

**О ПРОМОРАЖИВАНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА
ГРУНТОВ, НАСЫЩЕННЫХ РАСТВОРОМ
РАЗЛИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ**

УДК 536.4:551.3

А. Г. Егоров

**НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета, 420008 Казань**

Рассматривается динамика фазовых переходов при контакте двух пористых полупространств. Одно из них в начальный момент времени имеет температуру ниже нуля. Поры его частично заполнены льдом, частично — концентрированным раствором, находящимся при данной температуре в термодинамическом равновесии со льдом. Другое полупространство свободно ото льда и содержит более теплый и менее концентрированный раствор.

Наличие двухфазной зоны — области, в которой сосуществуют лед и раствор, — определяет специфику рассматриваемого процесса. Для его описания используется подход [1, 2], основанный на механике многофазных сред. Он применялся при изучении процессов протаивания либо промораживания пористых грунтов [1–4].

В рассматриваемой ситуации картина фазовых переходов усложнена тем, что включает в себя не только плавление льда в первоначально «холодной» части пространства, но при определенных условиях и промораживание грунта вблизи границы полупространств. Под промораживанием понимается появление зоны с повышенным содержанием льда в порах. При полном промерзании лед заполняет поры полностью. Получение в терминах начальных температур и концентраций критериев образования соответствующих зон является основной целью настоящей работы.

С практической точки зрения интерес к данной задаче вызван вопросом устойчивости ледопородных заграждений, создаваемых в вечной мерзлоте [5] последовательной закачкой концентрированного рассола и пресной воды. Полученные результаты, однако, могут оказаться полезными и при изучении других процессов в мерзлых грунтах. В частности, они указывают на один из возможных механизмов возникновения такого известного [6] природного образования, как ледяные линзы.

1. Постановка задачи. В начальный момент времени пористое пространство разбито плоскостью $x = 0$ на две части. При $x > 0$ одна часть пор занята льдом, другая — концентрированным раствором, находящимся со льдом в термодинамическом равновесии. При $x < 0$ поры полностью заполнены относительно более теплым и менее концентрированным раствором.

Процессы тепломассопереноса, протекающие с течением времени, в рассматриваемой системе могут быть описаны [1, 4] уравнениями

$$m(\rho_w - \rho_i) \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_w \frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad (1.1)$$

$$m \frac{\partial \mu c}{\partial t} + \frac{\partial c V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D \mu \frac{\partial c}{\partial x}; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_0(T - T_f) + \rho_i m L \mu) + C_w \frac{\partial}{\partial x} (V(T - T_f)) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (1.3)$$

$$\mu \in H(T + \gamma c - T_f); \quad (1.4)$$

$$C_0(\mu) = (1 - m)C_m + m(1 - \mu)C_i + m\mu C_w, \quad \lambda_0(\mu) = \lambda_i(1 - \mu) + \lambda_w \mu. \quad (1.5)$$

Здесь t — время; x — пространственная координата; m — пористость; μ — влажность (доля пор, занятых раствором); V — скорость фильтрации; c, T — концентрация и температура раствора; L — скрытая теплота плавления; D — коэффициент диффузии соли в воде; $T_f = 0$ — температура фазового перехода чистой воды; C_0, λ_0 — объемная теплоемкость и теплопроводность пористой среды; C_m, C_i, C_w — объемные теплоемкости скелета, льда и воды; λ_w, λ_i — коэффициенты теплопроводности пористой среды с порами, полностью заполненными водой и льдом; ρ_w, ρ_i — плотности воды и льда; γ — криоскопическая постоянная.

Соотношение (1.4) указывает на то, что μ лежит на графике соответствующей функции Хевисайда: $0 < \mu < 1$ при выполнении условия $T = T_f - \gamma c$ локального термодинамического равновесия, $\mu = 1$ (льда нет) при более высоких температурах, $\mu = 0$ (поры полностью заполнены льдом) при низких температурах.

