

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ ШЕЙКИ В РАСТЯГИВАЕМОМ СТЕРЖНЕ ИЗ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

А. А. Бычков, Д. Н. Карпинский

НИИ механики и прикладной математики при РГУ, 344090 Ростов-на-Дону

Исследованы условия шейкообразования в растягиваемом термовязкопластичном стержне с учетом теплопередачи в широком диапазоне скоростей деформаций и температур. Задача решается в длинноволновом приближении методами линейного анализа возмущений. Влияние амплитуды возмущений на устойчивость пластического деформирования исследуется с помощью нелинейного анализа. Расчеты показали: 1) при растяжении сплошного стержня при параметрах задачи, реализованных в опыте, образуется шейка; 2) при активном растяжении критическая деформация существенно зависит от волнового числа, особенно в области малых его значений; 3) при малой скорости деформирования отсутствует заметная зависимость критической деформации от величины волнового числа.

**Введение.** Известно [1, 2], что при больших пластических деформациях возникают аномалии деформирования: провал пластичности, максимумы удлинения и эффект сверхпластичности. Эти явления обнаруживаются, как правило, после локализации деформации. В случае растяжения стержня ей соответствует появление шейки. Обычно выделяют два этапа развития локализации деформации [3]:

- 1) «бегающая» шейка, т. е. мгновенное возникновение и стабилизация локальных утонений на образце;
- 2) в дальнейшем, при достижении деформации по сужению порядка 0,15–0,25, появляется устойчивая шейка, непрерывно уменьшающая свой объем вплоть до разрушения.

В [2] сделан вывод о том, что устойчивая локализация наступает в связи с ростом спонтанно возникающих шеек при достаточно больших деформациях, которые, действуя одна на другую, делают этот процесс устойчивым.

Известно [1, 2], что разрушение стержня при образовании шейки обычно начинается в центральных волокнах металла в условиях наиболее резко выраженного всестороннего растяжения от действия нормальных растягивающих напряжений. Дальнейшие исследования взаимосвязи локализации деформации и накопления несплошностей дали противоречивые результаты. Так, в [4] показано, что критическая фрагментированная структура и зародышевые микротрещины возникают в образце не где угодно, а только в шейке, причем намного позже момента ее образования. Образец деформируется в условиях сплошности в течение 90–95 % времени жизни, и лишь в самый последний момент в нем лавинообразно высыпают микротрещины, рост и объединение которых вызывают практически мгновенное его разрушение.

С другой стороны, в [5] указывается, что множественное образование зародышевых несплошностей начинается, как правило, на ранней стадии пластической деформации и растет пропорционально деформации. Причем интенсивное образование, развитие и слияние несплошностей происходит в основном в тонких приповерхностных слоях, в которых

скорость накопления и концентрация несплошностей на 1–3 порядка выше, чем в объеме материала.

На основе результатов [5] в работе [3] сделан вывод о невозможности адекватного описания локализации пластического течения только в таких переменных, как напряжение, деформация, скорость деформации. Согласно работе [3], необходимо еще знать количество, распределение и скорость перемещения дефектов. В [6, 7] представлена модель вязкого разрушения, учитывающая одновременно зарождение и рост пор, которая позволяет вычислить долговечность однородно напряженного элементарного объема твердого тела. Однако в стороне остаются термомеханические и геометрические свойства образца и условия испытания. Противоречивость экспериментальных данных в [4, 5] не позволяет в настоящее время построить стройную теорию шейкообразования в стержнях при растяжении.

В ранних теоретических исследованиях модели не учитывали развитие несплошностей при деформировании, однако во многих из них (см., например, [8–11]) говорится об удовлетворительном совпадении экспериментальных и расчетных данных. Цель настоящей работы заключается в анализе условий образования устойчивой шейки в растягиваемом стержне из материала со сложными реологическими свойствами в отсутствие в нем несплошностей.

