

ВОЛНЫ СТОУНЛИ, РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПРОНИЦАЕМОСТИ И ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ ПОРИСТЫХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

В.Н. Доровский¹, Ю.В. Перепечко^{1,2}, А.И. Федоров¹

¹ Компания «Бэйкер Хьюз», Новосибирский технологический центр,
630128, Новосибирск, ул. Кутателадзе, 4а, Россия

² Институт геологии и минералогии им. В.С. Соболева СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия

Рассматривается двухмодовый метод измерения проницаемости и электроакустической постоянной в скважинной диагностике. Первая мода — волна Стоунли и электроакустическое отношение в ней; вторая мода — радиальная волна в формации, окружающей скважину, и генерируемое ею электрическое поле. Радиальная волна позволяет измерить электроакустическую константу, волна Стоунли — электроакустическое соотношение, линейно зависящее от проницаемости. Совместное использование результатов этих измерений позволяет определить проницаемость пористой среды. Все знания о формации сводятся к дополнительному измерению электропроводности.

Проницаемость, насыщенные пористые среды, акустические волны, радиальные колебания скважины, волны Стоунли, электроакустическая постоянная.

STONELEY WAVES, RADIAL WAVES, AND METHOD OF MEASURING PERMEABILITY AND ELECTROACOUSTIC CONSTANT OF SATURATED POROUS MEDIA

V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko, and A.I. Fedorov

A two-mode method of measuring permeability and electroacoustic constant in the course of borehole logging is considered. The first mode is the Stoneley wave with its electroacoustic ratio; the second mode is the radial wave in the formation around the borehole with the electric field it generates. The radial wave enables one to measure the electroacoustic constant and the Stoneley wave, the electroacoustic ratio, linearly dependent on permeability. Using these measurements jointly enables one to find permeability of the porous medium. All formation evaluation can be reduced to an additional measurement of electric conductivity.

Permeability, saturated porous media, acoustic waves, radial oscillations, Stoneley waves, electroacoustic constant

ВВЕДЕНИЕ

Акустических скважинных методов измерения физического значения проницаемости практически не существует. Можно сослаться на два патента: Exxon Mobil [Wu, Yin, 2007] и Baker Hughes [Dorovsky et al., 2010]. Физической основой измерения проницаемости в обоих патентах является зависимость длины поглощения волны Стоунли от проницаемости. При этом слабыми сторонами определения проницаемости являются: необходимость определения пористости среды, плотностей матрицы и жидкости ее насыщающей, первой продольной, второй продольной и поперечной скоростей звука; сильная зависимость результатов измерения проницаемости от второй продольной и достаточно сложная процедура косвенного вычисления этой скорости; результат измерения не является локально определенным в силу значительного масштаба поглощения волны Стоунли.

В 2004 г. компания Sondex предложила электроакустический метод измерения проницаемости пористой среды, насыщенной электролитом в пористой среде за скважиной, используя зависимость электроакустического соотношения для волн Стоунли от проницаемости среды [Singer et al., 2006]. Анализ зависимости коэффициента электроакустической конверсии от проницаемости k и электроакустической постоянной α показывает, что этот коэффициент имеет вид

$$\frac{E_z}{V_z} = \alpha k \cdot F(\alpha, k, \omega), \quad (1)$$

где E_z — электрическое поле, обусловленное волной Стоунли, V_z — скорость жидкости. Функция $F(\alpha, k, \omega)$ является слабозависящей от α и k функцией. Кривые зависимости функции $F(\alpha, k, \omega)$ от

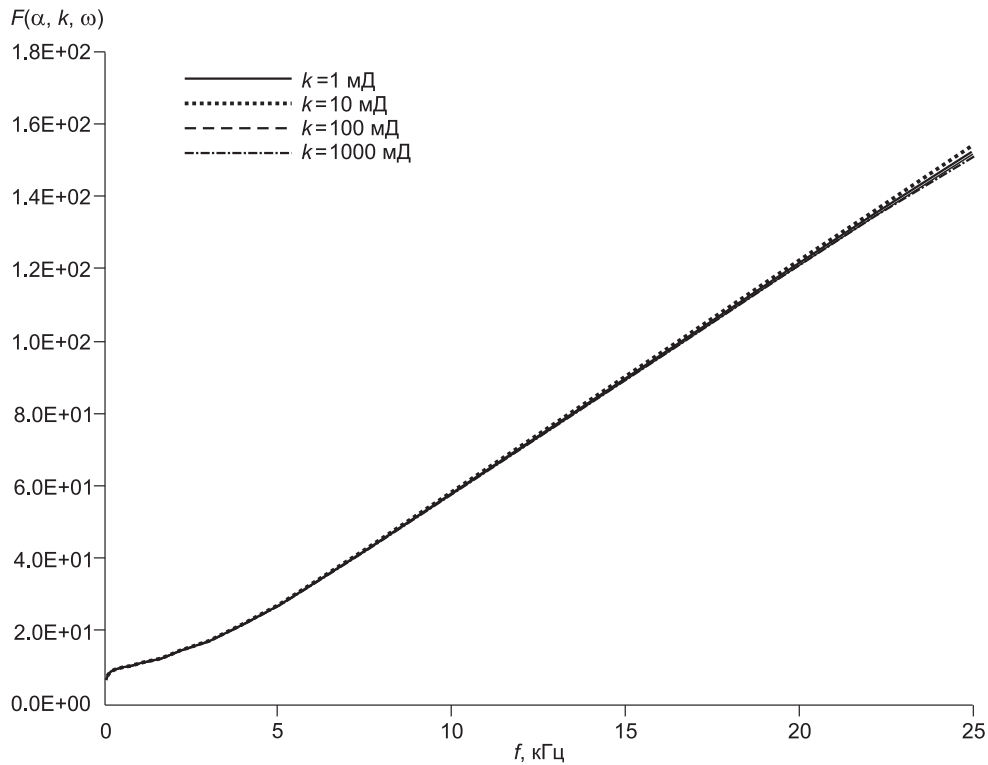
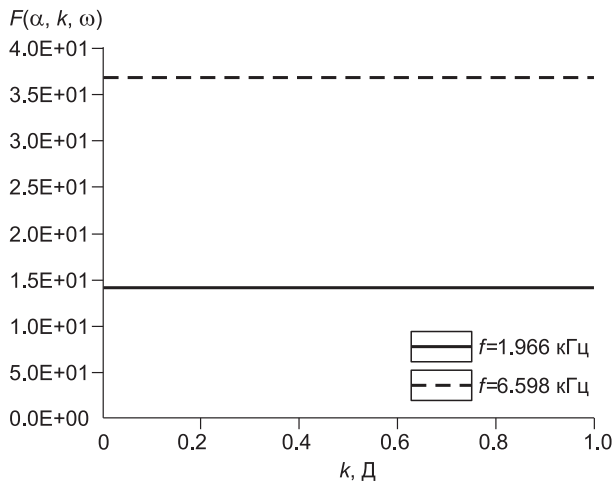