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x > 0: \quad \mu = \mu_+, \quad c = c_+, \quad T = T_+ = T_f - \gamma c_+ \quad (0 < \mu_+ < 1), \\ t = 0, \quad x < 0: \quad \mu = \mu_- = 1, \quad c = c_-, \quad T = T_- \quad (T_- > T_f - \gamma c_-). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Скорость фильтрации подчиним граничному условию

$$-V_+/V_- = \zeta \geq 0, \quad (1.7)$$

где ζ — заданная константа; V_+ и V_- — скорости фильтрации при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ соответственно.

С учетом того, что разность $V_+ - V_-$ равна дисбалансу масс, возникающему в результате фазовых переходов (см. (1.1)):

$$V_+ - V_- = Q(t) = -m \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mu}{\partial t} dx,$$

соотношение (1.7) можно переписать в любой из следующих двух форм: $V_- = -Q/(1 + \zeta)$, $V_+ = \zeta Q/(1 + \zeta)$.

Неотрицательность ζ означает запрет «сквозного» потока жидкости через зону фазовых переходов: жидкость всюду на бесконечности движется либо к этой зоне (при $Q < 0$) либо от нее (при $Q > 0$).

В дальнейшем будет показано, что основные характеристики рассматриваемого процесса слабо зависят от выбора ζ . Там, где не оговорено, в качестве этой величины будет браться отношение проницаемостей среды при $x = \pm\infty$. Проницаемость при этом принимается [1] пропорциональной $\mu^{2/3}$, так что $\zeta = \mu_+^{2/3}$.

Сформулированная задача (1.1)–(1.7) допускает автомодельное решение. Введем соответствующую автомодельную переменную

$$\xi = x/2\sqrt{at} \quad (a = \lambda_w/C_w^0, \quad C_w^0 = (1 - m)C_m + mC_w)$$

и нормируем $(T - T_f)$, c , V на

$$T^0 = \frac{\rho_s mL}{C_w^0}, \quad \frac{T^0}{\gamma}, \quad \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_w} \sqrt{\frac{a}{t}},$$

сохранив за ними прежние обозначения (под T теперь понимается $(T - T_f)/T^0$).

Исходная задача сводится к отысканию решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\xi \mu' + V' = 0; \quad (1.8)$$

$$-\xi(\mu c)' + \varepsilon_v(Vc)' = (1/2)\varepsilon_d(\mu c')'; \quad (1.9)$$

$$-\xi(\alpha T + \mu)' + \varepsilon_m(VT)' = (1/2)(\beta T')'; \quad (1.10)$$

$$\mu \in H(c + T) \quad (1.11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \mu(\infty) = \mu_+, \quad \mu(-\infty) = 1, \quad V(\infty)/V(-\infty) = -\zeta, \quad c(\infty) = -T_+, \\ T(\infty) = T_+, \quad c(-\infty) = c_-, \quad T(-\infty) = T_-, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) = 1 - \alpha_0(1 - \mu); \quad \beta(\mu) = 1 + \beta_0(1 - \mu); \quad \varepsilon_v = (\rho_w - \rho_i)/\rho_w; \\ \varepsilon_d = D/a; \quad \varepsilon_m = \varepsilon_v m C_w / C_w^0; \quad \alpha_0 = m(C_w - C_i)/C_w^0; \quad \beta_0 = (\lambda_i - \lambda_w)/\lambda_w. \end{aligned}$$

В типичных ситуациях безразмерные параметры задачи невелики :

$$\varepsilon_v, \alpha_0, \beta_0 \sim 10^{-1}, \quad \varepsilon_m \sim 10^{-2}, \quad \varepsilon_d \sim 10^{-2} - 10^{-3}, \quad (1.13)$$

в силу чего имеет смысл рассмотреть вначале простейшую модель, положив их в (1.8)–(1.10) равными нулю. Как будет видно из дальнейшего, такая модель не только хорошо описывает ряд качественных сторон исследуемого процесса, но во многих случаях дает и неплохое количественное согласование с общей моделью (1.8)–(1.12).

