

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

А.Ф. Мaстрюков, Б.Г. Михайленко

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6, Россия*

Предлагается метод решения обратной задачи для волнового уравнения, основанный на спектральном преобразовании Лагерра. Задача рассматривается в одномерной постановке. По данному решению в некоторой точке пространства ищется распределение скорости волны в среде. Используется оптимизационный метод решения. Минимизируется функция от гармоник Лагерра. Проводится это методом сопряженных градиентов или методом Ньютона.

Приводятся результаты определения скорости волны заданной кусочно-постоянной функцией. Анализируется влияние точности аппроксимации краевой задачи на точность решения обратной задачи. Сравняются точность метода решения обратной задачи, основанного на разложении Лагерра, с методом, использующим разложение Фурье.

Обратная задача, волновое уравнение, уравнения Максвелла, электромагнитные волны, проводимость, диэлектрическая проницаемость, конечно-разностный метод, метод Лагерра, точность.

INVERSE SOLUTION TO THE WAVE EQUATION USING THE LAGUERRE TRANSFORM

A.F. Mastryukov and B.G. Mikhailenko

An inverse solution to the 1D wave equation is obtained using the spectral Laguerre transform to find the distribution of wave velocities at some point of the medium. The problem is solved as optimization in which the function of Laguerre harmonics is minimized by the conjugate gradient or Newton's algorithms.

Reported are velocities of a wave defined by a stepwise constant function. The accuracy of the inverse solution for the Laguerre harmonics is investigated against the approximation accuracy in the boundary problem. The accuracy and efficiency of the Laguerre method are compared to those in the Fourier method.

Inverse problem, wave equation, Maxwell's equations, electromagnetic waves, conductivity, permittivity, finite-difference method, Laguerre transform, accuracy

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, волновое уравнение описывает распространение как упругих, так и электромагнитных волн. Уравнения Максвелла при малой и однородной проводимости сводятся к волновому уравнению [Ландау, Лифшиц, 1982], уравнения акустики и уравнения теории упругости при некоторых параметрах также могут быть сведены к волновому уравнению [Уайт, 1986]. Поэтому обратные задачи для волнового уравнения возникают в различных сферах деятельности: в разведочной геофизике [Электроразведка, 1980; Уайт, 1986], в медицине, в дефектоскопии, в системах экологического контроля окружающей среды [Goodman, 1994; Кашкин, Суханин, 2001].

При численном решении обратных задач одним из наиболее распространенных методов решения является оптимизационный метод. Он заключается в минимизации некоторой функции по искомым параметрам. В данном случае искомыми параметрами являются значения скорости волны в некоторых точках среды. Минимизация проводится каким-либо многошаговым итерационным методом.

Оптимизационный метод используется как во временной, так и в частотной области решения. При оптимизации в частотной области сначала проводится преобразование Фурье по времени. Волновое уравнение сводится к краевой задаче для гармоник Фурье, и минимизируется уже функция от гармоник Фурье решения волнового уравнения.

Оптимизационный метод решения в спектральной области используется значительно чаще, чем во временной. Он более прост в программной реализации, в большинстве случаев значительно эффективнее, поэтому широко применяется уже в течение многих лет и хорошо исследован [Amundsen, Ursin, 1991; Мaстрюков, 1999].

В то же время этот метод имеет ряд недостатков, основным из которых является необходимость многократного решения краевой задачи для всех гармоник Фурье на каждом шаге минимизации. Это требует больших вычислительных затрат. Кроме того, ряд численных алгоритмов решения этой краевой задачи оказываются неустойчивыми либо не обладают необходимой точностью. Таковым, например, является итерационный метод решения краевой задачи при конечно-разностной аппроксимации уравнений.

В работах Г.В. Конюха, Б.Г. Михайленко [1998], [Mikhailenko, 1999] для упругих волн был предложен метод решения задач, основанный на преобразовании Лагерра, по временной переменной. Получающееся после проведения этого преобразования уравнение для гармоник Лагерра имеет удобный вид для вычисления последовательности гармоник. Если записать уравнение для гармоник в операторном виде, то сам оператор уравнения не зависит от номера гармоники. Все предыдущие гармоники входят только в правую часть уравнения. При разностной аппроксимации этого уравнения оператор уравнения превращается в матрицу, и эта матрица не зависит от номера гармоники. Соответственно, решение этого матричного уравнения есть произведение обратной матрицы на правую часть уравнения. Обратная матрица, естественно, также не зависит от номера гармоники и может быть вычислена один раз для всех гармоник. Это может давать значительное повышение эффективности алгоритма в сравнении с использованием преобразования Фурье.

