

8. Хавкин Л. П. К теории ионизационного манометра. Ж. техн. физ., 1956, т. 26, вып. 10.
9. Королев Б. И. Основы вакуумной техники. М.—Л., «Энергия», 1964.
10. Константинов О. В., Перель В. И. Об энергетическом распределении быстрых нейтральных атомов, выходящих из плазмы. Ж. техн. физ., т. 30, вып. 12.
11. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., «Наука», 1966.
12. Alikhanov S. G., Alinovsky N. I., Dolgov-Savelev G. G., Eiselevich V. G., Kurtmullaev R. Kh., Malipovsky V. K., Nesterikhin Yu. E., Pilsky V. I., Sagdeev R. Z., Semenov V. N. Development of a collisionless shock wave program (CN — 24/A—1). Nucl. fusion, special supplement, 1969, p. 1.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА И ПОТЕНЦИАЛА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

А. Е. Коновалов
(Москва)

На примере плоского канала с точечными электродами рассматривается совместный эффект анизотропии и вмороженности. Получены выражения для тока и потенциала. Рассчитаны токовые и эквипотенциальные линии при различных значениях параметров Холла и магнитного числа Рейнольдса.

Определению электрических полей в каналах с движущейся электропроводной средой посвящено большое количество работ [1]. Большинство из них относится к случаю $R_m \ll 1$ (R_m — магнитное число Рейнольдса).

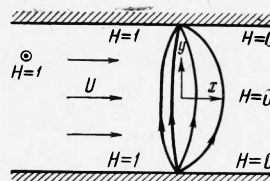
Распределение тока с учетом вмороженности для полубесконечных электродов найдено в работе [2] методом итераций. Анизотропия проводимости, имеющая место в газообразных средах, значительно усложняет картину распределения тока и потенциала в канале [3].

Рассмотрим плоский канал с точечными электродами, в котором движется проводящая среда.

Будем считать, что скорость движения проводящей среды в канале постоянна во времени и не зависит от координат.

При магнитном числе Рейнольдса $R_m > 0$ из-за вмороженности ток будет выноситься вниз по потоку. Предполагается, что внешнее магнитное поле поддерживается на стенках канала постоянным. Отсюда следует, что приложенное магнитное поле остается однородным в канале. Поэтому можно рассматривать отдельно магнитное поле тока, тем более, что постоянная составляющая поля не входит в выражение для тока

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Вопрос о том, какое должно быть внешнее магнитное поле, чтобы обеспечить заданную скорость газа $U = \text{const}$, не рассматривается. Распределение плотности тока \mathbf{j} и потенциала ϕ считается двумерным, проводимость σ принимается постоянной.

Направим ось x по оси канала единичной высоты. Пусть стенки канала будут прямыми $y = \pm 1/2$, а электроды расположены в точках $(0, \pm 1/2)$. Магнитное поле направлено по оси z (см. фиг. 1).

В этом случае уравнение индукции [4] имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - R_m \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь размеры отнесены к высоте канала, а магнитное поле — к величине $4\pi I / c$, где I — полный ток.

Сформулируем граничные условия для уравнения индукции. На стенках канала задана плотность тока

$$y = \pm 1/2, \quad j_y = \delta(x) \quad (1.3)$$

где $\delta(x)$ — импульсная функция первого порядка [5]. Условия на бесконечности $H(-\infty) = 1, H(+\infty) = 0$ эквивалентны тому, что задан полный ток I .

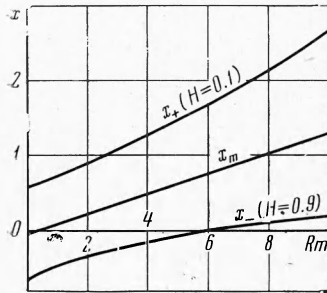
Решение (1.2) получается методом интегрального преобразования Фурье и имеет следующий вид:

$$H = 1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda_n \cos(\lambda_n y)}{\mu_n (2\mu_n - R_m)} e^{\mu_n x}, \quad x \leq 0 \quad (1.4)$$

$$H = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda_n \cos(\lambda_n y)}{\nu_n (2\nu_n + R_m)} e^{-\nu_n x}, \quad x \geq 0$$

$$\lambda_n = (2n - 1) \pi, \quad \mu_n = 1/2 [R_m + \sqrt{R_m^2 + 4\lambda_n^2}], \quad \nu_n = \mu_n - R_m$$

Вынос тока удобно характеризовать величиной x_m , представляющей собой момент тока



Фиг. 2

$$x_m = \int_{-\infty}^{\infty} x/y(x, 0) dx = \frac{R_m}{8}$$

(Интеграл легко вычисляется с помощью (1.1) и (1.4).)

Таким образом, если распределенный ток заменить сосредоточенным равнодействующим током, то координата этого тока оказывается пропорциональной R_m .

Оценка границ области, занимаемой током, может быть сделана с помощью (1.4). Для этого надо найти корни уравнения $H(x, 0) = \text{const}$.

Например, $H(x) = 0.1$ и $H(x) = 0.9$ показывают границы области, где находится 80% всего тока (фиг. 2). При $R_m > 1$ ток сильно выносится

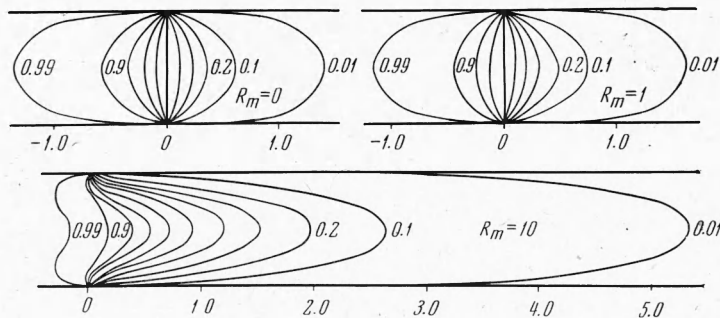
и при $R_m \sim 10$ на оси канала полностью находится за электродами.