2. Анализ простейшей модели. Из уравнения (1.9) и граничных условий (1.12) вытекает, что количество примеси μc в единице порового объема является известной кусочно-постоянной функцией ξ :

$$\mu c = \theta(\xi) = \begin{cases} \theta_+ = \mu_+ c_+, & \xi > 0, \\ \theta_- = \mu_- c_-, & \xi < 0, \end{cases}$$

и уравнение (1.11) принимает вид $\mu \in H(\theta/\mu + T)$.

Разрешив его относительно μ , найдем

$$\mu = \mu(T, \theta) = \begin{cases} 1, & T \geq -\theta, \\ -\theta/T, & T \leq -\theta. \end{cases} \quad (2.1)$$

При этом уравнение (1.10) записывается в виде

$$-2\xi(T + \mu(T, \theta(\xi)))' = T'' \quad (2.2)$$

и служит для отыскания T . На него можно смотреть как на обычное уравнение теплопроводности с известной зависимостью теплоемкости k от температуры и пространственной координаты:

$$-2\xi k(T, \xi) T' = T'', \quad k = \begin{cases} 1, & T \geq -\theta(\xi), \\ 1 + \theta/T^2, & T \leq -\theta(\xi). \end{cases}$$

Решение соответствующей задачи монотонно убывает от T_- при $\xi = -\infty$ до T_+ при $\xi = \infty$. Согласно (2.1), влажность μ при этом также монотонно убывает в зонах двухфазности. Количество таких зон и характер поведения функции $\mu(\xi)$ зависят от того, как соотносятся между собой три величины: $\theta_+, \theta_-, \theta_* = -T(0)$.

Легко проверить, что пяти возможным вариантам их взаимного расположения ($\theta_- > \theta_*, \theta_- < \theta_* < \theta_+, \theta_- < \theta_+ < \theta_*, \theta_+ < \theta_* < \theta_-, \theta_+ < \theta_- < \theta_*$) соответствуют пять различных режимов поведения μ , изображенных схематично на рис. 1 (А–Д).

Значение $T(0)$ зависит от $\theta_-, \theta_+, T_-, T_+$. При фиксированных прочих параметрах оно увеличивается с ростом T_- . Ясно поэтому, что по мере повышения температуры T_- от T_+ до ∞ различные режимы поведения влажности реализуются в порядке $B \rightarrow B \rightarrow A$ при $\theta_- < \theta_+$ и $L \rightarrow L \rightarrow A$ при $\theta_+ < \theta_-$.

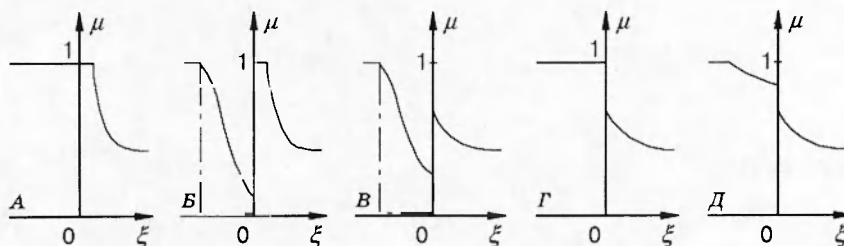


Рис. 1

Наибольший интерес вызывают режимы B и B , характеризующиеся образованием при отрицательных ξ вблизи нуля зоны повышенного содержания льда в порах. Расширенно толкуя известный термин, назовем такую зону линзой. Из (2.1) следует, что с уменьшением c_- содержание льда в линзе увеличивается. В пределе $c_- \rightarrow 0$ в ней $\mu \rightarrow 0$. Этой ситуации отвечают штрихпунктирные линии на рис. 1. Соответствующую линзу, имея в виду отсутствие в ней жидкой фазы, будем называть непроницаемой.

Рассмотрим случай $c_- = 0$ более подробно. Здесь $\hat{v}_- = 0$, и поэтому в силу положительности θ_+ возможна лишь цепочка $B \rightarrow B \rightarrow A$ реализации режимов поведения влажности с увеличением T_- . Наиболее существенным при этом является вопрос о критической температуре T_-^* , для которой при фиксированных μ_+ и T_+ осуществляется переход между режимами A и B , т. е. образуется непроницаемая линза.