Рис. 1. Частотная зависимость нормированного электроакустического соотношения при различных значениях проницаемости.

частоты и проницаемости, иллюстрирующие это, представлены на рис. 1, 2. Теория волн Стоунли с учетом электроакустических явлений, позволяющая рассчитать электроакустическое соотношение, строилась на основе континуальной теории фильтрации и подробно изложена в Приложении I.

Произведение αk практически не зависит от проницаемости и пропорционально дзета-потенциалу двойного слоя пористой среды, поскольку сама электроакустическая постоянная обратно пропорциональна проницаемости. Из графиков зависимости электроакустического отношения от проницаемости [Singer et al., 2005], на которой компания Sondex строит свой метод измерения проницаемости, видно, что при изменении проницаемости на три порядка электроакустическое отношение меняется всего в два раза. Кроме того, электроакустическое отношение также зависит от дзета-потенциала, который необходимо измерять отдельно. Процедура же измерения дзета-потенциала не обсуждается. Таким образом, одного электроакустического отношения недостаточно, схема измерения проницаемости компании Sondex неполная и обладает слабой чувствительностью по отношению к проницаемости. Можно сказать, что в методе компании Sondex измеряется дзета-потенциал.

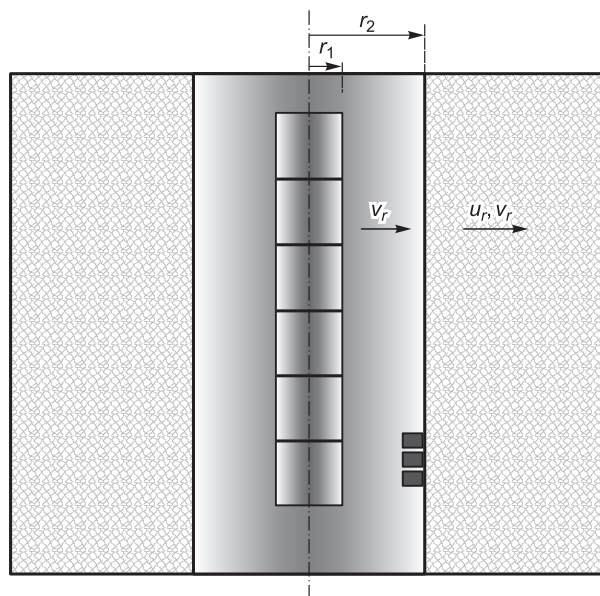


МЕТОД ДВУХ МОД ДЛЯ СКВАЖИННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПРОНИЦАЕМОСТИ И ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

Чрезвычайно слабая зависимость электроакустического соотношения в методе компании Sondex от проницаемости формации не исключает использования электроакустического преобразования на волнах Стоунли в качестве составляющей отдельного метода для измерения проницаемости

Рис. 2. Зависимость нормированного электроакустического соотношения от проницаемости при различных значениях частоты.

Рис. 3. Рассматриваемая система представляет скважину ($r < r_2$), заскважинное пространство ($r \geq r_2$), бесконечный источник акустического сигнала ($r \leq r_1$) и принимающие акустические датчики, расположенные на/у поверхности раздела сред.



[Dorovsky et al., 2012]. Основанием для такого заключения может служить теоретическая линейная функциональная зависимость коэффициента электроакустической конверсии от проницаемости и электроакустической постоянной, определяемая соотношением (1). Для практического использования этой зависимости в настоящей статье предлагается рассмотреть дополнительную колебательную моду — чисто радиальные вынужденные колебания скважинного пространства, обусловленные достаточно протяженным централизованным источником акустических возмущений, как это представлено на рис. 3. Радиальные колебания обладают замечательным свойством: электрический заряд, сосредоточенный на границе раздела скважины и пористой среды, линейно зависит от электроакустической постоянной и слабо зависит от проницаемости. Последнее обстоятельство позволяет, зная значение электроакустической постоянной, определить значение проницаемости по формуле (1) с использованием электроакустического отношения волны Стоунли. Одновременное использование метода компании Sondex обеспечит ошибку первого приближения при косвенном измерении.