**1. Постановка задачи.** Наиболее общая постановка задачи о шейкообразовании в сплошном стержне дана в работах [12, 13], где рассматривается пластическая деформация стержня, подверженного одноосному растяжению. Предполагается, что материал стержня однородный несжимаемый с плотностью  $\rho_0$ . Уравнение движения, закон сохранения массы, уравнения совместности и теплопереноса для данной модели имеют вид

$$\rho_0 A_0(x) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\sigma A(t, x)], \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\dot{A}}{A}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{A(0, x)}{A(t, x)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad C \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (1.1)$$

где  $v$  — скорость перемещения;  $A(t, x)$  — площадь поперечного сечения в момент времени  $t$ ;  $A_0(x) = A(0, x)$ ;  $\varepsilon$  — деформация;  $\theta$  — температура;  $C$  — теплоемкость;  $k$  — удельная теплопроводность;  $\beta$  — доля пластической работы, преобразующаяся в тепло.

Функция  $\sigma = F_t^{-1} \psi(\theta, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$  моделирует нелинейный температурный упругопластический отклик материала. Здесь  $F_t^{-1} = (1 + 2R_c/R) \lg(1 + R/2R_c)$  — множитель, учитывающий трехосность напряженного состояния в шейке стержня [1];  $R(x, t)$  — локальный радиус сечения стержня и  $R_c$  — радиус шейки, связанные соотношением  $R_c^{-1} = (\partial^2 R / \partial x^2) (1 + (\partial R / \partial x)^2)^{-3/2}$ .

Полагая начальное поперечное сечение стержня однородным  $A_0(x) = A_0 = \text{const}$ , согласно закону сохранения массы, получим  $A(t, x) = A_0 e^{-\varepsilon}$ . Таким образом, система уравнений (1.1), описывающая поведение образца при больших пластических деформациях, будет иметь вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = e^{-\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\sigma e^{-\varepsilon}], \quad C \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (1.2)$$

В качестве  $\sigma = F_t^{-1} \psi(\theta, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$  рассматривается соотношение [12, 13]

$$\sigma = \mu F_t^{-1} \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \theta^\nu, \quad (1.3)$$

где  $\mu, n, m, \nu = \text{const}$ .

При этом предполагаются начальные и краевые условия:

$$t = 0: \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon}_0, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{V}{l_0} = \bar{\dot{\varepsilon}}, \quad v = \frac{V}{l_0} x = \bar{\dot{\varepsilon}} x, \quad \theta_0 = \bar{\theta}_0; \quad (1.4)$$

$$x = 0: \quad v = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \quad x = l_0: \quad v = V, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

где  $l_0$  — длина стержня;  $V, \bar{\theta}_0, \bar{\varepsilon}_0$  — const.

**2. Линейный анализ.** Рассмотрим в момент времени  $t_0$  однородное, зависящее от времени решение  $(\varepsilon_0, \sigma_0, v_0, \theta_0, F_{t_0})$  уравнений (1.2), (1.3) с начальными и граничными условиями (1.4). Представим возмущение этого решения в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \varepsilon_0(t) + \delta\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0(t) + \delta\varepsilon_0 e^{\eta(t-t_0)} e^{i\xi x}, \\ \sigma(x, t) &= \sigma_0(t) + \delta\sigma(x, t) = \sigma_0(t) + \delta\sigma_0 e^{\eta(t-t_0)} e^{i\xi x}, \\ v(x, t) &= v_0(t) + \delta v(x, t) = v_0(t) + \delta v_0 e^{\eta(t-t_0)} e^{i\xi x}, \\ \theta(x, t) &= \theta_0(t) + \delta\theta(x, t) = \theta_0(t) + \delta\theta_0 e^{\eta(t-t_0)} e^{i\xi x}, \\ F_t(x, t) &= F_{t_0}(t) + \delta F_t(x, t) = F_{t_0}(t) + \delta F_{t_0} e^{\eta(t-t_0)} e^{i\xi x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где разность  $(\delta\varepsilon, \delta\sigma, \delta v, \delta\theta, \delta F_t)$  предполагалась малой по сравнению с  $(\varepsilon_0, \sigma_0, v_0, \theta_0, F_{t_0})$ ;  $\eta = \delta\dot{\varepsilon}/\delta\varepsilon$ ;  $\xi$  — волновое число.