Для нахождения критической температуры как корня уравнения $\theta_+(T_-, \mu_+, T_+) = 0$ необходимо многократное решение дифференциального уравнения (2.2). Оно решалось численно на сгущающейся вблизи $\xi = 0$ сетке методом верхней релаксации. Счетный интервал в силу быстрого затухания T, μ при $|\xi| \rightarrow \infty$ брался конечным, а граничные условия вида (1.12) переносились из бесконечности на его концы. Заведомо достаточным в расчетах оказывался выбор в качестве расчетного интервала отрезка $|\xi| < 4$.

Результаты расчетов представлены на рис. 2 (штриховые кривые) в виде линий уровня функции $U_1(T_+, \mu_+) = -T_-^*/T_+$. Это отношение монотонно растет с увеличением T_+ от единицы при $T_+ = -\infty$ до бесконечности при $T_+ = 0$. Имеет место немонотонный характер зависимости критической температуры от μ_+ . Свое минимальное значение, равнос единице, U_1 достигает в точках $\mu_+ = 1$ и $\mu_+ = 0$, а максимальное — в промежуточной точке μ_+^{\max} . Величина μ_+^{\max} практически не зависит от T_+ и равна примерно 0,33.

Обратим внимание на то, что непроницаемая линза возникает и в той ситуации, когда первоначально льда в пористой среде вообще не было ($\mu_+ = 1$). Более того, необходимость

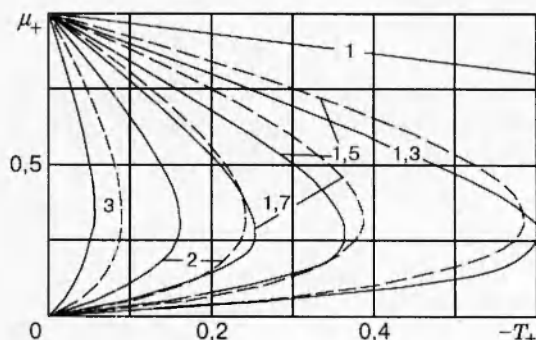


Рис. 2

ее образования проще всего понять именно в этом случае.

Действительно, если бы фазовый переход вода — лед здесь отсутствовал, то температура среды была бы распределена по закону $T = T_+ - (1/2)(T_+ - T_-)\operatorname{erfc}(\xi)$, принимая при $\xi = 0$ значение $T_0 = (T_+ + T_-)/2$. Зависимость $c(\xi)$ представляла бы собой ступенчатую функцию, совпадая с нулем при $\xi < 0$ и с $-T_+$ при $\xi > 0$. В то же время в силу однофазности решения задачи всюду должно было бы выполняться неравенство $T(\xi) > -c(\xi)$. Критической по отношению к нему является точка $\xi = 0$. Условие однофазности $T_0 > -c(-0)$ может быть выполнено в ней лишь при достаточно высоких T_- — тогда, когда $T_- > T_-^* = -T_+$. Для меньших T_- графики $T(\xi)$ и $-c(\xi)$ пересекаются при отрицательных значениях ξ , что говорит о необходимости появления там линзы.

Аналогичные рассуждения можно провести и для общей постановки задачи (1.8)–(1.12). Роль диффузии при этом сведется к размазыванию ступеньки $c(\xi)$, а конвекции — к ее переносу вправо (при положительных V). Из геометрических соображений ясно, что первое будет препятствовать, а второе способствовать образованию линзы.

3. Анализ общей модели. Задача (1.8)–(1.12) в общей постановке решалась численно на сгущающейся вблизи $\xi = 0$ сетке, причем, как и раньше, граничные условия (1.12) переносились из бесконечности на концы $\xi = \pm 4$ счетного интервала. Применялся итерационный метод с расщеплением задачи по физическим процессам. На каждой итерации, исходя из значений V и $\theta = \mu c$, вначале методом верхней релаксации отыскивались функции T и μ как решение задачи (1.10), (2.1). Значения V после этого определялись интегрированием (1.8), а c — прогонкой из уравнения (1.9) при вычисленных на данном итерационном шаге функциях V и μ . Расчеты, как правило, проводились на сетке с числом узлов 100, примерно третья часть которых приходилась на зону линзы. Тестировались результаты на сетках, имеющих в 2 и 4 раза большее число узлов.