Действительно, теория радиальных колебаний (см. Приложение II) показывает, что поверхностная плотность электрического заряда $Q|_{\text{boundary}}$, возникающая на поверхности раздела двух сред в скважине при радиальных колебаниях скважины, определяется соотношением

$$Q|_{\text{boundary}} = \frac{E_r|_{\text{boundary}}}{4\pi} = \alpha \cdot \frac{\rho_l (v_r - u_r)|_{\text{boundary}}}{4\pi\sigma}. \quad (2)$$

Здесь α — электроакустическая константа насыщенной пористой среды, σ — электропроводность, $\rho_l = \phi \rho_l^{ph}$ — парциальная плотность жидкости в пористой среде, ϕ — пористость среды за скважиной, ρ_l^{ph} — физическая плотность жидкости, $u_r - v_r$ — разница скоростей и пористой матрицы насыщающей жидкости в режиме радиальных колебаний вне резонансных зон, E_r — электрическое поле, обусловленное радиальными волнами. Измерив разность двух скоростей $u_r - v_r$ (для чего необходимо провести независимые измерения скорости скважинной жидкости $v_r^{(0)}$ у границы скважины и скорости пористой матрицы u_r на границе скважины, после чего вычисляется разность скоростей по формуле $u_r - v_r = (u_r - v_r^{(0)})/\phi$) и, измерив электрический заряд на поверхности специализированным датчиком (реально измеряется электрическое поле, согласно (2) заряд пересчитывается), по формуле (2) можно вычислить электроакустическую константу

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma Q|_{\text{boundary}}}{\rho_l (v_r - u_r)|_{\text{boundary}}} = \frac{\sigma E_r|_{\text{boundary}}}{\rho_l^{ph} (v_r^{(0)} - u_r)|_{\text{boundary}}}. \quad (3)$$

Как следует из соотношения (3), измерение пористости формации ϕ для вычисления α не требуется.

Важно отметить, что в первом приближении можно допустить независимость разности $v_r - u_r$ от проницаемости пористого пространства k . Действительно, на рис. 4 представлена зависимость разности скоростей $v_r - u_r$ от частоты возбуждаемого сигнала на границе раздела сред для фиксированной проницаемости с выделением резонансных зон. На рис. 4 явно выделяются характерные резонансные частоты, природа которых носит геометрический характер. Рис. 5 иллюстрирует зависимость разности скоростей $v_r - u_r$ от проницаемости k в зоне 1-го резонанса (верхняя кривая), а также вне зоны резонанса (нижняя кривая). Верхняя кривая описывает разность скоростей, сильно зависящую от проницаемости в узкой резонансной зоне шириной ~ 300 Гц. Вне этой зоны зависимость от проницаемости представлена нижней кривой. Таким образом, вне резонансных зон разность скоростей слабо зависит от проницаемости и в первом приближении поверхностный заряд, формирующийся на поверхности разде-

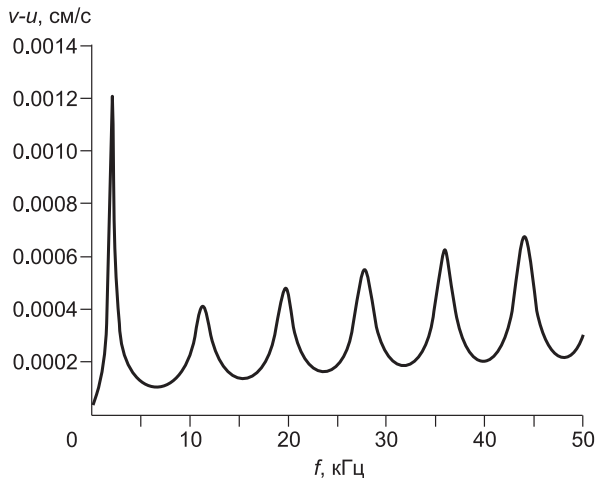


Рис. 4. Зависимость разности амплитуд скоростей пористой матрицы и насыщающей жидкости от частоты.

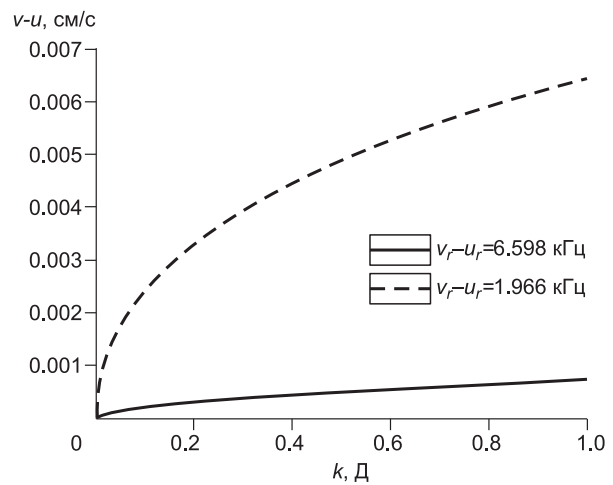


Рис. 5. Зависимость разности амплитуд скоростей пористой матрицы и насыщающей жидкости от проницаемости на резонансной (1.966 кГц) и нерезонансной (6.987 кГц) частотах.

