для сжатия с однородной деформацией ниже примерно в 6,35 раза коэффициента в (2). Таким образом, если допускать возможность создания произвольных начальных данных, исследованные автомодельные решения описывают более экономичную по энергетическим затратам сравнительно с [4—6] схему сжатия, приводящую к требуемому значению эффективности сжатия.

Указанным свойством обладают также изученные в данной работе решения, близкие к автомодельным: с более простыми, нежели автомодельное, начальными распределениями, с постоянным давлением на сжимающем поршне.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Н. В. Пулькиной за помощь в проведении расчетов.

Поступила 7 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Забабахин Е. Б., Симоненко В. А.** Сферическая центрированная волна сжатия.— ПММ, 1978, т. 42, № 3.
2. **Каждан Я. М.** К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня.— ПМТФ, 1977, № 1.
3. **Анисимов С. И., Иванов М. Ф., Иногамов Н. А.** Динамика лазерного сжатия и нагревания простых мишеней. Препринт ИТФ АН СССР, 1977.
4. **Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.** Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы.— ДАН СССР, 1974, т. 218, № 6.
5. **Kidder R. E.** Theory of homogeneous isentropic compression and its application to laser fusion.— Nuclear fusion, 1974, vol. 14, N 1.
6. **Демченко В. В.** Сравнительное исследование некоторых процессов сжатия.— ЖВММФ, 1979, т. 19, № 2.
7. **Свалов А. М.** К вопросу о сжатии сферических мишеней.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 3.
8. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
9. **Спитцер Л.** Физика полностью ионизированного газа. М.: Мир, 1965.

УДК 533.6.011.8

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ОГРАНИЧЕННОМ КРУГЛОМ КАПИЛЛЯРЕ

И. Г. Неудачин, К. Черчиньяни

(*Свердловск, Милан*)

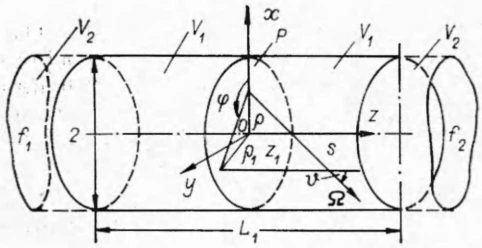
Течение Пуазейля в круглом капилляре неограниченной длины исследовалось численными [1] и вариационными методами [2, 3]. Работы по этой проблеме часто публикуются в трудах конференций по динамике разреженного газа (см., например, 4]). Реально длина канала ограничена. В этом случае, как правило, рассматриваются частные задачи о течении газа в свободномолекулярном [5] и вязком режимах [6]. Поэтому представляет интерес решение задачи во всем диапазоне чисел Кнудсена Kn(Kn $= \lambda_1/r$, отношение средней длины свободного пробега молекул λ_1 к радиусу капилляра r).

Проблема несколько упрощается, если предположить, что канал длинный: отношение длины капилляра к его радиусу $L_1 = l/r \gg 1$. В качестве исходного уравнения для функции распределения молекул по скоростям выбрано уравнение БГК [7]. Решается линеаризованная задача путем сведения исходного уравнения к интегральному уравнению Фредгольма для средней скорости молекул. Решение последнего находится методом Галеркина [8, 9].

1. Пусть газ перетекает из первого сосуда во второй. Температуры газа в сосудах одинаковы, числовые плотности отличаются незначительно. Ось z ориентируем по направлению течения газа, как показано на фиг. 1. Оси x и y расположим в плоскости среднего поперечного сечения канала. Начало координат находится в центре капилляра.

Примем в качестве масштабов величины

$$r,\ n_1,\ h^{1/2} = (2RT_1)^{1/2},\ T_1,\ n_1 h^{-3/2},\ \eta_1 = n_1 m v \lambda_1/2$$



Фиг. 1

для длины, числовой плотности газа, средней скорости газа **u** и скорости молекулы c, температуры T, функции распределения молекул по скоростям f и для вязкости η соответственно. Здесь R — газовая постоянная; $v = (8RT_1/\pi)^{1/2}$; $\lambda_1 = (\sqrt{2}\pi n_1\sigma^2)^{-1}$; m — масса молекулы; σ — диаметр молекулы. Индексом 1 отмечены параметры газа в первом сосуде, индексом 2 — во втором.