Результаты расчетов относительно слабо зависят от значений $\alpha_0, \beta_0, \epsilon_m$ с порядками величин, определенными в (1.13). Последнее указывает на то, что конвективным переносом тепла в изучаемых процессах можно пренебречь по сравнению с кондукцией. Конвективный перенос примеси, однако, существен в силу слабости диффузионного механизма.

Таким образом, отличие общей постановки задачи от упрощенной состоит главным образом в учете переноса (конвективного и диффузионного) примеси. Основываясь на проведенных расчетах, рассмотрим подробнее влияние этого на процесс линзообразования.

Как будет показано в дальнейшем, скорость фильтрации в зоне линзы всегда положительна. Слабо концентрированный рассол, таким образом, проталкивается здесь в область низких температур, что ведет к промерзанию пористой среды. Этот эффект работает и при отличных от нуля значениях c_- . Поэтому непроницаемая линза может, в отличие от простейшей модели, образовываться здесь и при $c_- > 0$. Собственно влияние конвективного массопереноса на значения μ, c, T зоной линзы (малые μ) и ограничивается. Вне зоны линзы пренебрежение конвекцией не приводит к сколько-нибудь заметному изменению искомых функций. Это легко понять, сравнив между собой первые два члена уравнения (1.9).

Из этого же уравнения видно, что влияние диффузионного переноса сказывается при малых ξ , т. е. опять же в зоне линзы. Поток примеси, направленный в эту зону из области высоких концентраций, снижает в ней локальную температуру замерзания, препятствуя тем самым росту линзы. Этот эффект приводит, в частности, к тому, что при $c_- = 0$ не всякая линза является непроницаемой, как было в простейшей модели.

На рис. 3 изображены схематично возможные режимы поведения функции $\mu(\xi)$ в случае $\theta_- < \theta_+$. Им соответствуют режимы А, Б, В простейшей модели. По мере увеличения T_- реализуются цепочки $B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A$ (низкие T_+) либо $B_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A$ (высокие T_+) изменения функции μ . В обоих случаях имеют место два критических значения T_- : 1) T_-^1 отвечает появлению у $\mu(\xi)$ локального минимума (переход $B_1 \rightarrow A$ либо $B_2 \rightarrow A$), т. е. началу образования линзы, 2) T_-^2 соответствует появлению точки, в которой μ обращает-

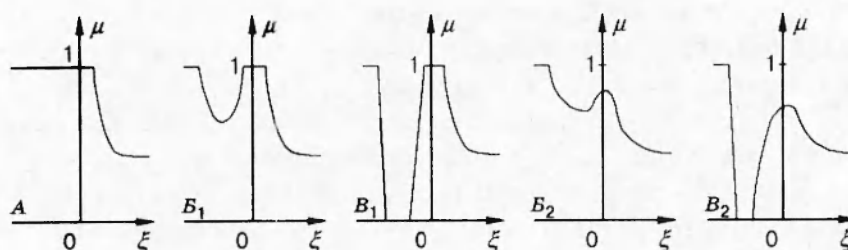


Рис. 3

ся в нуль (переход $B_1 \rightarrow B_1$ либо $B_2 \rightarrow B_2$), т. е. возникновению непроницаемой линзы. Значения критических температур зависят от μ_+ , T_+ , c_- , достигая при $c_- = 0$ своего минимума.

Для этого случая ($c_- = 0$) на рис. 2 (сплошные кривые) и рис. 4 приведены линии уровня функций $U_1(T_+, \mu_+) = -T_-^1/T_+$ и $U_2(T_+, \mu_+) = -T_-^2/T_+$. В расчетах принималось $\alpha_0 = \beta_0 = \varepsilon_m = 0$, $\varepsilon_d = 3 \cdot 10^{-3}$.

