

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НА ВЫПУЧИВАНИЕ
ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ**

С. А. Шестериков (Москва)

Обзор решения некоторых наиболее простых частных задач по выпучиванию стержней можно найти, например, в работах [1, 2]. Исследование пластинок и оболочек велось, в основном, в направлении разработки критериев устойчивости для линейризованной постановки задачи выпучивания. В работах, посвященных этой проблеме [3-5], в основном изучалось поведение тонкостенных элементов в начальной фазе после нагружения. Ниже описывается способ для приближенного расчета на выпучивание при ползучести.

1. В основе предлагаемого метода лежит предположение о том, что для стержней и тонкостенных элементов, находящихся в условиях продольного сжатия, связь между напряжениями и деформациями можно заменить аналогичными зависимостями для изгибающих моментов и кривизн.

Подобный прием использован ранее при исследовании других задач (см., например, [6]). Необходимо подчеркнуть, что это предположение в некоторых случаях может оказаться слишком грубым. Поэтому каждый раз необходима критическая оценка получаемых результатов и указание области, где они применимы. В то же время такая гипотеза для большого класса задач существенно упрощает вычисления, не искажая при этом существа явления.

Для одноосного случая принятая гипотеза означает, что имеет место зависимость

$$\Phi(\kappa, \dot{\kappa}, m, \dot{m}, T) = 0 \quad (1.1)$$

где κ — кривизна элемента; m — изгибающий момент внутренних или внешних сил относительно середины сечения; T — средняя температура по сечению; точкой обозначено дифференцирование по времени. Для пластинок примем, что соотношение (1.1) выполняется для инвариантных характеристик M и H

$$\Phi(H, \dot{H}, M, \dot{M}, T) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь

$$M^2 = M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2$$

Для H возможны два различных определения

$$H^2 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (1.3)$$

или

$$\dot{H}^2 = \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y}\right)^2$$

В соответствии с выбранным условием (1.3) примем либо деформационные соотношения вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial M^2}{\partial M_x}, \dots \quad (1.4)$$

либо соотношения типа течения

$$\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial \dot{M}^2}{\partial M_x}, \dots \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия для пластины примем в следующей форме [7]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left(q + N_x \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.6)$$

$$w_n = w + w_{00}$$

Здесь w_{00} — начальный прогиб; N_x , N_y , N_{xy} — силы, действующие в плоскости пластинки, которые считаем известными. Система уравнений (1.2) — (1.6) позволяет определить прогиб как функцию времени.

2. Рассмотрим стержень, сжатый продольной силой P . Изгибающий момент для стержня запишется в виде

$$m = \frac{Ph}{m_0} (u + u_{00}) \quad (2.1)$$

где h — толщина; u — безразмерный дополнительный прогиб; u_{00} — начальный безразмерный прогиб. Соотношение (1.1) запишем в виде

$$-h\kappa = \dot{f}(m) + \Psi(m) \quad (2.2)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует мгновенному деформированию, а второе характеризует процесс ползучести. Отметим, что соотношение (2.2) не учитывает возможную разгрузку в отдельных частях сечения стержня. Это естественно может привести к отклонениям при сравнении с экспериментальными данными. Рассмотрим шарнирно опертый стержень. Решение уравнения (2.2) будем искать методом совмещения. Тогда, предположив, что прогиб может быть аппроксимирован одной полуволной синусоиды, получим для амплитуды прогиба u уравнение

$$k\dot{u} = f[p(u + u_{00})] + \Psi[p(u + u_{00})] \quad (k = \pi^2 h^2 / L^2, p = Ph / m_0) \quad (2.3)$$

Конкретизируя функции f и Ψ , можно получить решение ряда конкретных задач. Выпучивание стержня под действием постоянной силы P . Решение разбивается на два этапа. Первый этап соответствует мгновенному приложению силы P , в результате чего стержень получает прогиб u_0 . Значение u_0 определяется из решения уравнения, соответствующего мгновенному деформированию

$$ku_0 = f[p(u_0 + u_{00})] \quad (2.4)$$

Дальнейший процесс, соответствующий нарастанию прогибов во времени, характеризуется уравнением

$$\frac{k - f'[p(u + u_{00})] p}{\Psi[p(u + u_{00})]} du = dt \quad (2.5)$$

Очевидно, что в случае выполнения условия

$$k - f'[p(u_1 + u_{00})] p = 0 \quad (2.6)$$

скорость нарастания прогибов обратится в бесконечность. Значение полного прогиба $u_1 + u_0$, определяемого по условию (2.6), соответствует значению критического прогиба и для чисто мгновенного деформирования. Действительно, если в (2.4) использовать условие $\partial p / \partial u_0 = 0$, то оно приведет к уравнению, совпадающему с (2.6). Это свойство при решении задач о выпучивании с учетом ползучести более подробно проанализировано в работе [2]. Впервые это явление обнаружено Врейс де Вёбеком [8]. Необходимо отметить, что независимость критического прогиба от свойств ползучести следует из однопараметричности рассматриваемой системы.

Если принять, что функции f и Ψ можно представить в виде

$$f(x) \equiv Ax^n, \quad \Psi(x) \equiv Bx^m \quad (2.7)$$

то решение уравнения (2.5) запишется в форме

$$\frac{k}{Bp^m(m-1)} \left\{ \frac{1}{(u_0 + u_{00})^{m-1}} - \frac{1}{(u + u_{00})^{m-1}} \right\} - \frac{Ap^{n-m}}{B(m-n)} \left\{ \frac{1}{(u_0 + u_{00})^{m-n}} - \frac{1}{(u + u_{00})^{m-n}} \right\} = t \quad (2.8)$$

Момент разрушения t_1 определится из (2.8), если вместо u подставить u_1 , найденное из условия (2.6).