Молекулы из первого сосуда через сечение $z = -L$ $(L = L_1/2)$ попадают в канал с функцией распределения f_1, а из второго сосуда — через сечение $z = L$ с функцией распределения f_2. Рассматривается диффузное отражение частиц от стенок канала. Их функция распределения равна f_3. Она задана в предположении, что плотность газа линейно зависит от координаты z:

$$(1.1)\qquad f_1 = \pi^{-3/2}\exp(-c^2),\ f_2 = n_2 f_1,\ f_3 = [1 - K(L+z)]f_1,$$
$$K = (1 - n_2)/L_1.$$

Условия (1.1) являются граничными для уравнения БГК [10]. Они определяют функции распределения молекул, скорости которых направлены внутрь капилляра:

$$(1.2)\qquad \mathbf{c}\partial f/\partial\mathbf{s} = \delta n(f_0 - f),\ f_0 = f_1(1 + \nu + 2\mathbf{cu}),$$
$$n = 1 + \nu,\ \nu = -K(L+z),\ \delta = \sqrt{\pi}/2\mathrm{Kn}.$$

Здесь f_0 — линеаризованная локальная максвелловская функция распределения молекул; n — числовая плотность молекул газа; $\mathbf{s}$ — радиус-вектор точки наблюдения с направлением $\mathbf{\Omega}$ ($\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор в направлении скорости $\mathbf{c} = c\mathbf{\Omega}$). Сделано предположение, что модуль средней скорости газа $u \ll 1$ и абсолютная величина возмущения числовой плотности $|\nu| \ll 1$. Представим искомую функцию распределения в виде $f = f_1(1 + \nu + h_1)$, где возмущение функции распределения $|h_1| \ll 1$.

Будем считать, что вследствие большой длины канала можно пренебречь концевыми эффектами и **u** имеет только одну составляющую, направленную по оси z. Тогда скорость не будет зависеть от координаты z и все поперечные сечения канала станут равноправными. Поэтому можно выбрать для исследования сечение $z = 0$. В такой постановке задачи средняя скорость газа зависит только от одной координаты — расстояния ρ от точки наблюдения до оси z. Воспользовавшись определением средней скорости газа через функцию распределения

$$u = \int fc\cos\vartheta d\mathbf{c},\quad d\mathbf{c} = c^2 dc d\mathbf{\Omega},\quad d\mathbf{\Omega} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

и уравнением (1.2), получим интегральное уравнение для определения средней скорости молекул в направлении оси z:

$$(1.3)\qquad u = \pi^{-3/2}\int\limits_{V_1}(K + 2\delta u)\,I_3(\delta s)\cos^2\vartheta ds d\mathbf{\Omega},$$

где V_1 — объем канала; ϑ — угол между вектором Ω и осью z; s — модуль радиуса-вектора $\mathbf{s}$; φ — полярный угол в плоскости $z = 0$ (см. фиг. 1). В интегральное уравнение Фредгольма второго рода (1.3) входит интеграл Абрамовица [11, 12] I_3. В общем случае этот интеграл определяется следующим образом:

$$I_m(t) = \int\limits_0^\infty c^m\exp(-c^2 - t/c)\,dc.$$

2. Для решения уравнения (1.3) применим метод Галеркина [8]. В качестве базовых выберем функции 1 и ρ^2, где $\rho^2 = x^2 + y^2$. Разложение средней скорости в системе базовых функций имеет вид

$$u/K = C - D\rho^2, \tag{2.1}$$

где C и D — коэффициенты разложения, зависящие от параметров δ и L. Подставляя выражение (2.1) в уравнение (1.3), после интегрирования по среднему поперечному сечению P (см. фиг. 1) с весами 1 и ρ^2 получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов C и D:

$$b_{11}C + b_{12}D = b_1, \quad b_{21}C + b_{22}D = b_2. \tag{2.2}$$

Коэффициенты b_{ij} и b_i содержат кратные интегралы

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+1}}{2(i+j-1)} + c_{ij}, \quad b_i = \frac{c_{i1}}{2\delta}, \quad i, j = 1, 2, \tag{2.3}$$

$$c_{ij} = (-1)^{j+1}\frac{8\delta}{\pi^{3/2}}\int_0^1 \rho^{2i-1}d\rho \int_{V_1/4} I_3(\delta s)\,\rho_1^{2(j-1)}\cos^2\vartheta\, ds\, d\Omega,$$

где $\rho_1^2 = \rho^2\sin^2\vartheta + \rho^2 - 2\rho(\rho - \rho_0\cos\varphi_0)\,s/s_0$ (индекс 0 относится к координатам точки на поверхности объема капилляра V_1). Вследствие симметрии по координате z и углу φ интегрирование выполняется по одной четвертой части объема. Зная величины C и D, можно определить приведенный расход газа:

$$Q = \frac{4}{K}\int_0^1 \rho u\, d\rho = 2C - D. \tag{2.4}$$

Результаты расчетов по формуле (2.4) проиллюстрированы на фиг. 2. Кривые *1—4* соответствуют длинам каналов $L_1 = \infty$; 40; 20; 10. Время вычисления на ЭВМ значительно сокращается, если воспользоваться разложением $I_3(\delta s)$ в ряд по степеням δs при условии, что $\delta L \leqslant 2$ [11, 12].