Матрица является положительно-определенной и подбором параметров преобразования Лагерра можно сделать ее хорошо обусловленной. Подбор этих параметров очень прост, поэтому всегда можно добиться высокой скорости сходимости при итерационном методе решения краевой задачи.

Кроме того, матрица для гармоник Лагерра является действительной, что также упрощает вычислительную задачу.

Метод, основанный на спектральном разложении Лагерра, использовался для решения уравнений Максвелла и показал высокую эффективность в решении электромагнитных задач [Мастрюков, Михайленко, 2003].

В настоящей работе предлагается метод решения обратной задачи для волнового уравнения, основанный на спектральном преобразовании Лагерра. Задача рассматривается в одномерной постановке. По известному решению в некоторой точке пространства ищется распределение скорости волны в среде. Используется оптимизационный метод решения. Минимизируется функция от гармоник Лагерра. Минимизации проводятся методом сопряженных градиентов или методом Ньютона.

Приводятся результаты определения скорости волны, заданной кусочно-постоянной функцией. Сравниваются два метода минимизации, анализируется влияние точности аппроксимации краевой задачи на точность решения обратной задачи. Предлагаемый метод сопоставляется с методом, основанным на разложении Фурье.

Результаты расчетов показывают, что решение обратной задачи для волнового уравнения, основанное на преобразовании Лагерра, является эффективным методом решения обратной задачи как по скорости сходимости, так и по точности решения, не уступающий по этим показателям методу решения, основанному на разложении Фурье.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конкретные расчеты будут проводиться для случая электромагнитных волн, поэтому будем исходить из уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля [Электроразведка, 1980; Ландау, Лифшиц, 1982] имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

где $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ — электрическая индукция, \mathbf{J}_s — ток внешнего источника, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ — магнитная индукция.

Будем полагать, что проводимость среды σ и магнитная проницаемость μ среды постоянны во времени и пространстве, а диэлектрическая проницаемость среды ε зависит от одной пространственной переменной z . Рассмотрим модельную задачу распространения плоских волн в такой среде.

В одномерном случае уравнения Максвелла (ТЕ-мода) принимают вид

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (3)$$

Будем рассматривать электромагнитные волны с частотой выше 10 МГц. Такие частоты характерны для радаров. Источники с такой частотой используются в воздушных и космических системах исследования поверхности земли [Goodman, 1994; Кашкин, Сухинин, 2001].

В этой области частот при относительно невысокой проводимости среды величина тока проводимости является малой величиной по сравнению с током смещения и система уравнений (2)—(3) сводится к стандартному виду волнового уравнения с учетом малого поглощения.

Преобразование Лагерра возьмем в форме [Конюх, Михайленко, 1998]

$$\phi_n(h) = \int_0^{\infty} \phi(t) (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^{\alpha}(ht) d(ht), \quad (4)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n(h) l_n^{\alpha}(ht), \quad (5)$$

где $l_n^{\alpha}(ht)$ — ортогональная функция Лагерра [Справочник..., 1979] степени n :

$$\int_0^{\infty} l_n^{\alpha}(ht) l_m^{\alpha}(ht) d(ht) = \delta_{nm} \frac{(n+\alpha)!}{n!}. \quad (6)$$

Здесь α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра. Введение параметра h важно при численном решении задачи [Мастрюков, Михайленко, 2003].

Функция Лагерра $l_n^{\alpha}(x)$ степени n — это осциллирующая функция, определенная на промежутке от нуля до бесконечности. Она принимает нулевые значения в $n+1$ точках, в том числе в точках на границах области определения. Расстояние между нулевыми точками растет с ростом аргумента функции и параметра α . Конечной эта функция является только на промежутке от 0 до x_c , где $x_c \cong 2(2n+\alpha+1)$. При $x > x_c$ функция убывает как $x^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x}{2})$, и потому здесь она экспоненциально мала.

