 \cos y_0 - y_5 \sin y_0, \quad f_3 = y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0$$

с шестью неизвестными функциями  $y_0 = \theta$ ,  $y_1 = tM_{11}R/H$ ,  $y_2 = r/R$ ,  $y_3 = z/R$ ,  $y_4 = tT_1/C$ ,  $y_5 = tT_3/C$  и параметрами  $\varepsilon^2 = h^2/(3R^2)$ ,  $p_J = P_J R/C$ ,  $q_2 = Q_2 R^2/H$ ,  $C = \varepsilon F$ .

Система (4) описывает нелинейный осесимметричный изгиб круговой пластины при заданных значениях параметров нагрузки  $p_1$ ,  $p_3$ ,  $q_2$ , параметров жесткости  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  и при заданных условиях закрепления опорного контура. Она сингулярна по переменной  $t$  в точке  $t = 0$ . При  $\gamma = 0$  система (4) формулирует задачу сильного изгиба пластины без поперечных сдвигов (модель Кирхгофа для больших поворотов).

Для системы (4) ставятся две краевые задачи об осесимметричных деформациях круговой пластины при сжатии равномерно распределенным по опорному контуру радиальным усилием интенсивности  $P$ . Поскольку поверхностная нагрузка отсутствует, в системе (4) следует задать  $q_2 = p_3 = p_1 = 0$ . В полюсе  $t = 0$  должны выполняться условия симметрии и регулярности  $y_0(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 0$ ,  $[t^{-1}y_5(t)]_{t \rightarrow 0} \rightarrow 0$ . Однако при численном анализе эти условия не реализуются из-за наличия полюсных особенностей в системе (4). Поэтому вместо них использованы асимптотически точные условия в близкой к полюсу точке  $t = \delta$ :

$$(\nu - 1)y_1 + \sin y_0 = 0, \quad (\nu - 1)(y_4 \cos y_0 - y_5 \sin y_0) + \varepsilon^{-1}(y_2 - \delta) = 0, \quad y_5 = 0. \quad (5)$$

Условия (5) обеспечивают выполнение в этой точке равенств  $T_{22} = T_{11}$ ,  $M_{22} = M_{11}$ ,  $T_3 = 0$ , которые должны иметь место в полюсе.

В граничной точке  $t = 1$  задаются условия подвижного шарнирного опирания (задача А)  $y_1(1) = 0$ ,  $y_3(1) = 0$ ,  $y_4(1) = -p$  или условия подвижного защемления (задача В)  $y_0(1) = 0$ ,  $y_3(1) = 0$ ,  $y_4(1) = -p$  ( $p = P/C$ ). Из уравнений (4) и граничных условий следует очевидный результат  $y_5(t) \equiv 0$  ( $T_3 \equiv 0$ ), который не использовался в вычислительном алгоритме, а применялся для контроля устойчивости решений по отношению к малым возмущениям граничных параметров.

Нелинейные краевые задачи А и В решались методом стрельбы из точки  $t = 1$  в точку  $t = \delta$ . Граничные условия (5) образуют систему неявных уравнений относительно дополнительных начальных параметров метода стрельбы. В зависимости от параметра нагрузки исследовалось ветвление решений краевых задач. При численной реализации алгоритма использовался пакет программ Mathcad.

**Результаты численного анализа.** Результаты решения краевых задач А и В для изотропной пластины с параметрами  $\nu = 0,25$ ,  $\gamma = 2,5$ ,  $\varepsilon = 0,025$  представлены в таблицах и на рисунках. При этом введены дополнительные обозначения:  $\lambda = P/P_{1a}$  — относительный параметр нагрузки;  $P_{1a} = Cp_{1a}$  — первое бифуркационное значение сжимающего усилия в случае шарнирного опирания;  $\theta(1)$  — граничное значение угла поворота;  $u = 1 - y_2(1) = 1 - r(1)/R$ ,  $w = |y_3(\delta)| = |z(\delta)|/R$  — параметры радиального и осевого перемещений граничных точек;  $\tau_i = T_{ii}/C$  — параметры внутренних усилий;  $\mu_i = M_{ii}R/H$  — параметры внутренних моментов;  $\mu(\delta) = \mu_1(\delta) = \mu_2(\delta)$ .