ла сред, можно считать не зависящим от проницаемости, а зависящим только от электроакустической постоянной. Аналогичное поведение испытывает заряд и вне других резонансных зон. Располагая теоретическим значением $F(\alpha, k, \omega)$, измеренным значением отношения E_z/V_z для волны Стоунли и вычисленным значением коэффициента α (см. формулу (3)), можно определить проницаемость

$$k = \frac{E_z/V_z}{\alpha \cdot F(\alpha, k, \omega)}.$$

Таким образом, проведя два типа измерений — измерение с радиальными колебаниями и измерения электроакустического отношения в волне Стоунли, последовательно определяем электроакустическую константу и проницаемость. С целью повышения точности последующих измерений можно учесть слабую функциональную зависимость F и $(v_r - u_r)$ от параметров α , k , ω в последующем итерационном цикле.

Следует отметить, что в развитом выше подходе при введении электроакустической постоянной не использовалась теория Прайда [Pride, 1994]. Эксперименты компании Sondex показывают, что акустический частотный спектр волны Стоунли повторяет частотный спектр электрического сигнала, обусловленного волной Стоунли, в исследуемой полосе частот, т.е. отсутствует дисперсия электроакустической постоянной, что, вообще говоря, не согласуется с теорией Прайда. Поэтому авторы, исходя из соображений максимальной общности, вводят в электродинамику диссипативные коэффициенты (электропроводность и электроакустическую постоянную), исходя из второго начала термодинамики.

Авторы признательны Б.С. Светову, С.С. Кеворкянцу за критические замечания и полезные предложения позволившие улучшить содержание рукописи.

ПРИЛОЖЕНИЕ I. ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ В ВОЛНЕ СТОУНЛИ

Основу описания динамики взаимодействия электромагнитного поля и гидродинамического течения в насыщенных деформируемых пористых средах составляют фундаментальные физические принципы: законы сохранения, групповая инвариантность физических законов, первое и второе начала термодинамики, общие принципы линейной неравновесной термодинамики. Уравнения двухскоростной гидродинамики получены в [Доровский, 1989; Доровский, Перепечко, 1992]. Полная система уравнений двухскоростной электромагнитогидродинамики для систем с конечной электропроводностью получена в [Доровский, Доровский, 2009] и имеет вид

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}, \quad (\text{I.1})$$

$$\dot{S} + \text{div} \left(\frac{S}{\rho} \mathbf{j} + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{R}{T}, \quad (\text{I.2})$$

$$\mathbf{j}_i + \partial_k \Pi_{ik} = 0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{4\pi c_e}, \quad (\text{I.3})$$

$$\dot{g}_{ik} + g_{jk} \partial_i u_j + g_{ij} \partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} = 0, \quad (\text{I.4})$$

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{h_{ik}}{2\rho} \nabla g_{ik} + \frac{\rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{q_l^e}{\rho_l} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c_e q^e} (\mathbf{j}_0^e \wedge \mathbf{B}) \right) + \frac{\mathbf{f}}{\rho_l}, \quad (\text{I.5})$$

$$\dot{E} + \text{div}(\mathbf{Q} + \mathbf{W}) = 0. \quad (\text{I.6})$$

Электромагнитная часть представлена уравнениями Максвелла:

$$\dot{\mathbf{B}} + c_e \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (\text{I.7})$$

$$\dot{\mathbf{E}} - c_e \text{rot} \mathbf{B} = -4\pi \mathbf{j}^e, \quad (\text{I.8})$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi q^e, \quad (\text{I.9})$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{I.10})$$

Обратимые потоки и энергия определяются соотношениями

$$\Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + h_{ij} g_{jk} + p \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} B_i B_k - \frac{1}{4\pi} E_i E_k + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \delta_{ik},$$

$$\mathbf{Q} = (p + E - (\mathbf{u}, \mathbf{j})) \frac{\mathbf{j}}{\rho} + (\mathbf{u}, \mathbf{j}_0) \mathbf{u} + u_k h_{im} g_{mk} + \frac{c_e}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \frac{\mathbf{j}}{\rho},$$

$$E = E_0 + (\mathbf{v}, \mathbf{j}_0) + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2).$$

В отсутствие поляризационных эффектов, внутренняя энергия E_0 и давление p определяются термодинамическими соотношениями

$$dE_0 = T dS + \mu d\rho + (\mathbf{u} - \mathbf{v}, d\mathbf{j}_0) + \frac{1}{2} h_{ik} dg_{ik},$$

$$p = -E_0 + TS + \mu \rho + (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{j}_0).$$

Здесь $\rho_s, \rho_l, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ — парциальные плотности и скорости движения поровой вмещающей матрицы и насыщающей жидкости соответственно; $\rho = \rho_s + \rho_l$ — плотность двухскоростной среды; $\mathbf{j}_0 = \rho_s (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ — относительный импульс двух взаимопроникающих сред; \mathbf{j} — импульс; g_{ik} — метрический тензор деформаций; $h_{ik} = (\partial E_0 / \partial g_{ik})_{\rho, S, \mathbf{j}_0}$; T — температура; S — энтропия; μ — химический потенциал; \mathbf{E} — электрическое поле; \mathbf{B} — магнитная индукция; q_s^e, q_l^e — плотности электрического заряда пористой матрицы и жидкости, $q^e = q_s^e + q_l^e$; \mathbf{j}^e — плотность электрического тока; $\mathbf{j}_0^e = q_s^e \mathbf{u} + q_l^e \mathbf{v}$; c_e — скорость света.