Большой интерес представляет случай медленного изменения приложенного усилия, начиная от нуля. Получим решение уравнения (2.3) полуобратным методом. Предположим, что выполняется соотношение

$$p(u + u_{00}) = D(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_1 - t}) \quad (2.9)$$

Тогда для случая $n = 2$ и $m = 1$ получим

$$\frac{u}{u_{00}} = 2 - \tau - 2\sqrt{1 - \tau} + \gamma\tau(1 - \sqrt{1 - \tau})$$

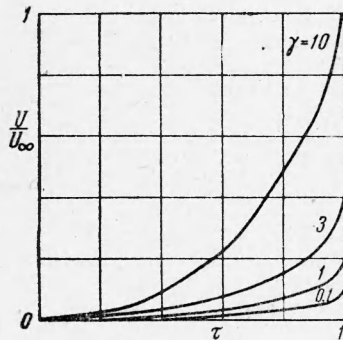
$$p = \frac{c}{u_{00}} \frac{1 - \sqrt{1 - \tau}}{3 - \tau - 2\sqrt{1 - \tau} + \gamma\tau(1 - \sqrt{1 - \tau})} \quad (2.10)$$

$$\left(\gamma = \frac{2BCt_1}{3ku_{00}}, \quad \frac{C^2 A}{k} = u_{00} + \frac{BCt_1}{3k}, \quad C = D\sqrt{t_1}\tau = \frac{t}{t_1} \right)$$

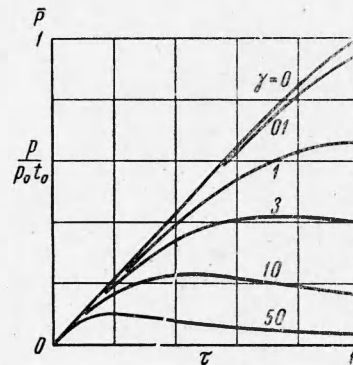
Решение в конечном виде может быть получено для любых целых m и n , но здесь для простоты ограничимся указанными значениями. Очевидно, что при $\tau \rightarrow 1$ $\dot{u} \rightarrow \infty$, т. е. $\tau = 1$ соответствует моменту разрушения (при $\tau > 1$ решения не существует). В качестве основных задаваемых параметров примем начальный прогиб u_{00} и начальную скорость нагружения \dot{p}_0 . Тогда t_1 и C определяются через эти параметры и

$$\gamma = 2 \left\{ \frac{6Au_{00}\dot{p}_0}{B} - 1 \right\}^{-1}, \quad t_1^2 = \frac{3k}{12Au_{00}\dot{p}_0^2 - 2B\dot{p}_0}, \quad C = 2u_{00}\dot{p}_0 t_1 \quad (2.11)$$

В качестве иллюстрации на фиг. 1 и 2 приведены графики u/u_{00} и $p/p_0 t_0$ в зависимости от безразмерного времени τ для ряда значений параметра γ . При $\gamma \ll 1$ имеет место почти пропорциональное нагружение.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Рассмотрим простейший случай выпучивания равномерно сжатой свободно опертой квадратной пластинки. Примем, что

$$w = u(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad w_{00} = u_{00} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (3.1)$$

$$M_x = M_y = m(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (M_{xy} = 0 \text{ в центре})$$

Уравнения (1.2) удовлетворим в средней $\frac{1}{4}$ точке, тогда получим зависимость между m и u , аналогичную зависимости для стержня (2.3)

$$k_1 \dot{u} = \dot{f}(k_2 m) + \Psi(k_2 m) \quad (3.2)$$

Принято, что для H и M существует зависимость, аналогичная связи между x и m для стержня. Из (1.3) легко получить линейную связь между m и $(u + u_{00})p$, где p — равномерное давление в плоскости пластинки. Следовательно, для пластинки в рассмотренном случае уравнение, связывающее u и p , совпадало с уравнением (2.3) с точностью до постоянных множителей, характеризующих геометрию рассматриваемого элемента. Поэтому исследование решения, проведенное в п. 2, сохраняет силу и в настоящем случае. Отметим только, что решение не зависит от того, какое соотношение — (1.4) или (1.5) принято при исследовании. Очевидно, что это имеет место в случае, когда M полностью определяется одним неизвестным параметром, зависящим от времени, как это и было в рассмотренном случае. В случаях, когда сохраняются два или большее число параметров, уравнение для пластинки при использовании (1.5) не сводится к уравнению первого порядка, и решение существенно отличается от решения полученного для стержня.

Поступила 22 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoff N. J. A survey of the theories of creep buckling. Proc. Third Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, 29—49.
2. Шестериков С. А. Выпучивание при ползучести с учетом мгновенных пластических деформаций. ПМТФ, 1963, № 2.
3. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, № 3.
4. Куршин Л. М. Устойчивость пластинок в условиях ползучести. ПМТФ, 1962, № 2.
5. Gerard G. Theory of creep buckling of perfect plates and shells. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 2, No. 9.
6. Venkatraman V., Hodge P. G. Approximate solutions of some problems in steady creep. Mem. Sympos. plast. sci. congr., Varenna, 1956, Bologna, s. a., 138—165.
7. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Огиз, Гостехиздат, 1948.
8. Фрейсде Вёбек В. В сб.: «Влияние высоких температур на авиационные конструкции». Под ред. Хоффа Н. Оборонгиз, 1961.