Применим преобразование (4) к системе уравнений (2)—(3). В результате получим следующую систему уравнений для n -й гармоники электромагнитного поля:

$$\frac{\partial H_{nx}}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{h}{2} E_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{ky} \right) + \sigma E_{ny} + J_{ny}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_{ny}}{\partial z} = \mu \left(\frac{h}{2} H_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right). \quad (8)$$

Если представить систему уравнений (7)—(8) для n -й гармоники в операторном виде [Фаддеев, Фаддеева, 1963]

$$A U_n = F_n, \quad (9)$$

где A — оператор, U_n — n -я гармоника решения, то младшие гармоники будут входить только в правую часть F_n , а оператор A не зависит от номера гармоники.

Укажем, что такой вид оператора A — это универсальное свойство преобразования Лагерра, следующее из того, что преобразование Лагерра от производной функции не содержит номера гармоники, а является линейной комбинацией самой гармоники U_n и младших гармоник.

В случае конечно-разностного метода решения уравнений (7)—(8) система дифференциальных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений, где оператор A является ленточной матрицей. Число операций при обращении такой матрицы зависит от ширины ленты матрицы и размерности матрицы, которая пропорциональна числу точек разностной сетки. Ширина ленты матрицы пропорциональна порядку разностной аппроксимации уравнений и числу уравнений в системе дифференциальных уравнений.

В точных алгоритмах обращения ленточных матриц число операций при обращении матрицы растет квадратично с шириной ленты матрицы. В то же время [Фаддеев, Фаддеева, 1963] с ростом ширины ленты матрицы падает точность вычисления обратной матрицы A^{-1} , т. е. повышение порядка разностной аппроксимации дифференциальных уравнений может вести к падению точности решения соответствующего

разностного уравнения (9) и, естественно, к падению точности решения обратной задачи. Кроме того, низкий порядок аппроксимации дает плохую аппроксимацию самого дифференциального уравнения и также низкую точность решения обратной задачи. В связи с этим необходим подбор оптимального порядка аппроксимации уравнений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в области z область $z < 0$ — однородное полупространство, а область $0 \leq z < L$ — слоистое полупространство, состоящее из P_0 горизонтально-однородных слоев. Каждый слой характеризуется диэлектрической проницаемостью ε . В точке $z = z_s$ расположен точечный источник тока \mathbf{J}_s . Ниже P_0 -го слоя полупространство однородно.

Пусть на поверхности $z = 0$ известно N гармоник поля $E_{pi} = E_{iy}(z = 0)$ и $H_{pi} = H_{ix}(z = 0)$, соответствующие распределению диэлектрической проницаемости $\varepsilon_p(z)$, значения которой на промежутке от $z = 0$ до $z = L$ необходимо определить. Толщина слоев полагается неизвестной.

Определим величину

$$F = \sum_{i=1}^N |E_i - E_{pi}|^2 + |H_i - H_{pi}|^2, \quad (10)$$

где $E_i = E_{iy}(z = 0)$ и $H_i = H_{ix}(z = 0)$ — решение уравнения (7) — (8) для некоего распределения $\varepsilon(z)$. Это распределение задано как кусочно-постоянная функция на промежутке от $z = 0$ до $z = L$ в P слоях, но на равномерной сетке слоев.

Будем искать распределение по z диэлектрической проницаемости $\varepsilon_p(z)$, минимизируя функционал F по значениям $\varepsilon(z)$ в P точках.

АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ

Для минимизации функционала будем использовать метод сопряженных градиентов и метод Ньютона. Метод сопряженных градиентов (направлений) является методом первого порядка точности, а метод Ньютона — второго порядка точности [Федоренко, 1978; Васильев, 1980], поэтому здесь имеет смысл сравнить эффективность этих алгоритмов поиска минимума функции.

Пусть функционал $F = F(\mathbf{m})$ является функцией P переменных $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p)$. Тогда квадратичное разложение этого функционала в точке \mathbf{n} в ряд Тейлора по приращению $\Delta\mathbf{m}$ запишется в виде

$$F(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}) = F(\mathbf{m}) + \nabla F(\mathbf{m})\Delta\mathbf{m} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{m}' \mathbf{H} \Delta\mathbf{m}, \quad (11)$$

где

$$\Delta\mathbf{m} = (\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_p), \quad \mathbf{H} = \nabla^2 F(\mathbf{m}) \quad (12)$$

и $\Delta\mathbf{m}'$ — вектор, транспонированный к вектору $\Delta\mathbf{m}$.