Дополнительные потоки \mathbf{Q} , \mathbf{W} и сила трения \mathbf{f} вводят в теорию диссипативные эффекты. Согласование системы уравнений (I.1)—(I.10) приводит к следующим выражениям для необратимого потока энергии: $\mathbf{W} = \mathbf{q}$ и для диссипативной функции

$$-R = \mathbf{f}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) - (\mathbf{j}^e - q_s^e \mathbf{u} - q_l^e \mathbf{v}) \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c_e} (\mathbf{j}_0^e \wedge \mathbf{B}) \right) + \mathbf{q} \frac{\nabla T}{T}.$$

Следствием положительной определенности диссипативной функции являются выражения для диссипативных потоков. Соотношения для векторных потоков имеют вид

$$-\mathbf{f} = \chi(\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) + \alpha_{12} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c_e} (\mathbf{j}_0^e \wedge \mathbf{B}) \right) + \alpha_{13} \frac{\nabla T}{T}, \quad (\text{I.11})$$

$$\mathbf{j}^e - \mathbf{j}_0^e = \alpha_{12} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) + \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c_e} (\mathbf{j}_0^e \wedge \mathbf{B}) \right) + \alpha_{23} \frac{\nabla T}{T}, \quad (\text{I.12})$$

$$-\mathbf{q} = \alpha_{13} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) + \alpha_{23} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c_e} (\mathbf{j}_0^e \wedge \mathbf{B}) \right) + \kappa \frac{\nabla T}{T}. \quad (\text{I.13})$$

В соотношениях (I.11)—(I.13) определено $\alpha_{11} = \chi$ — коэффициент межфазного трения; $\alpha_{12} = -\alpha$ — электроакустический коэффициент насыщенной пористой среды; $\alpha_{22} = \sigma$ — удельная проводимость; $\alpha_{33} = \kappa$ — коэффициент теплопроводности. В магнитогидродинамическом приближении плотность тока выражается через магнитное поле соотношением $\mathbf{j}^e = \frac{c_e}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}$ и уравнения Максвелла (I.7)—(I.10) сводятся к уравнению двухскоростной магнитной гидродинамики:

$$\dot{\mathbf{B}} + \text{rot} \left(\frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{c_e}{\sigma} \mathbf{j}_0^e - \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \frac{\sigma_s}{\sigma} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) - \frac{\sigma_l}{\sigma} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \frac{\alpha_{23}}{\sigma} \frac{\nabla T}{T} \right) = 0, \quad (\text{I.14})$$

где введены $\sigma_{s,l} = \sigma q_{s,l}^e / q^e$.

Таким образом, система уравнений (I.1)—(I.5), (I.14) описывает двухскоростную магнитоги́дродинамику с учетом электросейсмического эффекта. Линеаризованный вариант представленных выше уравнений позволяет получить выражение для электроакустического отношения в волне Стоунли в скважине. Исключим из системы (I.1)—(I.5), (I.14) эффекты вязкости и теплопроводности, а также пренебрежем объемными электрическими зарядами. Тогда акустическое и электрическое поля в насыщенной пористой среде описываются системой линейных уравнений:

$$\ddot{\mathbf{u}} - c_t^2 \Delta \mathbf{u} - a_1 \nabla \text{div } \mathbf{u} + a_2 \nabla \text{div } \mathbf{v} + \frac{\rho_l}{\rho_s} b_\alpha (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\rho_l}{\rho_s} b_e \text{rot } \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (\text{I.15})$$

$$\ddot{\mathbf{v}} + a_3 \nabla \text{div } \mathbf{u} - a_4 \nabla \text{div } \mathbf{v} - b_\alpha (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) - b_e \text{rot } \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (\text{I.16})$$

$$\dot{\mathbf{B}} - \frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B} - 4\pi \rho_l b_e \text{rot} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{I.17})$$

$$\mathbf{E} = \frac{c_e}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c_e} \rho_l b_e (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (\text{I.18})$$

Здесь введены коэффициенты $b_\alpha = \rho_l \chi (1 - \alpha^2 / (\sigma \chi))$, $b_e = \alpha c_e / (4\pi\sigma)$. Коэффициенты χ и α связаны с проницаемостью насыщенной пористой среды соотношениями, отвечающими соотношениям Дарси и Гельмгольца-Смолуховского: $\chi = \eta / (\rho \rho_l k)$, $\alpha = \varepsilon_e \zeta / (4\pi \rho_l k)$, где η — динамическая вязкость насыщающей жидкости, k — проницаемость, ε_e — диэлектрическая постоянная среды, ζ — дзета-потенциал.

Коэффициенты уравнений (I.15)—(I.16) определяются тремя модулями упругости насыщенной пористой среды $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, μ , γ :

$$a_1 = \frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\rho_s^2}{\rho^2} \gamma + \frac{\rho_l^2}{\rho^2} K + \frac{1}{3} \mu \right), \quad a_2 = \frac{\rho_l}{\rho_s} \left(\frac{\rho_l}{\rho^2} K - \frac{\rho_s}{\rho^2} \gamma \right),$$

$$a_3 = \frac{\rho_l}{\rho^2} K - \frac{\rho_s}{\rho^2} \gamma, \quad a_4 = \frac{\rho_l}{\rho^2} K + \frac{\rho_l}{\rho^2} \gamma.$$

Модули упругости K , μ и γ можно определить по экспериментально измеримым скоростям звука насыщенной пористой среды: продольным c_{p1} , c_{p2} и поперечной c_t .