Полная картина распределения тока дана на фиг. 3.

Распределение потенциала ϕ в случае точечных электродов находится с помощью квадратуры из закона Ома и (1.4)

$$\frac{\sigma}{I} \Phi = \frac{\beta}{2} [H^2 - (1 + H_0)^2] - \int_{-\infty}^x \frac{\partial H}{\partial y} dx - R_m (1 + H_0) y \quad (1.5)$$

Здесь параметр Холла β определен по магнитному полю полного тока $4\pi c^{-1} I$. Потенциал при $x \rightarrow -\infty$ и $y = 0$ полагается равным нулю.



Фиг. 3

С помощью (1.5) были рассчитаны эквипотенциальные линии $\phi(x, y) = \text{const}$, изображенные на фиг. 4.

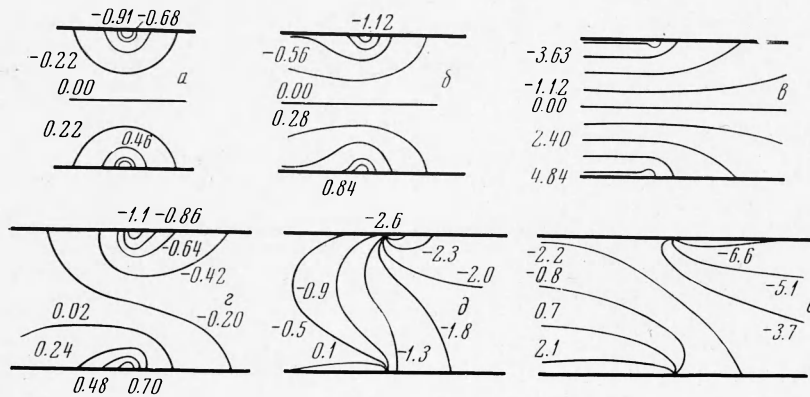
При $\beta = R_m = 0$ эквипотенциальные линии перпендикулярны линиям тока (см. фиг. 4, а и фиг. 3), как в случае источника и стока, расположенных на противоположных стенках канала.

Если $R_m > 0$, то при движении проводящей среды в собственном магнитном поле тока индуцируется электродвижущая сила, направленная противоположно приложенному к электродам напряжению (противо-э. д. с.). Для обеспечения заданного тока при наличии противо-э. д. с. напряжение на электродах должно возрасть. Это увеличе-

ние электрического поля тем больше, чем больше собственное магнитное поле. Там, где поле велико, ток практически отсутствует и эквипотенциальные линии параллельны стенкам. В месте, где магнитное поле убывает и течет ток, эквипотенциальные линии искривляются (см. фиг. 3, фиг. 4, б ($R_m = 1$), фиг. 4, в ($R_m = 10$)).

В случае анизотропно проводящей среды распределение тока не зависит от параметров Холла β , но распределение потенциала при этом меняется.

На бесконечно удаленных концах канала образуется продольная разность потенциалов, препятствующая протеканию продольного тока.



Фиг. 4

Эквипотенциальные линии при этом приобретают характерный наклон (см. фиг. 4, г ($R_m = H_0 = 0$, $\beta = 0.6$), фиг. 4, д ($R_m = H_0 = 0$, $\beta = 4$)).

Из (1.5) следует, что разность потенциалов в точках, симметричных относительно оси x , не зависит от β . Заметим, что в случае электродов конечных размеров разность потенциалов растет с увеличением β [3].

Более наглядно этот факт можно пояснить следующим образом. В силу симметричного относительно оси x распределения тока холловское электрическое поле, пропорциональное j_y , будет также симметричным. Поэтому в симметричных точках потенциал будет увеличиваться на одинаковую величину. Разность потенциалов останется без изменения.

В случае конечных электродов распределение тока не обладает симметрией, потенциал в симметричных точках увеличивается в разной степени, так что разность потенциалов возрастает.

Заметим, что вследствие эффекта Холла электрическое поле у анода становится больше, чем у катода (в симметричных точках), т. е. расстояние между эквипотенциальными (фиг. 4, е) у анода меньше.

Наличие собственного и приложенного внешнего магнитных полей приводит к тому, что появляются дополнительные индуцированные электрические поля, вследствие чего эквипотенциальные линии приобретают вид, показанный на фиг. 4, е ($R_m = 1$, $\beta = 1$, $H_0 = 4$).

Приведенное выше решение легко обобщается на случай произвольного количества точечных электродов.

В заключение автор благодарит Л. Е. Степанову за помощь при проведении расчетов и Е. К. Холщевникову за обсуждение результатов.

Поступила I VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Электрические поля в каналах магнито-гидродинамических устройств. Дополнение к кн. Дж. Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода», М., «Мир», 1965.
2. К о з ы р е н к о В. Е., Т е п л я к о в В. А. Анализ краевого эффекта в МГД-канале с полубесконечными электродами при конечных магнитных числах Рейнольдса. Магнитная гидродинамика, 1968, № 3.
3. В а т а ж и н А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
4. К у л и к о в с к и й А. Г., Л ю б и м о в Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
5. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.