Величина \mathbf{H} — это матрица вторых производных функционала с элементами

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial m_i \partial m_j}.$$

В этих обозначениях метод сопряженных градиентов записывается в виде [Васильев, 1980; Amundsen, Ursin, 1991].

$$\mathbf{m}^{l+1} = \mathbf{m}^l + \nu^l S^l, \quad (13)$$

$$S^l = -\nabla F^l + \beta^l S^{l-1}, \quad (14)$$

$$\nu^l = \operatorname{argmin} F(\mathbf{m}^l + \nu S^l), \quad (15)$$

где $F^l = F(\mathbf{m}^l)$, l — номер итерации, \mathbf{m}^l — значение параметра \mathbf{m} на итерации l . Он требует вычисления только первых производных функционала на каждом шаге итераций.

Ньютоновский метод требует вычисления как первых, так и вторых производных функционала [Федоренко, 1978; Васильев, 1980]:

$$\mathbf{m}^{l+1} = \mathbf{m}^l + \nu^l \Delta\mathbf{m}^l, \quad (16)$$

$$\Delta m^l = H^{-1} \nabla F(\mathbf{m}^l), \quad (17)$$

$$\mathbf{v}^l = \operatorname{argmin} F(\mathbf{m}^l + \mathbf{v} \Delta m^l), \quad (18)$$

где \mathbf{H}^{-1} — матрица, обратная к матрице вторых производных \mathbf{H} .

Производные функционала будем вычислять по методу, изложенному в работе [Федоренко, 1978]. Представим систему уравнений (7)—(8) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = f(\mathbf{u}, \mathbf{m}), \quad (19)$$

тогда первую производную функционала можно вычислить по формуле

$$\delta F = \int_0^L (f_m^* \Psi, \delta \mathbf{m}) dz, \quad (20)$$

где Ψ есть решение сопряженного уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} - f_u^* \Psi = \delta(z). \quad (21)$$

Вторая производная функционала вычисляется, используя решение матричного уравнения:

$$\frac{\partial G}{\partial z} - f_u^* G = 0. \quad (22)$$

Здесь $G = G(z)$ — матрица, $G(z=0) = E$ — единичная матрица. Для того чтобы вычислить матрицу $G(z)$, необходимо K раз решить систему уравнений (19), где K — размерность вектора \mathbf{u} . Это требует больших вычислений, поскольку в нашем случае $K = 2N$, где N — число гармоник Лагерра. При использовании метода Ньютона вычисление матрицы $G(z)$ занимает основную часть времени счета.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В численных расчетах оценивалась точность решения обратной задачи оптимизационным методом при использовании спектрального разложения Лагерра. Исследовалась скорость сходимости метода сопряженных градиентов и метода Ньютона. Определялось влияние точности численной аппроксимации уравнений на точность решения обратной задачи.

Источник тока брался в виде

$$J_y = f(t) \delta(z - z_s), \quad (23)$$

$$f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (24)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.

Система уравнений (7)—(8) решалась конечно-разностным методом. Производные по пространству аппроксимировались с разным порядком точности. Использовались разностные схемы 2-, 4-, 6- и 8-го порядков точности.

На границах области решения задавались поглощающие граничные условия, исключающие образование отраженной от границ волны.

Для оценки точности решения использовалась относительная невязка решения на отрезке $[0, L]$:

$$Q = \int_0^L \frac{|\varepsilon(z) - \varepsilon_p(z)|}{\varepsilon_p(z)} dz, \quad (25)$$

$$Q_s = \int_0^L |\varepsilon(z) - \varepsilon_p(z)| dz \int_0^L \varepsilon_p(z) dz. \quad (26)$$

На приведенных далее рисунках полагалось, что диэлектрическая проницаемость поверхностного слоя среды $\varepsilon = 15\varepsilon_0$, проводимость и магнитная проницаемость среды постоянны по z и равны $\sigma = 0.005$ См/м, $\mu = \mu_0$ соответственно, где ε_0 и μ_0 — значения диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости вакуума.