Рассмотрим гармонические колебания. Запишем уравнения (I.15)—(I.18) в безразмерном виде:

$$\bar{a}_5 \Delta \mathbf{u} + \bar{a}_1 \nabla \text{div } \mathbf{u} - \bar{a}_2 \nabla \text{div } \mathbf{v} + (1 + \varepsilon \bar{b}_\alpha) \mathbf{u} - \varepsilon \bar{b}_\alpha \mathbf{v} + \varepsilon \bar{b}_e \text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{I.19})$$

$$-\bar{a}_3 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \bar{a}_4 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \bar{b}_\alpha \mathbf{u} + (1 + \bar{b}_\alpha) \mathbf{v} - \bar{b}_e \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{I.20})$$

$$ig \Delta \mathbf{B} + i \operatorname{rot}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \mathbf{B} = 0, \quad (\text{I.21})$$

$$\mathbf{E} = \frac{c_t}{c_e} g \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{c_t}{c_e} (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (\text{I.22})$$

Здесь скорости \mathbf{u} , \mathbf{v} измеряются в единицах поперечной скорости звука c_t , координаты — в единицах c_t/ω , \mathbf{B} — в единицах $\alpha c_e \rho_l / \sigma$. Безразмерные коэффициенты уравнений: $\lambda_0 = c_{p0}^2 / c_t^2$, $\bar{a}_i = a_i / c_t^2$, $\bar{b}_\alpha = i b_\alpha / \omega$, $\varepsilon = \rho_l / \rho_s$, $g = \omega c_e^2 / (4\pi \sigma c_t^2)$, $\bar{b}_e = i \alpha^2 \rho_l c_e^2 / (4\pi \sigma^2 c_t^2)$.

Для исследования волны Стоунли с централизованным источником в скважине достаточно сохранить цилиндрическую симметрию задачи. Гидродинамические скорости сред должны иметь компоненты $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)$ и $\mathbf{v} = (v_r, 0, v_z)$. Введем потенциалы

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_u - \operatorname{rot} \Psi_u, \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi_v - \operatorname{rot} \Psi_v, \quad (\text{I.23})$$

при этом векторные потенциалы скоростей в данной геометрии задачи имеют только по одной компоненте $\Psi_u = (\Psi_u, 0, 0)$ и $\Psi_v = (\Psi_v, 0, 0)$. Магнитное поле также имеет одну компоненту $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, 0)$. В цилиндрических координатах выражения (I.23) принимают вид

$$u_r = \partial_r \varphi_u + \partial_z \Psi_u, \quad u_z = \partial_z \varphi_u - \partial_r \Psi_u - \frac{1}{r} \Psi_u,$$

$$v_r = \partial_r \varphi_v + \partial_z \Psi_v, \quad v_z = \partial_z \varphi_v - \partial_r \Psi_v - \frac{1}{r} \Psi_v.$$

Две независимые подсистемы, описывающие продольные и поперечные волны в насыщенной пористой среде, получаются в результате подстановки (I.23) в уравнения (I.19)—(I.21):

$$(\bar{a}_1 + 1) \Delta \varphi_u - \bar{a}_2 \Delta \varphi_v + (1 + \varepsilon \bar{b}_\alpha) \varphi_u - \varepsilon \bar{b}_\alpha \varphi_v = 0, \quad (\text{I.24})$$

$$-\bar{a}_3 \Delta \varphi_u + \bar{a}_4 \Delta \varphi_v - \bar{b}_\alpha \varphi_u + (1 + \bar{b}_\alpha) \varphi_v = 0, \quad (\text{I.25})$$

$$\Delta_\varphi \Psi_u + (1 + \varepsilon \bar{b}_\alpha) \Psi_u - \varepsilon \bar{b}_\alpha \Psi_v - \varepsilon \bar{b}_e B_\varphi = 0, \quad (\text{I.26})$$

$$-\bar{b}_\alpha \Psi_u + (1 + \bar{b}_\alpha) \Psi_v + \bar{b}_e B_\varphi = 0, \quad (\text{I.27})$$

$$g \Delta_\varphi B_\varphi + \Delta_\varphi \Psi_u - \Delta_\varphi \Psi_v + i B_\varphi = 0. \quad (\text{I.28})$$

Здесь введены операторы $\Delta \varphi = \partial_r^2 \varphi + \frac{1}{r} \partial_r \varphi + \partial_z^2 \varphi$ и $\Delta_\varphi \Psi_i = \partial_r^2 \Psi_i + \frac{1}{r} \partial_r \Psi_i - \frac{1}{r^2} \Psi_i + \partial_z^2 \Psi_i$.

Вдоль оси z для принятой симметрии волна Стоунли представляется плоской волной $(\varphi_u, \varphi_v, \Psi_u, \Psi_v, \mathbf{B}) \rightarrow (\varphi_u, \varphi_v, \Psi_u, \Psi_v, \mathbf{B}) \cdot \exp(ikz - i\omega t)$.