Подставляя (2.1) в (1.2) и учитывая, что  $F_{t_0} = 1, \delta F_{t_0} = -(A_0/2\pi)\xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \delta\sigma_0$ , получим систему линейных уравнений с неизвестными  $\delta\varepsilon_0, \delta\sigma_0, \delta v_0, \delta\theta_0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varepsilon}} + \frac{A_0}{2\pi} \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \sigma_0 \right) \delta\varepsilon_0 - \delta\sigma_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \delta\theta_0 &= 0, \\ -i\xi \sigma_0 e^{-\varepsilon_0} \delta\varepsilon_0 + i\xi e^{-\varepsilon_0} \delta\sigma_0 - \eta \rho_0 \delta v_0 &= 0, \quad (\eta + \dot{\varepsilon}_0) \delta\varepsilon_0 - i\xi e^{-\varepsilon_0} \delta v_0 = 0, \\ \eta \beta \sigma_0 \delta\varepsilon_0 + \beta \dot{\varepsilon}_0 \delta\sigma_0 - (C\eta + k\xi^2) \delta\theta_0 &= 0. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения данной системы определяют устойчивость решения задачи, соответствующего однородному растяжению стержня (однородное решение).

Характеристическое уравнение для данной системы имеет вид

$$a_0 \eta^3 + a_1 \eta^2 + a_2 \eta + a_3 = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \rho_0 C; \quad a_1 = \rho_0 k \xi^2 + C \left( \rho_0 \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varepsilon}} \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \right) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rho_0 \dot{\varepsilon}_0; \\ a_2 &= k \xi^2 \left( \rho_0 \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varepsilon}} \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \right) + C \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \sigma_0 + \frac{A_0}{2\pi} \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \sigma_0 \right) \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left( \rho_0 \dot{\varepsilon}_0^2 - \sigma_0 \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \right); \\ a_3 &= \beta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_0 \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \sigma_0 + k \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \sigma_0 + \frac{A_0}{2\pi} \xi^2 e^{-2\varepsilon_0} \sigma_0 \right) \xi^4 e^{-2\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Согласно теории устойчивости Раусса — Гурвица, решение задачи будет устойчиво, если все корни характеристического уравнения данной линеаризованной системы имеют отрицательную действительную часть. По условию Лъенара — Шипара это будет иметь место, если все коэффициенты многочлена (2.2) положительны и выполняется условие  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

В расчетах для вычисления  $\dot{\varepsilon}_0$  и  $\theta_0$  использовались соотношения

$$\dot{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_0 e^{-\varepsilon_0}, \quad \theta_0 = \bar{\theta}_0 \left[ 1 + \frac{(1-\nu)\beta \bar{\varepsilon}_0^m \mu}{C \theta_0^{1-\nu}} \int_0^{\varepsilon_0} u^n e^{-mu} du \right]^{1/(1-\nu)}.$$