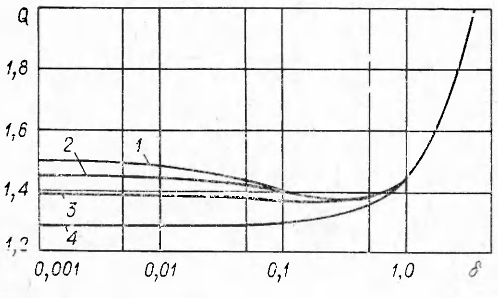
Для больших значений произведения $\delta L > 2$ удобно воспользоваться асимптотическим представлением интегралов Абрамовица. С этой целью в каждом из коэффициентов b_{ij}, b_i выделяется часть, дающая коэффициенты a_{ij} для уравнений, определяющих решение, т. е. коэффициенты C и D, для неограниченного длинного канала:

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+1}}{2(i+j-1)} + J_{ij}, \quad a_i = \frac{1}{2\delta}J_{1i}. \tag{2.5}$$

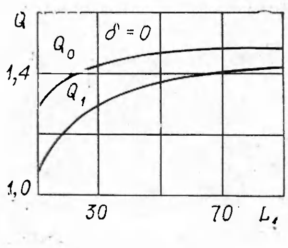
Символами J_{ij} обозначены определенные интегралы

$$J_{ij} = (-1)^i\frac{2\delta}{\pi}\int_0^1 \rho^{2j-1}d\rho \int_{P/2} \rho_1^{2(i-1)} I_0(\delta s)\, ds\, d\varphi,$$

где $\rho_1^2 = \rho^2 + s^2 + 2\rho s\cos\varphi$. Вследствие симметрии по углу φ интегрирование выполняется по половине поперечного сечения канала P (см. фиг. 1).



Фиг. 2



Фиг. 3

δ	0	0,01	0,1	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Q	1,5045	1,4763	1,4039	1,4576	1,6559	1,8772	2,1079	2,3438
Q_2	1,5045	1,4768	1,4043	1,4594	1,6608	1,8850	2,1188	2,3578
Q_3	1,5045	1,4801	1,4039	1,4576	1,6559	1,8772	2,1079	2,3438

Тогда коэффициенты системы уравнений (2.2) представляются в виде

$$b_{ij} = a_{ij} + c'_{ij}, \quad b_i = a_i - c'_{i1}/(2\delta).$$

Величины c'_{ij} содержат интегралы по объему V_2, дополняющему рассматриваемый канал до бесконечно длинного. Формула для определения c'_{ij} получается из соотношения для c_{ij} в (2.3) путем замены V_1 на V_2.

3. Представляет интерес исследование поведения приведенного расхода Q (2.4) в тех случаях, когда параметр разреженности δ принимает предельно большие и предельно малые значения. При стремлении δ к нулю, что соответствует свободномолекулярному режиму течения газа, получаем

$$Q = Q_0 - \delta \ln L_1 + 3{,}044\delta - 3{,}395\delta/L \quad (\delta L \ll 1).$$

Здесь величина Q_0 представляет собой расход газа через канал длиной L_1 в свободномолекулярном режиме течения:

$$Q_0 = [L^3 - \sqrt{(4+L^2)^3} + 6L + 8]/(3\sqrt{\pi}).$$

Этот результат отличается от более точной формулы [5]

$$Q_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{\pi}}\left\{1 + L^2 - L\sqrt{1+L^2} - \frac{2}{9}\,\frac{[L^3 - 2 + (2 - L^2)\sqrt{1+L^2}]^2}{L\sqrt{1+L^2} - \operatorname{arsh} L}\right\}.$$

Ошибка составляет 19% при $L_1 = 10$ и затем уменьшается до нуля при увеличении длины канала (фиг. 3). Эта неточность может быть устранена, если дополнить уравнение (1.3) условием непротекания газа на стенке, которое в свободномолекулярном режиме течения превратится в уравнение Клаузинга [13].

В том случае, когда произведение δL значительно больше единицы, легко получить формулы, содержащие хорошо известные выражения

$$Q = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} + \delta \ln \delta - \frac{\delta}{\sqrt{3}t}\exp(-3t) \quad (\delta L \gg 1,\ \delta \ll 1); \tag{3.1}$$

$$Q = \frac{\delta}{4} + \frac{4+\pi}{4\sqrt{\pi}} - \frac{\delta^3}{\sqrt{3}L^2}t^2 \exp(-3t) \quad (\delta L \gg 1,\ \delta \gg 1), \tag{3.2}$$

где $t = (\delta L/2)^{2/3}$. Первые слагаемые в формулах (3.1), (3.2) соответствуют значениям расхода газа через неограниченно длинный канал в свободномолекулярном и вязком режимах течения соответственно [14]. Последние слагаемые очень быстро убывают с ростом δL.