Найдем общие решения уравнений (I.19)—(I.21). Рассмотрим эволюцию продольных волн в насыщенной пористой среде, которая описывается системой (I.24), (I.25):

$$A \Delta \Phi + W \Phi = 0. \quad (\text{I.29})$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & -\bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов, $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 + \bar{a}_5$; $W = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon \bar{b}_\alpha) & -\varepsilon \bar{b}_\alpha \\ -\bar{b}_\alpha & (1 + \bar{b}_\alpha) \end{pmatrix}$; $\Phi = (\varphi_u \quad \varphi_v)^T$ — вектор-столбец функций. Преобразуем систему (I.29) к виду

$$H \Delta \Phi + \Phi = 0, \quad \text{здесь } H = W^{-1} A, \quad (\text{I.30})$$

умножив на матрицу W^{-1} . Компоненты матрицы H имеют значения

$$h_{11} = \left((1 + \bar{b}) \bar{a}_0 - \varepsilon \bar{b} \bar{a}_3 \right) / \det W, \quad h_{12} = \left(-(1 + \bar{b}) \bar{a}_2 + \varepsilon \bar{b} \bar{a}_4 \right) / \det W,$$

$$h_{21} = \left(\bar{b} \bar{a}_0 - (1 + \varepsilon \bar{b}) \bar{a}_3 \right) / \det W, \quad h_{22} = \left(-\bar{b} \bar{a}_2 + (1 + \varepsilon \bar{b}) \bar{a}_4 \right) / \det W,$$

где $\det W = 1 + (1 + \varepsilon) \bar{b}_\alpha$.

Приведем полученную систему уравнений (I.30) к диагональному виду

$$\Lambda \Delta \Omega + \Omega = 0, \quad (\text{I.31})$$

где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\Omega = (\varphi_1 \quad \varphi_2)^T$, с помощью матрицы преобразований R , составленной из правых собственных векторов матрицы A : $R^{-1}AR = \Lambda$, $R_{11} = 1$, $R_{12} = (\lambda_2 - h_{22})/h_{21}$, $R_{21} = h_{21}/(\lambda_1 - h_{22})$, $R_{22} = 1$. Вектор-столбец функций преобразуется следующим образом: $R^{-1}\Phi = \Omega$. Диагональная матрица Λ имеет в качестве диагональных элементов собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A .

Таким образом, система уравнений (I.24), (I.25) в цилиндрических координатах представлена в диагональной форме

$$\varphi_{1,2}'' + \frac{1}{r} \varphi_{1,2}' - l_{1,2}^2 \varphi_{1,2} = 0, \quad (\text{I.32})$$

где $l_{1,2}^2 = k^2 - \lambda_{1,2}^{-1}$. Штрих означает производную по радиусу.

Решения уравнений (I.32) выражаются через модифицированные функции Бесселя $K_0(lr)$, $I_0(lr)$ и, с учетом ограниченности решения на бесконечности, имеют вид

$$\varphi_1 = C_1 K_0(l_1 r), \quad \varphi_2 = C_2 K_0(l_2 r). \quad (\text{I.33})$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение (I.33) связано с решением исходной системы (I.24), (I.25) соотношениями $\Phi = R\Omega$, что позволяет записать решение для потенциалов Φ_u, Φ_v

$$\varphi_u = C_1 K_0(l_1 r) + C_2 R_{12} K_0(l_2 r), \quad \varphi_v = C_1 R_{21} K_0(l_1 r) + C_2 K_0(l_2 r). \quad (\text{I.34})$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (I.26)—(I.28), определяющую эволюцию поперечных волн. Второе уравнение дает связь между потенциалами

$$\Psi_v = \bar{b}_\alpha \beta \Psi_u - \bar{b}_e \beta B_\varphi, \quad \beta = (1 + \bar{b}_\alpha)^{-1}, \quad (\text{I.35})$$

что позволяет исключить Ψ_v из системы (I.26)—(I.28). Принимая во внимание вид решения, запишем уравнения, определяющие эволюцию продольных волн, в матричной форме

$$D \Delta_\varphi \Psi + W \Psi = 0. \quad (\text{I.36})$$

Здесь $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\beta & i(g + \bar{b}_e \beta) \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} \varepsilon \bar{b}_\alpha \beta & -\varepsilon \bar{b}_e \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Psi = (\Psi_u \quad B_\varphi)^T$. Преобразуем систему (I.36), умножив

на матрицу W^{-1} :

$$N \Delta_\varphi \Psi + \Psi = 0. \quad (\text{I.37})$$

Компоненты матрицы $N = W^{-1}D$ следующие:

$$n_{11} = (-1 + i\varepsilon \bar{b}_e \beta^2) / \det W, \quad n_{12} = i\varepsilon \bar{b}_e \beta (g + \bar{b}_e \beta) / \det W, \quad (\text{I.38})$$

$$n_{21} = i\varepsilon \bar{b}_\alpha \beta^2 / \det W, \quad n_{22} = i\varepsilon \bar{b}_\alpha \beta (g + \bar{b}_e \beta) / \det W, \quad (\text{I.39})$$

где $\det W = -\varepsilon \bar{b}_e \beta$. Приведем полученную систему (I.37) к диагональному виду

$$\Lambda \Delta_\varphi \Omega + \Omega = 0, \quad (\text{I.40})$$

где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Omega} = (\Psi_1 \ \Psi_2)^T$, используя матрицу преобразований P , которая составлена из правых собственных векторов матрицы D : $P^{-1}DP = \Lambda$, $P_{11} = 1$, $P_{12} = (\lambda_4 - n_{22})/n_{21}$, $P_{21} = n_{21}/(\lambda_3 - n_{22})$, $P_{22} = 1$. Вектор-столбец функций преобразуется следующим образом: $P^{-1}\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Omega}$. Диагональная матрица Λ имеет в качестве диагональных элементов λ_3 и λ_4 собственные значения матрицы D .