Величина U_1 неограниченно возрастает при $T_+ \rightarrow 0$, $0 < \mu < 1$. При $\mu_+ = 0$ она равна единице, а при $\mu_+ = 1$ несколько меньше единицы. Соответствующее значение может быть найдено с помощью рассуждений, подобных проведенным в п. 2 для аналогичной ситуации. При $\varepsilon_d \rightarrow 0$ оно равно примерно $1 - 2\sqrt{\varepsilon_d}$, что составляет 0,89 для заданного ε_d . Особая линия уровня $U_1 = 1$ выходит из точки $\mu_+ = 1$, $T_+ = 0$ и замыкается при $T_+ \rightarrow -\infty$ осью $\mu_+ = 0$.

Из рис. 2 видно, что критическое значение T_-^1 неплохо количественно согласуется с критическим значением T_-^* упрощенной модели. Некоторое снижение T_-^1 по сравнению с T_-^* объясняется действием диффузионного переноса примеси, в то время как конвекция, значимая лишь при малых μ , еще не проявляет себя.

Функция $U_2(\mu_+, T_+)$ достигает своего максимального значения ($\approx 1,87$) в точке $\mu_+ \approx 0,45$, $T_+ \approx -0,06$. Линии уровня ее при $U_2 > 1$ замкнуты, а при $U_2 < 1$ берут начало на прямой $\mu_+ = 1$ и асимптотически приближаются к оси $\mu_+ = 0$. В заштрихованной на рис. 4 области U_2 не определена. В ней вторая критическая температура не достигается, а значит, непроницаемая линза не образуется ни при каких значениях T_- . В частности, она не может возникнуть при $T_+ > T_+^{\min} \approx -0,018$ независимо от значений μ_+ , T_- .

Из двух критических температур U_1 и U_2 вторая уменьшается с ростом c_- значительно быстрее. Так, при увеличении c_- от нуля до 0,01 значение U_1 изменяется менее чем на 7%, в то время как T_+^{\min} снижается от $-0,018$ до $-0,21$. Эта величина уже при $c_- = 0,03$ достигает $-0,6$. Для пористости $m = 0,3$ и раствора NaCl указанным значениям соответствуют концентрация 4 г/л и температура -15°C . Ясно, таким образом, что необходимым условием образования непроницаемой линзы является контакт концентрированного раствора с практически чистой водой.

Точно так же ведут себя критические температуры с ростом коэффициента диффузии ε_d . Это иллюстрирует рис. 5, где приведены вычисленные при $\mu_+ = 0,3$, $c_- = 0$ значения функций $U_1(T_+)$ и $U_2(T_+)$ для $\varepsilon_d = 0,003$ (сплошные линии) и $\varepsilon_d = 0,01$ (штриховые).

Рассмотрим зависимость процесса линзообразования от величины ζ , характеризующей отношение потоков жидкости из бесконечности в зону фазовых переходов. Своих предельно возможных значений (0 и ∞) ζ достигает в отсутствие притока жидкости из мерзлой и талой зоны соответственно. Промежуточным значениям ζ отвечает нулевая скорость фильтрации в конечной точке области. В любом случае отличие величины $V(\xi)$ от нуля связано лишь с фазовыми переходами (см. (1.8)), и характер ее поведения определяется ви-