Решение Q, следующее из соотношений (2.5) для бесконечно длинного капилляра (см. таблицу), хорошо согласуется с известными данными [1, 2] Q_2 и Q_3, которые получены численным и вариационным методами соответственно.

Результаты решения могут быть уточнены при учете влияния зон около входа и выхода канала [6].

Поступила 7 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cercignani C., Sernagiotto F.** Cylindrical Poiseuille flow of rarefied gas.— Phys. Fluids, 1966, vol. 9, N 11.
2. **Cercignani C., Pagani C. D.** Variational approach to rarefied flows in cylindrical and spherical geometry.— In: Rarefied Gas Dynamics, 5 th. Brundin C. L. ed., 1967, vol. 1.
3. **Ferziger J. H.** Flow of a rarefied gas through a cylindrical tube.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, № 7.
4. **Edwards R. H.** Low-density flows through tubes and nozzles.— In: Progress in Astronautics and Aeronautics: Rarefied Gas Dynamics, 10th. N. Y., 1977, vol. 51, pt 1.
5. **De Marcus W. C.** Report K-1302, Union Carbide Nuclear Company, Oak Ridge, Tenessee, 1956.
6. **Weissberg H. L.** End correction for slow viscous flow through long tubes.— Phys. Fluids, 1962, vol. 5, N 9.
7. **Bhatnagar P. L., Gross E. P. Krook M. A.** A model for collision process in gases.— Phys. Rev., 1954, vol. 94, N 3.
8. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
9. **Cercignani C., Neudacin I.** Rarefied gas flow through long slots.—J. Appl. Math. and Phys., 1979, vol. 30, p. 943.
10. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
11. **Abramowitz M.** Evaluation of the integral $\int\limits_0^\infty \exp\left(-u^2-x/u\right)du$. — J. Math. and Phys., 1953, vol. 32, p. 188.
12. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979.
13. **Clausing P.** Über die Strömung sehr verdünnter Gas durch Röhren von beliebiger Länge.— Ann. Phys., 1932, H. 8, N 12.
14. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978

УДК 532.5 : 533.6.011.32 : 532.582.33

ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ С ТРЕМЯ УЧАСТКАМИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

Л. А. Кожуро

(*Москва*)

Представляет интерес определение формы толстых осесимметричных тел, имеющих при заданном объеме небольшую площадь поверхности и в то же время достаточно высокое значение критического числа Маха при небольшом перепаде давления на поверхности тел, что позволило бы реализовать их безотрывное обтекание.

Как известно [1], при заданных длине и объеме осесимметричного тела максимальное значение критического числа Маха достигается в случае, когда тело состоит из двух дисков, соединенных поверхностью, скорость на которой везде звуковая. Аналогом этого течения в несжимаемой жидкости является течение Рябушинского для диска. Однако обеспечить безотрывное обтекание такого тела ввиду большой величины перепада давления на его поверхности чрезвычайно трудно.

Как было показано С. А. Чаплыгиным [2] для случая плоского течения, любую критическую точку на поверхности тела можно заменить примыкающей к телу конечной областью с покоящейся жидкостью. Течения такого типа для цилиндра и сферы были впервые получены в [3]. Как и всякие течения со свободными границами, такие течения обладают рядом экстремальных свойств. Отметим некоторые из них. Пусть рассматривается потенциальное обтекание плоского тела, симметричного относительно оси x, или осесимметричного тела с осью симметрии x. На бесконечности — однородный поток, направленный вдоль этой оси. Пусть кривая L — фиксированная часть контура тела в верхней полуплоскости, а L_* — варьируемая часть контура тела, соединяющая точку M_* на оси симметрии x с точкой M на контуре L. В осесимметричном случае L и L_* — сечения фиксированной и варьируемой поверхностей тела меридиональной плоскостью. В [4] показано, что при заданном положении точки M, достаточно близком к оси симметрии, максимальное значение квадрата скорости на варьируемой части тела L_* достигает минимума тогда и только тогда, когда скорость на L_* везде постоянна, т. е. когда L_* является свободной линией тока. Доказательство этого результата основано на использовании принципа максимума для функций тока плоских и осесимметричных течений. Аналогичным путем можно показать, что такие течения имеют еще одно экстремальное свойство: при заданном положении точки M_* на оси симметрии x минимальное значение квадрата скорости на варьируемой части тела L_* достигает максимума тогда и только тогда, когда кривая L_* является сво-