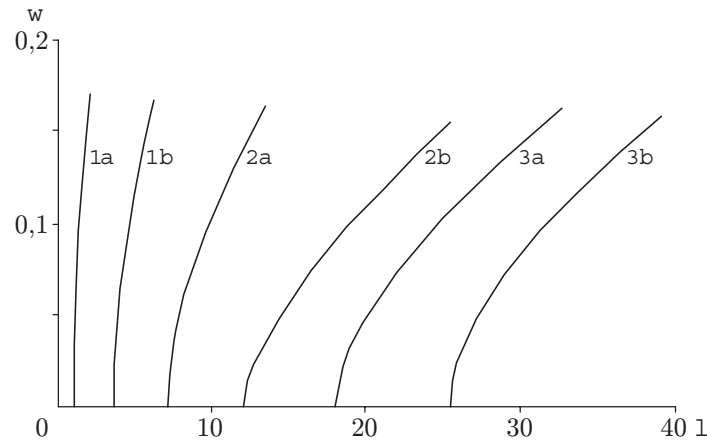


Рис. 1

В расчете получены первые три бифуркационных (критических) значения параметра  $p$  (при  $\delta = 0,05$ ):  $p_{1a} \simeq 0,1085$ ,  $p_{2a} \simeq 0,7719$ ,  $p_{3a} \simeq 1,958$  (задача А) и  $p_{1b} \simeq 0,3915$ ,  $p_{2b} \simeq 1,313$ ,  $p_{3b} \simeq 2,763$  (задача В). Соответствующие им значения параметра  $\lambda$  равны  $\lambda_{1a} = 1$ ,  $\lambda_{2a} \simeq 7,114$ ,  $\lambda_{3a} \simeq 18,05$ ,  $\lambda_{1b} \simeq 3,609$ ,  $\lambda_{2b} \simeq 12,101$ ,  $\lambda_{3b} \simeq 25,47$ .

На рис. 1 показаны ветви зависимости параметра  $w$ , пропорционального осевому перемещению в точке  $t = \delta$ , от параметра  $\lambda = p/p_{1a}$  для первых трех мод выпучивания пластины:  $1a$ ,  $2a$ ,  $3a$  — ветви решений задачи А;  $1b$ ,  $2b$ ,  $3b$  — ветви решений задачи В. Поскольку для невыпученных (плоских) состояний пластины  $w \equiv 0$ , этим состояниям соответствуют точки оси абсцисс, среди которых находятся и точки ветвления.

Рассматриваемая задача допускает парные решения, зеркально-симметричные относительно плоскости пластины. Вследствие этого рис. 1 можно дополнить симметричным отображением относительно оси абсцисс, если параметр  $w$  определить равенством  $w = z(\delta)/R$ .

Для задачи А в табл. 1, 2, 3 (ветви  $1a$ ,  $2a$ ,  $3a$  соответственно) представлены значения нескольких параметров состояния пластины для отдельных точек ветвей. В первых графах таблиц указаны номера точек. Первый параметр  $\theta(1)$  задавался в расчетах, остальные параметры вычислялись методом стрельбы. Соответствующие данные для задачи В (ветви  $1b$ ,  $2b$ ,  $3b$ ) приведены в табл. 4, 5, 6 (в расчетах задавался параметр  $\mu(1)$ , пропорциональный изгибающему моменту в граничной точке). Первые строки таблиц соответствуют точкам ветвления, лежащим на оси абсцисс (рис. 1).

На рис. 2–4 показаны формы меридиана пластины в выпученных состояниях, соответствующих отдельным точкам ветвей 1, 2, 3. Формы 2, 3, 4 на рис. 2,а соответствуют точкам первой ветви из табл. 1; формы 1, 2, 5 на рис. 2,б — точкам первой ветви из табл. 4; на рис. 3,а,б и 4,а,б показаны более высокие моды по точкам табл. 2, 5 и 3, 6 соответственно. Как видно, в обеих задачах формы первой ветви — без внутренних узлов, формы второй ветви — с одним узлом, формы третьей ветви — с двумя узлами. Радиальное перемещение граничной точки меридиана более заметно на рис. 4, поскольку у форм третьей ветви оно существенно больше, чем у более низких форм.

По приведенным в таблицах данным можно судить об эволюции силовых параметров пластины. Параметры усилий имеют наибольшие по модулю значения на граничном контуре, причем с ростом  $\lambda$  параметр  $\tau_2$  растет быстрее, чем  $\tau_1$ . Наибольшие значения изгибающих моментов имеют место в центре пластины (последние графы таблиц). Радиальные и кольцевые усилия являются сжимающими, почти постоянными и равными в окрестности критических точек. При удалении от критических точек различие между