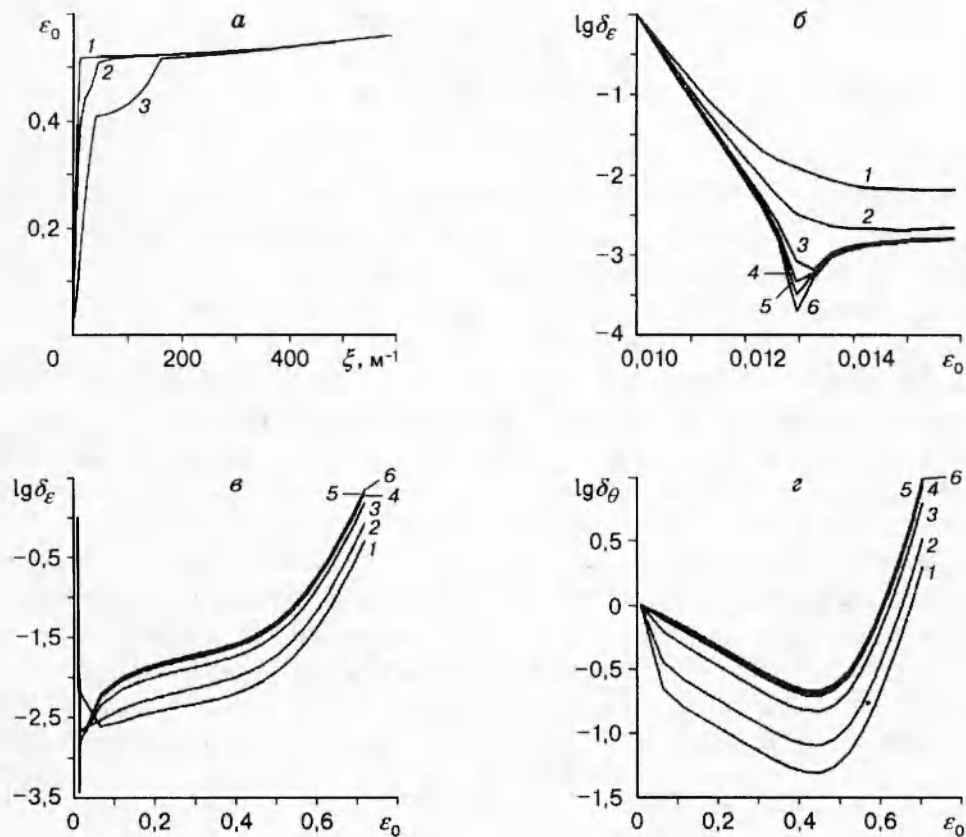


Рис. 1

На рис. 1, а показана область устойчивости однородного решения для задачи (1.2)–(1.4) при  $\mu = 2,486 \cdot 10^{10}$ ,  $n = 0,52$ ,  $C = 3,6 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $k = 15$  Вт/(м·К),  $\theta_0 = 294$  К,  $m = 0,02$ ,  $\nu = -0,5$ ,  $\rho_0 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $A_0 = 4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup> [12] для различных значений скоростей деформаций стержня  $\dot{\epsilon}_0$  (кривые 1–3 отвечают значениям  $\dot{\epsilon}_0 = 1,66 \cdot 10^{-5}$ ;  $1,66 \cdot 10^{-3}$  и  $1,66 \cdot 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>). Решение будет устойчиво к возмущению при  $\xi$  и  $\epsilon$ , находящихся ниже соответствующих кривых.

**3. Нелинейный анализ.** Проведен нелинейный анализ устойчивости образования шейки в растягиваемом образце с целью уточнения результатов линейного анализа. К однородному решению задачи в момент времени  $t = 0$  добавлялось возмущение деформации вида

$$\epsilon_p = \epsilon_0 \delta_0 \sin^2(\xi(x - a)),$$

где  $\delta_0$  — амплитуда начального возмущения;  $\xi = \pi/(b - a)$ ;  $a < x < b$  ( $a$  и  $b$  — координаты левой и правой границы возмущенной области). Выбор вида возмущения связан с необходимостью сопоставления результатов линейного и нелинейного анализа и позволяет исследовать условия образования шейки в зависимости от амплитуды возмущения  $\delta_0$ . Результаты расчетов эволюции пластической деформации (1.1)–(1.3) с возмущенными начальными условиями представлены на рис. 1, б, в при  $l_0 = 0,05$  м,  $\bar{\epsilon}_0 = 0,01$ . Здесь даны зависимости относительной амплитуды возмущения  $\delta_\epsilon$  ( $\delta_\epsilon(t) = (\max_x \epsilon(x, t) - \min_x \epsilon(x, t))/\delta_0$ ,  $0 < x < l_0$ ) от величины однородной деформации  $\epsilon_0$  при  $\delta_0 = 0,01$  для  $\xi = 563$ ; 314; 157; 104,7; 78,5; 62,8 м<sup>-1</sup> (кривые 1–6). Результаты для начального периода деформации, соответствующего затуханию возмущения, приведены на рис. 1, б, а для периода, характеризующегося ростом возмущения, — на рис. 1, в. При значениях  $\xi = 62,8$ ; 78,5; 104,7 м<sup>-1</sup>

различия в поведении возмущения относительно малы, поэтому кривые 4–6 практически совпадают.