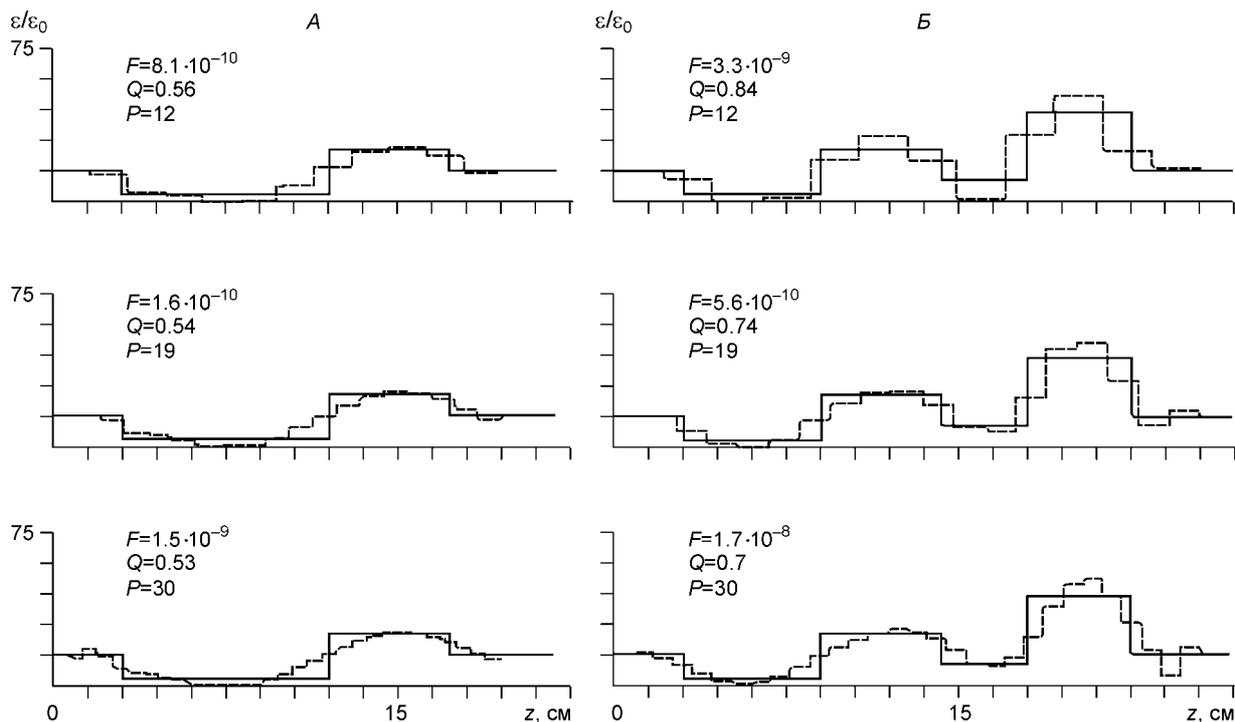


Рис. 1. Восстановление диэлектрической проницаемости:

A — методом сопряженных градиентов, *Б* — методом Ньютона. Линии: сплошная — точное, штриховая — численное решение. Величины: F — функционала, Q — погрешности, P — число точек.

Частота источника f_0 составляла 800 МГц и $\gamma = 6$. В функционале F использовались 100 гармоник Лагерра, параметры $\alpha = 1$, $h = 1$.

Результаты восстановления диэлектрической проницаемости методом сопряженных градиентов показаны на рис. 1, *A*. Исследовалась точность решения обратной задачи в зависимости от числа точек, по которым определялось искомое распределение $\varepsilon_p(z)$. Сплошная линия соответствует точному решению, штриховая — численному. Указана величина функционала F , величина погрешности Q , число определяемых точек P . Результаты получены после 400 шагов итераций. Такое большое число итераций взято для того, чтобы проверить предельную точность оптимизационного метода при использовании разложения Лагерра.

Если оценивать точность решения по величине функционала, то наибольшая точность получена при $P = 19$. По величине относительной погрешности Q наибольшая точность достигнута при $P = 30$. Дальнейшее увеличение числа восстанавливаемых точек до $P = 40$ и выше приводило к ухудшению точности решения как по величине относительной погрешности Q , так по величине функционала F .

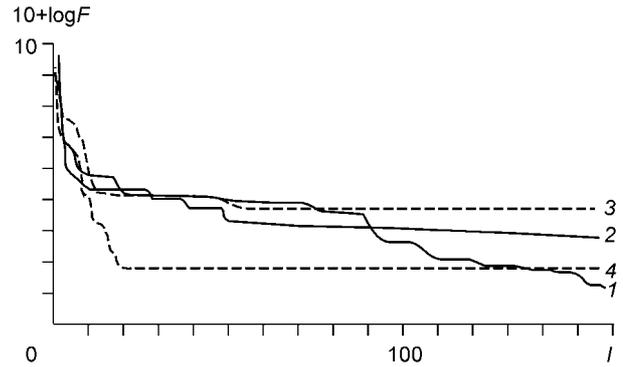
Отметим, что использование вместо метода сопряженных градиентов метода Ньютона для этого вида $\varepsilon_p(z)$ не приводило к существенному улучшению точности решения и по величине F , и по величине Q . Различия в значениях F для разных методов минимизации не достигали здесь и одного порядка величины. Возможно, это объясняется довольно простым видом $\varepsilon_p(z)$ и точность ограничена уже точностью машинного представления числа. Величина функционала здесь достигала величины $F = 10^{-10}$, при 64-разрядной точности представления числа.