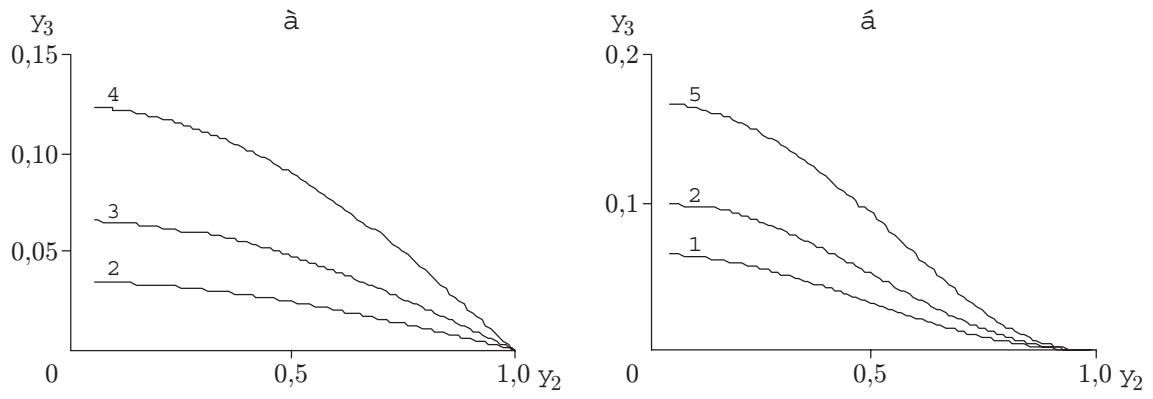


Рис. 2

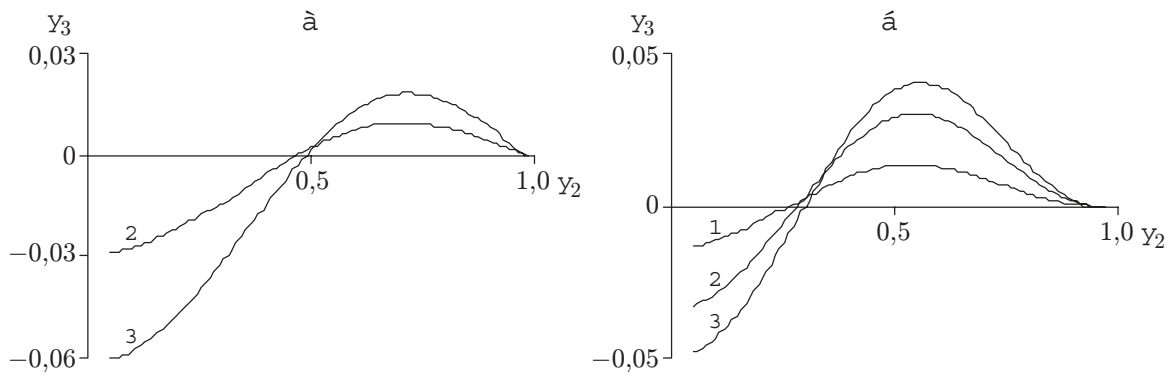


Рис. 3

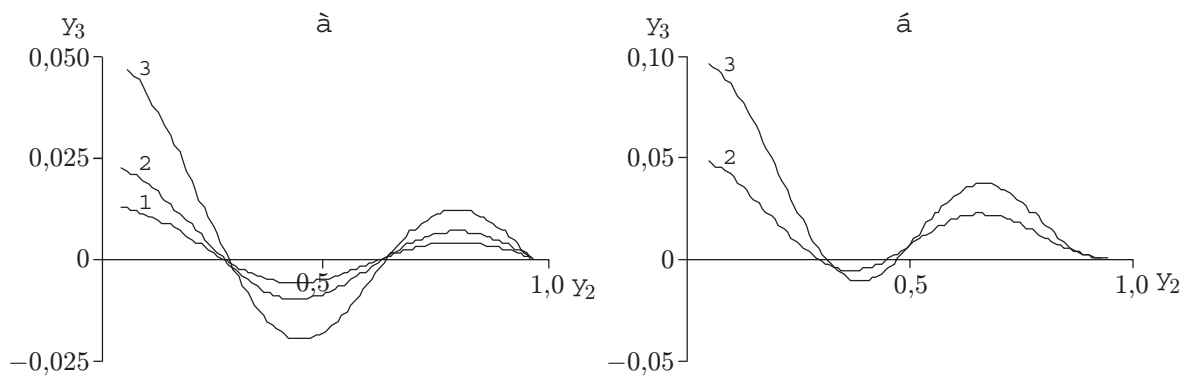


Рис. 4

Таблица 1

| Номер точки | $\theta(1)$ | $\lambda$ | $10u$  | $w$    | $\tau_1(1)$ | $\tau_2(1)$ | $\mu(\delta)$ |
|-------------|-------------|-----------|--------|--------|-------------|-------------|---------------|
| 0           | 0           | 1         | 0,0203 | 0      | -0,1085     | -0,1085     | 0             |
| 1           | 0,01        | 1,002     | 0,0206 | 0,0068 | -0,1087     | -0,1095     | 0,0233        |
| 2           | 0,05        | 1,042     | 0,0260 | 0,0336 | -0,1130     | -0,1323     | 0,1141        |
| 3           | 0,10        | 1,162     | 0,0424 | 0,0658 | -0,1255     | -0,2010     | 0,2157        |
| 4           | 0,20        | 1,554     | 0,1011 | 0,1228 | -0,1653     | -0,4458     | 0,3622        |
| 5           | 0,30        | 2,050     | 0,1856 | 0,1704 | -0,2125     | -0,7954     | 0,4444        |

Таблица 2

| Номер точки | $\theta(1)$ | $\lambda$ | $10u$  | $w$     | $\tau_1(1)$ | $\tau_2(1)$ | $\mu(\delta)$ |
|-------------|-------------|-----------|--------|---------|-------------|-------------|---------------|
| 0           | 0           | 7,114     | 0,1447 | 0       | -0,7719     | -0,7719     | 0             |
| 1           | 0,03        | 7,216     | 0,1491 | -0,0173 | -0,7826     | -0,7922     | -0,3031       |
| 2           | 0,05        | 7,397     | 0,1570 | -0,0291 | -0,8016     | -0,8285     | -0,4980       |
| 3           | 0,10        | 8,252     | 0,1949 | -0,0607 | -0,8909     | -1,0022     | -0,9298       |
| 4           | 0,20        | 11,448    | 0,3482 | -0,1300 | -1,2174     | -1,6973     | -1,4312       |
| 5           | 0,25        | 13,505    | 0,4578 | -0,1636 | -1,4197     | -2,1862     | -1,5216       |

Таблица 3

| Номер точки | $\theta(1)$ | $\lambda$ | $10u$  | $w$    | $\tau_1(1)$ | $\tau_2(1)$ | $\mu(\delta)$ |
