НАГРЕВАНИЕ ДВУСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

М. Д. Михайлов (*София, Болгария*)

Задача расчета нагрева поверхности крыла, имеющего теплоизоляцию, рассмотрена В. И. Фигуровским в [1]. В его работе принимается, что теплоотдачей со свободной поверхности металлического слоя можно пренебречь вследствие ее малости, а со стороны теплоизоляции задана температура окружающего воздуха. Из решений, полученных в [1], следует, что температура по толщине металлического слоя постоянна и является функцией только времени. Это обстоятельство положено в основу решений, приведенных ниже. За температуру окружающего воздуха принимается температура в пограничном слое, которая аппроксимирует постоянной, линейной или экспоненциальной функцией времени.

Распределение температуры по толщине изоляции найдется из решения уравнения теплопроводности [2]

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\lambda\frac{\partial t(\delta,\tau)}{\partial x} + \alpha\,[t(\delta,\tau) - t_н(\tau)] = 0, \qquad -\lambda\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} + c_м\gamma_м\delta_м\frac{dt_м(\tau)}{d\tau} = 0 \tag{2}$$

$$t_м(\tau) = t(0,\tau)$$

Здесь x — координата, τ — время, $t(x,\tau)$ — температура изоляции, $t_н(\tau)$ — температура пограничного слоя, t_0 — начальная температура изоляции, a — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент теплоотдачи, c — удельная теплоемкость, γ — удельный вес, δ — толщина изоляции, $\delta_м$ — толщина металлического слоя.

Введем безразмерные координаты и критерии

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \quad \theta = \frac{t(x,\tau) - t_0}{\Delta t}, \quad F = \frac{a\tau}{\delta^2}, \quad B = \frac{\alpha\delta}{\lambda}, \quad K = \frac{c\gamma\delta}{c_м\gamma_м\delta_м} \tag{3}$$

Критерий K представляет собой отношение между аккумуляционной способностью изоляции и аккумуляционной способностью металлического слоя.

Уравнение (1) и условия (2) можно представить соответственно в виде

$$\frac{\partial\theta(\xi,F)}{\partial F} = \frac{\partial^2\theta(\xi,F)}{\partial\xi^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\theta(1,F)}{\partial\xi} + B\,[\theta(1,F) - \theta_н(F)] = 0, \qquad -K\frac{\partial\theta(0,F)}{\partial\xi} + \frac{\partial\theta(0,F)}{\partial F} = 0 \tag{5}$$

Для решения задачи применяется преобразование Лапласа

$$\Theta(\xi,s) = \int_0^\infty \theta(\xi,F)\,e^{-sF}\,dF \tag{6}$$

Граничные условия (5) в изображениях примут вид

$$\Theta'(1,s) + B\,[\Theta(1,s) - \Theta_н(s)] = 0, \qquad -K\Theta'(0,s) + s\Theta(0,s) = 0 \tag{7}$$

Начальную температуру по толщине изоляции и металла будем считать постоянной, т. е. $\Theta(\xi, 0) = 0$. В этом случае решение уравнения (4) после подстановки значений произвольных постоянных, найденных из граничных условий (7), имеет вид

$$\Theta(\xi,s) = \Theta_H(s)\frac{\operatorname{ch}\xi\sqrt{s} + (\sqrt{s}/K)\operatorname{sh}\xi\sqrt{s}}{(1 + s/BK)\operatorname{ch}\sqrt{s} + (1/B + 1/K)\sqrt{s}\operatorname{sh}\sqrt{s}} \tag{8}$$

Температура пограничного слоя постоянна, $t_н = \mathrm{const}$. Вводим безразмерные температуры

$$\theta = \frac{t(x,\tau) - t_0}{t_н - t_0}, \quad \theta_н = 1, \quad \Theta_н(s) = \frac{1}{s}$$

Решение для изображения будет иметь вид

$$\Theta(\xi,s) = \frac{\operatorname{ch}\xi\sqrt{s} + \sqrt{s}/K\operatorname{sh}\xi\sqrt{s}}{s\,[(1 + s/BK)\operatorname{ch}\sqrt{s} + (1/B + 1/K)\sqrt{s}\operatorname{sh}\sqrt{s}]} \tag{9}$$