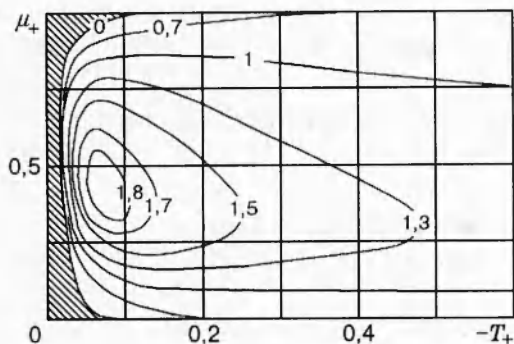


Рис. 4

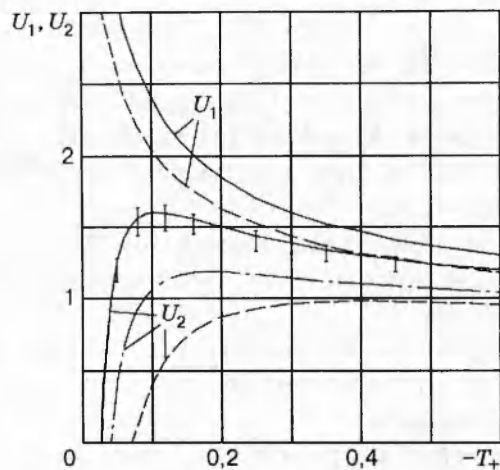


Рис. 5

дом $\mu(\xi)$. Из рис. 3 и уравнения (1.8) следует, что значение V растет при отрицательных ξ , достигает максимума в зоне линзы, а затем уменьшается. Отсюда вытекает положительность скорости фильтрации в области линзы: иначе $V(\xi)$ была бы всюду отрицательной и нулевая скорость не достигалась бы.

Малость V не позволяет конвекции сколько-нибудь существенно сказаться на основных характеристиках процесса вне области малых значений μ . Поэтому неудивительно, что первая критическая температура практически не зависит от выбора ζ . Несколько неожиданно, однако, что и вторая критическая температура слабо зависит от ζ ; это видно на рис. 5, где указан разброс U_2 для предельных значений ζ : минимум соответствует $\zeta = \infty$, максимум — $\zeta = 0$.

Этот факт нуждается в пояснениях, так как в отсутствие конвекции ($V \equiv 0$) вторая критическая температура вообще не определена и непроницаемая линза не образуется. В данном случае с уменьшением T_- в зоне линзы значение $\mu(\xi)$ становится все меньше, никогда не обращаясь в нуль. Аналогом второй критической температуры может служить такое значение T_- , при котором μ достигает заданного малого значения. Соответствующая ей функция U_2 , рассчитанная для пороговой величины $\mu_+ = 0,03$, приведена на рис. 5 штрихпунктирной линией.

При больших значениях $-T_+$ ее отклонение от аналогичных кривых, построенных с учетом конвективного массопереноса, невелико. Это свидетельствует о том, что основной вклад в образование непроницаемой линзы здесь связан с диффузией. С ростом T_+ расхождение указанных кривых увеличивается. Конвекция играет все большую роль. Но одновременно с этим значение скорости V^{\max} в зоне линзы все меньше зависит от выбора ζ , что связано с увеличением доли внутренних перетоков в зоне фазовых переходов по сравнению с притоком в нее жидкости из бесконечности: плавление и замораживание в разных частях зоны компенсируют друг друга. Характеризующее это явление и не зависящее от выбора ζ отношение $|V^{\max} - V_+|/|V_+ - V_-|$, вычисленное для второй критической температуры при $T_+ = -0,05$, равно 1,4, а при $T_+ = -0,5$ оно составляет лишь 0,27.

Слабая зависимость искомых характеристик от выбора ζ в известной мере оправдывает принимаемое в настоящей работе значение ζ .

Автор благодарит В. А. Мироненко, обратившего внимание на данную задачу, и А. В. Лапина за полезные обсуждения вычислительных аспектов. Работа поддержана грантом Московской государственной геолого-разведочной академии (код проекта 25-7.2-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.** Образование двухфазной зоны при промерзании пористой среды. М., 1986 (Препр. / АН СССР. ИПМ; № 269).
2. **Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.** Об образовании двухфазной зоны при кристаллизации смеси в пористой среде // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288, № 3. С. 621–624.
3. **Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г.** Математическая модель замерзания — таяния засоленного мерзлого грунта // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 57–66.
4. **Егоров А. Г., Костерин А. В., Шешуков А. Е.** Одномерные задачи протаивания мерзлого грунта фильтрующимся раствором // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 149–160.
5. **А.с. 15079977 СССР.** Способ создания противofильтрационных завес / В. А. Мироненко, Ф. Г. Атрощенко, В. Г. Румынин // Открытия. Изобретения. 1989. № 34.
6. **Цытович Н. Ф.** Механика мерзлых грунтов. М.: Высш. шк., 1973.

*Поступила в редакцию 19/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 5/V 1996 г.*