|-------------|-------------|-----------|--------|--------|-------------|-------------|---------------|
| 0           | 0           | 18,046    | 0,3672 | 0      | -1,9580     | -1,9580     | 0             |
| 1           | 0,03        | 18,201    | 0,3729 | 0,0130 | -1,9740     | -1,9850     | 0,5939        |
| 2           | 0,05        | 18,477    | 0,3832 | 0,0219 | -2,0023     | -2,0333     | 0,9778        |
| 3           | 0,10        | 19,791    | 0,4324 | 0,0459 | -2,1365     | -2,2639     | 1,8420        |
| 4           | 0,20        | 25,039    | 0,6375 | 0,1030 | -2,6626     | -3,2157     | 2,8734        |
| 5           | 0,30        | 32,707    | 0,9697 | 0,1635 | -3,3902     | -4,7262     | 3,9066        |

величинами этих усилий увеличивается. Сжимающие усилия увеличиваются у края пластины и уменьшаются при приближении к полюсу (до нуля), а при дальнейшем росте нагрузки в окрестности полюса образуется зона растяжения. Присущая первой ветви решений монотонность изменения усилий и моментов по координате нарушается при достаточно больших значениях параметра нагрузки. С увеличением нагрузки увеличиваются осцилляции усилий и моментов, а нелинейность наблюдается при все меньших отклонениях от плоского состояния равновесия.

**Заключение.** Результаты численного анализа решений исходной нелинейной задачи согласуются с результатами ее теоретического анализа [8–11]. Критические значения сжимающего усилия для изотропной пластины, полученные в точной нелинейной постановке, практически (до трех значащих цифр) совпадают с собственными значениями линеаризованной задачи [2, 5]. Глобальные решения нелинейной задачи получены методом стрельбы с контролируемой точностью (см. рис. 2–4). Параметрические условия разветвления представлены плоской проекцией (см. рис. 1). Оценка уровней потенциальной энергии равновесных состояний пластины при фиксированном параметре нагрузки показывает, что наименьший уровень имеют выпученные состояния первой ветви, а наибольший — плоские состояния.