На рис. 1, *Б* показаны результаты решения обратной задачи с использованием метода Ньютона. Как и в предыдущем случае, исследовалась точность решения в зависимости от числа определяемых точек P . Приведенные графики соответствуют 400 итерациям. Наибольшая точность по величине F достигается при $P = 19$, наибольшая точность по относительной погрешности — при $P = 30$. Дальнейший рост числа точек P приводит к ухудшению точности решения по обоим параметрам.

Использование метода сопряженных направлений вместо метода Ньютона для восстановления этого распределения давало существенно худшие результаты. Так, по минимальной величине F разница в значениях достигала двух порядков величины. Поэтому применение метода Ньютона для решения таких

Рис. 2. Изменение функционала в зависимости от номера итерации l для расчетов, показанных на рис. 1.

1 — метод сопряженных градиентов, 2 — метод Ньютона, 3, 4 — восстановление по гармоникам Фурье: 3 — использовано 50, 4 — 30 гармоник.



обратных задач оправданно, несмотря на существенно большие вычислительные затраты в сравнении с методом сопряженных направлений.

Величина Q_s , вычисленная по формуле (26), менялась в пределах 3 % для разных значений P , поэтому она не указана на рисунках.

Проводилось исследование влияния точности решения уравнений для гармоник Лагерра на точность решения обратной задачи. Для этого использовалась разная точность разностной аппроксимации пространственных производных в уравнениях (7)—(8). Производные аппроксимировались на чередующейся (staggered) сетке по формулам из работы [Fornberg, Ghrist, 1999].

Аппроксимация производных со вторым порядком точности оказалась неприемлемой. Точность решения при таком порядке аппроксимации зависела от шага разностной сетки и была меньше, чем при более высокой точности аппроксимации. Переход от 6-го порядка аппроксимации к 8-му не давал существенного улучшения точности решения. В целом проведенные тесты показывают, что 6-й порядок аппроксимации пространственных производных в уравнениях (7)—(8) является оптимальным в данной задаче.

Как при минимизации методом Ньютона, так и при минимизации методом сопряженных градиентов наибольшая сходимость достигается на первых 30—50 шагах итераций, что сравнимо с числом определяемых точек P .

На рис. 2 сплошными линиями показана зависимость величины функционала от номера итерации. Кривая (1) соответствует варианту, изображенному на рис. 1, А, кривая (2) — на рис. 1, Б при $P = 30$.

Было проведено сравнение данного метода с традиционным, основанным на разложении Фурье. Уравнения для гармоник Фурье решались не разностным, а численно-аналитическим методом [Amundsen, Ursin, 1991]. Решение представляется в виде рекуррентной формулы. Прямым дифференцированием этой формулы можно получить точную производную функционала. Для слоистых сред он дает практически точное решение уравнений и исключает влияние численной погрешности на конечные результаты.

Сравнение метода основанного на разложении Лагерра, с методом, использующим разложение Фурье, показало, что точность решения обратной задачи обоими методами близка. Точность оценивалась по формулам (25)—(26) при различном числе гармоник. Число гармоник менялось от 5 до 150 в обоих методах.

При этом наиболее высокая точность решения обратной задачи методом Фурье не превосходила наибольшую точность, полученную методом Лагерра.

На рис. 2 штриховыми линиями показано изменение функционала в зависимости от итераций, рассчитанное с использованием разложения Фурье для двух значений числа гармоник. Здесь методом сопряженных градиентов восстанавливалось распределение, показанное на рис. 1, А при $P = 30$.