Пользуясь теоремой разложения, находим

$$\theta(\xi, F) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos \mu_n \xi - \frac{\mu_n}{K} \sin \mu_n \xi\right] \exp(-\mu_n^2 F) \tag{10}$$

$$A_n = \left[\left(1 - \frac{\mu_n^2}{BK}\right) \frac{\sin \mu_n \cos \mu_n + \mu_n}{2 \sin \mu_n} + \frac{\mu_n^2}{BK} \cos \mu_n\right]^{-1} \tag{11}$$

Здесь μ_n — бесчисленное множество корней характеристического уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1/B + 1/K}{1 - \mu^2 / BK} \mu \tag{12}$$

Температура пограничного слоя — экспоненциальная функция времени

$$t_н(\tau) = t_m - (t_m - t_0)\, e^{-k\tau} \qquad (k = \text{const})$$

Здесь t_m — максимальная температура среды. Вводим безразмерные температуры

$$\theta = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_m - t_0}, \qquad \Theta_н(\tau) = 1 - e^{-pF} \quad \left(p = \frac{k\delta^2}{a}\right), \qquad \Theta_н(s) = \frac{1}{s(1 + s/p)}$$

Решение (8) примет вид

$$\Theta(\xi, s) = \frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{s} + (\sqrt{s} / K) \operatorname{sh} \xi \sqrt{s}}{s(1 + s/p)(1 + s/BK) \operatorname{ch} \sqrt{s} + (1/B + 1/K) \sqrt{s} \operatorname{sh} \sqrt{s}} \tag{13}$$

Применяя теорему разложения, находим

$$\theta(\xi, F) = 1 - \frac{\cos \xi \sqrt{p} - (\sqrt{p}/K) \sin \xi \sqrt{p}}{(1 - p/BK) \cos \sqrt{p} - (1/B + 1/K) \sqrt{p} \sin \sqrt{p}} \exp(-pF) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{1 - \mu_n^2 / p} \left[\cos \mu_n \xi - \frac{\mu_n}{K} \sin \mu_n \xi\right] \exp(-\mu_n^2 F) \tag{14}$$

Здесь A_n и μ_n определяются согласно (11) и (12). Температура пограничного слоя — линейная функция времени

$$t_н(\tau) = t_0 + b\tau \qquad (b = \text{const})$$

Вводим безразмерные температуры

$$\theta_н = \frac{t - t_0}{t_0} = pF \qquad \left(p = \frac{b\delta^2}{at_0}\right), \qquad \Theta_н(s) = \frac{p}{s^2}$$

Решение (8) примет вид

$$\theta(\xi, s) = p \frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{s} + (\sqrt{s}/K) \operatorname{sh} \xi \sqrt{s}}{s^2 [(1 + s/BK) \operatorname{ch} \sqrt{s} + (1/B + 1/K) \sqrt{s} \operatorname{sh} \sqrt{s}]} \tag{15}$$

Пользуясь теоремой разложения, находим

$$\frac{\theta(\xi, F)}{p} = F - \frac{1}{2}\left[1 + 2\frac{1 + K + B}{BK} - \xi^2 - \frac{2\xi}{K}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \left[\cos \mu_n \xi - \frac{\mu_n}{K} \sin \mu_n \xi\right] \exp(-\mu_n^2 F) \tag{16}$$

Здесь A_n и μ_n определяются согласно (11) и (12).

Если аккумуляционная способность металлического слоя очень мала по сравнению с аккумуляционной способностью изоляции ($K = \infty$), то решения (10), (14) и (16) превращаются в рассмотренные А. В. Лыковым [2] (стр. 158, 225, 234).

Поступила 12 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Фигуровский В. И. Расчет нагрева двухслойных пластин. Изв. высш. учебн. завед., сер. Авиационная техника, 1960, № 2, стр. 99—104.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехтеориздат, 1952.