Таблица 4

| Номер точки | $\mu_1(1)$ | $\lambda$ | $10u$  | $w$    | $\tau_1(1)$ | $\tau_2(1)$ | $\mu(\delta)$ |
|-------------|------------|-----------|--------|--------|-------------|-------------|---------------|
| 0           | 0          | 3,609     | 0,0734 | 0      | -0,3915     | -0,3915     | 0             |
| 1           | -0,3       | 4,017     | 0,0945 | 0,0640 | -0,4358     | -0,4869     | 0,4176        |
| 2           | -0,5       | 4,576     | 0,1249 | 0,0996 | -0,4965     | -0,6238     | 0,6104        |
| 3           | -0,7       | 5,213     | 0,1615 | 0,1297 | -0,5656     | -0,7874     | 0,7417        |
| 4           | -0,9       | 5,867     | 0,2013 | 0,1554 | -0,6366     | -0,9644     | 0,8306        |
| 5           | -1,0       | 6,193     | 0,2219 | 0,1670 | -0,6719     | -1,0557     | 0,8640        |

Таблица 5

| Номер точки | $\mu_1(1)$ | $\lambda$ | $10u$  | $w$     | $\tau_1(1)$ | $\tau_2(1)$ | $\mu(\delta)$ |
|-------------|------------|-----------|--------|---------|-------------|-------------|---------------|
| 0           | 0          | 12,101    | 0,2462 | 0       | -1,3130     | -1,3130     | 0             |
| 1           | -0,3       | 12,334    | 0,2553 | -0,0136 | -1,3382     | -1,3559     | -0,5914       |
| 2           | -0,7       | 13,287    | 0,2932 | -0,0329 | -1,4417     | -1,5332     | -1,2573       |
| 3           | -1,0       | 14,352    | 0,3362 | -0,0481 | -1,5572     | -1,7341     | -1,6213       |
| 4           | -1,5       | 16,478    | 0,4251 | -0,0736 | -1,7879     | -2,1474     | -1,9948       |
| 5           | -2,5       | 21,068    | 0,6330 | -0,1190 | -2,2859     | -3,1035     | -2,2428       |
| 6           | -3,5       | 25,524    | 0,8569 | -0,1554 | -2,7693     | -4,1198     | -2,2419       |

Таблица 6

| Номер точки | $\mu_1(1)$ | $\lambda$ | $10u$  | $w$    | $\tau_1(1)$ | $\tau_2(1)$ | $\mu(\delta)$ |
|-------------|------------|-----------|--------|--------|-------------|-------------|---------------|
| 0           | 0          | 25,468    | 0,5181 | 0      | -2,7633     | -2,7633     | 0             |
| 1           | -0,5       | 25,889    | 0,5332 | 0,0240 | -2,8089     | -2,8349     | 1,1428        |
| 2           | -1,0       | 27,094    | 0,5765 | 0,0481 | -2,9397     | -3,0408     | 2,1420        |
| 3           | -2,0       | 31,215    | 0,7273 | 0,0954 | -3,3868     | -3,7557     | 3,4299        |
| 4           | -3,0       | 36,432    | 0,9274 | 0,1386 | -3,9529     | -4,6979     | 3,9113        |
| 5           | -3,5       | 39,156    | 1,0369 | 0,1582 | -4,2484     | -5,2099     | 3,9788        |

Сформулированные в работе уравнения позволяют ставить и решать сильнонелинейные осесимметричные задачи для изотропных и трансверсально-изотропных пластин также при иных нагрузках и граничных условиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Bryan G. H.** On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane // Proc. London Math. Soc. 1891. V. 22.
2. **Динник А. Н.** Об устойчивости сжатой круглой пластинки // Избр. тр. Киев: Изд-во АН УССР, 1956. С. 76–79.
3. **Nadai A.** Ueber das Ausbeulen von Kreisförmigen Platten // Ztschr. VDJ. 1915. N 9.
4. **Friedrichs K. O., Stoker J. J.** The non-linear boundary value problem of the buckled plate // Proc. Nat. Acad. Sci. 1939. V. 25. P. 535–540.
5. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.
6. **Friedrichs K. O., Stoker J. J.** The non-linear boundary value problem of the buckled plate // Amer. J. Math. 1941. V. 63. P. 839–888.

7. **Ворович И. И.** Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122, № 1. С. 37–40.
8. **Keller H. B., Keller J. B., Reiss E. L.** Buckled states of circular plates // Quart. Appl. Math. 1962. V. 20. P. 55–65.
9. **Berger M.** On von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate // Commun. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 687–719.
10. **Wolkowisky J.** Existence of buckled states of circular plates // Ibid. P. 549–560.
11. **Теория** ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. Дж. Б. Келлера, С. Антмана. М.: Мир, 1974.
12. **Ворович И. И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989.
13. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г.** Устойчивость тонкой круговой пластины при радиальном сжатии // Докл. РАН. 2001. Т. 377, № 6. С. 764–768.
14. **Шкутин Л. И.** Численный анализ осесимметричных форм выпучивания конических оболочек // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 159–165.

*Поступила в редакцию 21/IV 2003 г.*

---