Точность решения обратной задачи в обоих методах зависит от числа гармоник и спектра импульса источника (24). Вид спектров Фурье и Лагерра может существенно различаться. Если ширина спектра Фурье и точка максимума спектра слабо зависят от точки расположения t_0 и опре-

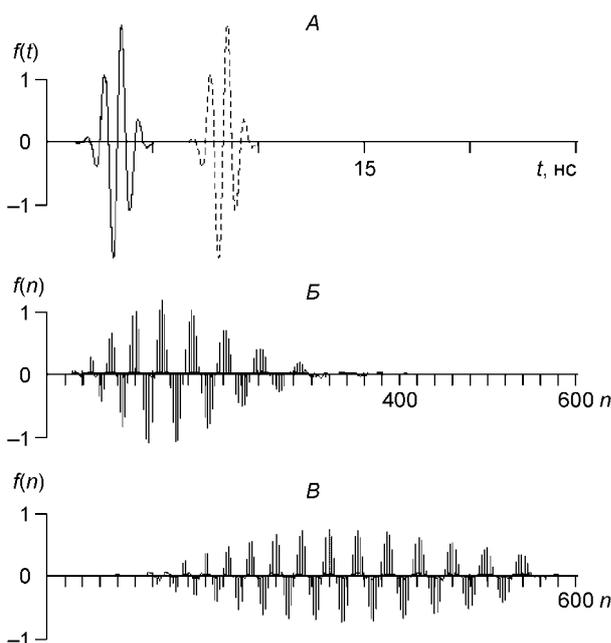


Рис. 3. Спектр Лагерра функции $f(t)$ (А) при различном расположении импульса во времени.

Спектр Б соответствует импульсу, изображенному сплошной линией, спектр В — штриховой.

деляется видом функции источника $f(t)$, то спектр Лагерра зависит от точки t_0 и от параметра h в преобразовании Лагерра (4). Это связано с тем, что функции Лагерра не периодические и являются конечными только на определенном промежутке. Вне этого промежутка они экспоненциально малы.

На рис. 3, *A* приведен вид функции $f(t)$ и ее спектр Лагерра при двух разных значениях t_0 и при $h = 5$. Спектр на рис. 3, *B* соответствует источнику, изображенному сплошной линией, на рис. 3, *B* — штрихованной. Как видно, с ростом t_0 ширина спектра увеличивается, а максимум спектра сдвигается в область высоких гармоник. С ростом параметра h ширина спектра уменьшается линейно. Точка максимума спектра также линейно сдвигается в сторону малых гармоник. Это свойство преобразования Лагерра можно использовать в обратной задаче.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разложение Лагерра можно использовать для решения обратной задачи для волнового уравнения. Точность, при таком методе решения, не уступает точности метода, основанного на разложении Фурье. В то же время применение преобразования Лагерра позволяет строить более эффективные численные алгоритмы, чем при применении преобразования Фурье.

Для решения самого волнового уравнения достаточно использовать аппроксимации 6-го порядка точности для пространственных производных.

Применение метода Ньютона в алгоритмах минимизации оправдано, несмотря на существенно большие вычислительные затраты в сравнении с методом сопряженных градиентов.

ЛИТЕРАТУРА

- Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1980, 518 с.
- Кашкин В.Б., Сухинин А.И.** Дистанционное зондирование Земли из космоса. М., Логос, 2001, 264 с.
- Конюх Г.В., Михайленко Б.Г.** Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмологии // Математическое моделирование в геофизике. Новосибирск, 1998, с. 107—112. (Труды ИВМиМГ, № 5).
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 620 с.
- Мастрюков А.Ф.** Определение плотности, скорости и коэффициента поглощения акустических волн // Математическое моделирование, 1999, № 9, с. 62—76.
- Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2003, т. 44 (10), с. 1060—1069.
- Справочник по специальным функциям** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., Наука, 1979, 832 с.
- Уайт Дж.** Возбуждение и распространение сейсмических волн. М., Недра, 1986, 260 с.
- Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М., Наука, 1963, 734 с.
- Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978, 391 с.
- Электроразведка.** Справочник геофизика / Ред. А.Г. Тархов. М., Недра, 1980, 518 с.
- Amundsen L., Ursin B.** Frequency-wavenumber inversions of acoustic data // Geophysics, 1991, v. 56, p. 1027—1039.
- Fornberg B., Ghrist M.** Spatial finite difference approximation for wave-type equations // SIAM J. Numer. Anal., 1999, v. 37, p. 105—130.
- Goodman D.** Ground-penetrating radar simulation in engineering and archaeology // Geophysics, 1994, v. 59, p. 224—232.
- Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Mathem. Lett., 1999, v. 12, p. 105—110.

*Поступила в редакцию 28 сентября 2005 г.,
после доработки — 19 апреля 2006 г.*