Аналогично исследовалась эволюция возмущения температуры

$$\theta_p = \hat{\theta}_0 \delta_0 \sin^2(\xi(x-a)).$$

На рис. 1,г показана относительная амплитуда возмущения температуры  $\delta_\theta(t) = (\max_x \theta(x,t) - \min_x \theta(x,t)) / \delta_0$ ,  $0 < x < l_0$  для шести значений  $\xi$  и  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$ , указанных выше. На рис. 2 приведены распределения во времени деформации  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_0$  вдоль стержня для четырех различных форм начальных возмущений ( $\dot{\varepsilon}_0 = 1,66 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ), на рис. 3 — температуры  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_0$  для двух форм.

**4. Анализ результатов.** Как видно из рис. 1,б,в, возмущение  $\varepsilon_p$  вначале быстро затухает, причем для меньших значений  $\xi$  амплитуда возмущения достигает минимального значения быстрее и величина его меньше, чем для больших  $\xi$ . Затем  $\delta_\varepsilon$  начинает медленно расти, и по мере приближения к границе области устойчивости (рис. 1,а) наблюдается быстрый рост возмущения, при этом чем больше значение  $\xi$ , тем медленнее растет возмущение и позже наблюдается момент ускоренного развития неустойчивости. Что касается возмущения температуры  $\theta_p$ , то большим значениям  $\xi$  соответствуют меньшие величины минимальных возмущений, а их резкое увеличение начинается позже, чем для меньших  $\xi$ . Расчеты, проведенные для различных значений амплитуды начального возмущения  $10^{-5} < \delta_0 < 10^{-2}$ , показали, что результаты практически не зависят от  $\delta_0$ . Рис. 2, 3 уточняют эти результаты, демонстрируя на начальном этапе быстрое затухание

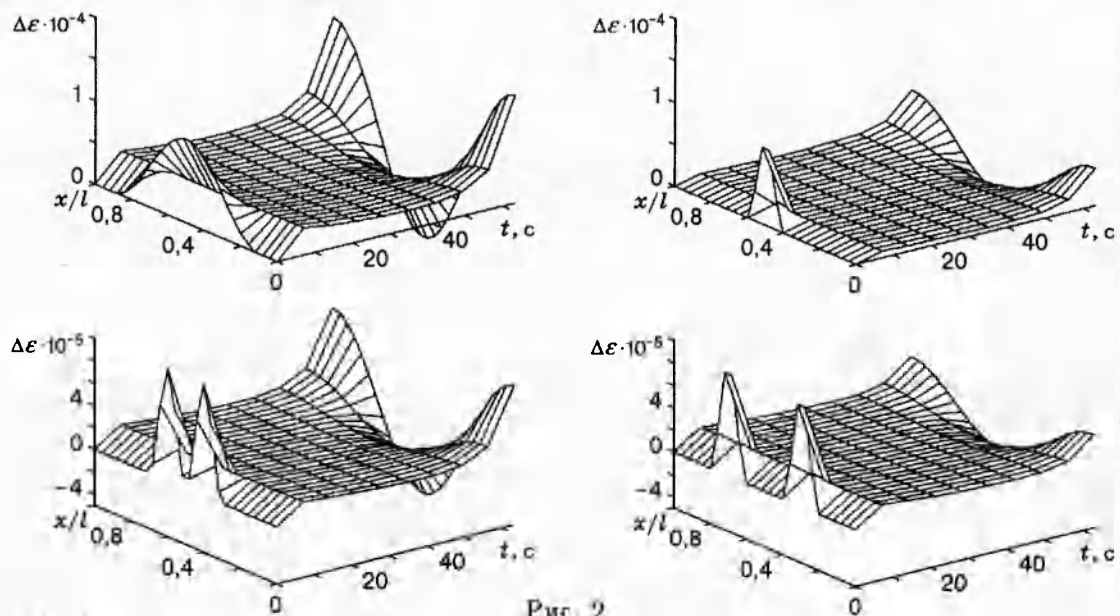


Рис. 2

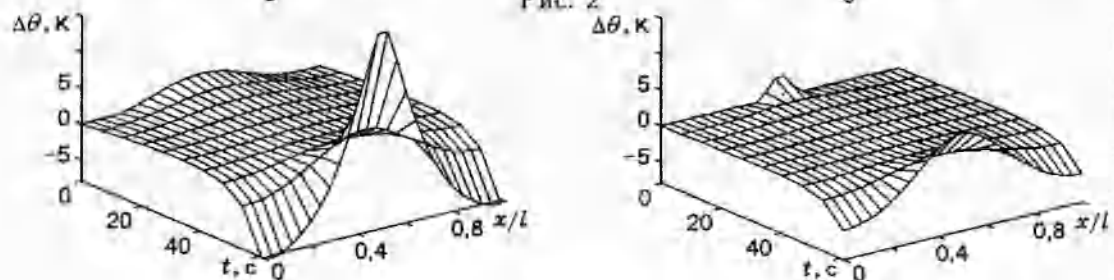


Рис. 3

возмущения любой начальной формы, а затем рост  $\Delta\epsilon$  вблизи концов образца и убывание в центральной его части. Для эволюции  $\Delta\theta$  характерна обратная зависимость. Подчеркнем, что на рис. 2, 3 представлены результаты расчетов, выполненных для активного растяжения с большой скоростью деформации  $\dot{\epsilon}_0$ . Для малых  $\dot{\epsilon}_0$  обнаружено, что начальные возмущения, возникающие в области устойчивости, полностью затухают и не могут быть причиной образования шейки. Отметим, что при достаточно малых  $\dot{\epsilon}_0$  отсутствует заметная зависимость критической деформации  $\epsilon_{0c}$  от  $\xi$  (кривая 1 на рис. 1,а). Расчеты показывают, что в растягиваемом сплошном стержне образуется шейка, а условия ее возникновения при выбранных постоянных материала стержня реализуемы на опыте.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бриджмен Б. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностран. лит., 1955.
2. Пресняков А. А. Локализация пластической деформации. М.: Машиностроение, 1983.
3. Наймарк О. Б., Ладыгин О. В. Неравновесные кинематические переходы в твердых телах как механизмы локализации пластической деформации // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 3. С. 147–154.
4. Рыбин В. В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Metallurgia, 1986.
5. Черемской П. Г., Слезов В. В., Бетехтин В. И. Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990.
6. Карзов Г. П., Куклина О. В., Марголин Б. З. Некоторые физико-математические подходы к анализу макроскопических критериев разрушения / Сообщение 2. Вязкое разрушение // Проблемы прочности. 1989. № 8. С. 3–10.
7. Куклина О. В., Марголин Б. З. Физико-механическая модель разрушения при ползучести // Проблемы прочности. 1990. № 10. С. 23–29.
8. Баренблатт Г. И. О распространении шейки при растяжении полимерных образцов // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1048–1060.
9. Баренблатт Г. И. Изотермическое распространение шейки в полимерах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 6. С. 96–104.
10. Hart E. W. Theory of the tensile test // Acta Metallurgica. 1967. V. 15, N 2. P. 181–187.
11. Lin I.-H., Hirth J. P., Hart E. W. Plastic instability in uniaxial tension test // Acta Metallurgica. 1981. V. 29, N 5. P. 819–827.
12. Fressengeas C., Molinari A. Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow // Acta Metallurgica. 1985. V. 33, N 3. P. 387–396.
13. Bai Y., Dodd B. Adiabatic Shear Localization. Occurrence, Theories and Applications. N. Y.: Pergamon Press, 1992.

*Поступила в редакцию 14/Х 1996 г.*