Таким образом, система уравнений (I.40) в цилиндрических координатах представлена в диагональной форме:

$$\Psi''_{1,2} + \frac{1}{r}\Psi'_{1,2} - \left(l_{3,4}^2 + \frac{1}{r^2} \right) \Psi_{1,2} = 0, \quad (\text{I.41})$$

где определено $l_{3,4}^2 = k^2 - \lambda_{3,4}^{-1}$. Штрих означает производную по радиусу.

Решения уравнений (I.41) выражаются через модифицированные функции Бесселя $K_1(l_i r)$, $I_1(l_i r)$ и с учетом условия ограниченности решения на бесконечности имеют следующий вид:

$$\Psi_1 = C_3 K_1(l_3 r), \quad \Psi_2 = C_4 K_1(l_4 r), \quad (\text{I.42})$$

здесь C_3, C_4 — постоянные интегрирования.

Решение (I.42) и решение системы (I.26)—(I.28) связаны соотношением $\mathbf{\Psi} = P\mathbf{\Omega}$, что позволяет выписать решения для потенциалов Ψ_u, Ψ_v , и магнитного поля B_ϕ :

$$\Psi_u = C_3 K_1(l_3 r) + C_4 P_{12} K_1(l_4 r), \quad (\text{I.43})$$

$$B_\phi = C_3 P_{21} K_1(l_3 r) + C_4 K_1(l_4 r), \quad (\text{I.44})$$

$$\Psi_v = C_3 \beta_3 K_0(l_3 r) + C_4 \beta_4 K_0(l_4 r), \quad (\text{I.45})$$

где $\beta_3 = (\bar{b}_\alpha - \bar{b}_e P_{21})\beta$, $\beta_4 = (\bar{b}_\alpha P_{12} - \bar{b}_e)\beta$.

Полученные решения (I.34), (I.43)—(I.45) позволяют получить выражения для скоростей и временных производных тензоров напряжений. С учетом рекуррентных соотношений между функциями Бесселя [Bateman, Erdélyi, 1953], получаем окончательный вид решения системы уравнений (I.15)—(I.18):

$$u_r = -C_1 l_1 K_1(l_1 r) - C_2 R_2 l_2 K_1(l_2 r) + ik C_3 K_1(l_3 r) + ik C_4 P_2 K_1(l_4 r), \quad (\text{I.46})$$

$$u_z = ik C_1 K_0(l_1 r) + ik C_2 R_2 K_0(l_2 r) + C_3 l_3 K_0(l_3 r) + C_4 P_2 l_4 K_0(l_4 r), \quad (\text{I.47})$$

$$v_r = -C_1 R_3 l_1 K_1(l_1 r) - C_2 l_2 K_1(l_2 r) + ik C_3 \beta_3 K_1(l_3 r) + ik C_4 \beta_4 K_1(l_4 r), \quad (\text{I.48})$$

$$v_z = ik C_1 R_3 K_0(l_1 r) + ik C_2 K_0(l_2 r) + C_3 \beta_3 l_3 K_0(l_3 r) - C_4 \beta_4 l_4 K_0(l_4 r), \quad (\text{I.49})$$

$$B_\phi = C_3 P_3 K_1(l_3 r) + C_4 K_1(l_4 r). \quad (\text{I.50})$$

Рассмотрим уравнение, определяющее эволюцию скважинной жидкости. Акустическое и электрическое поля в жидкости описывается уравнениями

$$\ddot{\mathbf{v}} - c_{p0}^2 \nabla \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{I.51})$$

$$\dot{\mathbf{B}} - \frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (\text{I.52})$$

$$\mathbf{E} = \frac{c_e}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (\text{I.53})$$

где c_{p0} — скорость звука в скважинной жидкости. Рассмотрим, как и раньше, распространение гармонических колебаний и запишем уравнения (I.51)—(I.53) в безразмерном виде:

$$\lambda_0 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} = 0, \quad (\text{I.54})$$

$$g \Delta \mathbf{B} + i \mathbf{B} = 0, \quad (\text{I.55})$$

$$\mathbf{E} = \frac{c_l}{c_e} g \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (\text{I.56})$$

Аналогично изложенному, введем потенциалы для скорости жидкости $\mathbf{v} = \nabla \varphi_f - \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_f$, которое в данной геометрии задачи имеет следующие компоненты: $v_r = \partial_r \varphi_f$, $v_z = \partial_z \varphi_f$. Тогда из уравнения (I.54) получаем

$$\lambda_0 \Delta \varphi_f + \varphi_f = 0. \quad (\text{I.57})$$

Решения уравнения (I.57) для скважинной жидкости и магнитного поля в скважине (I.55) выражаются через модифицированные функции Бесселя $I_\alpha(z)$:

$$\varphi_v = C_5 I_0(l_0 r), \quad l_0^2 = k^2 - \lambda_0^{-1}. \quad (\text{I.58})$$

$$B_\varphi = C_6 I_1(l_6 r), \quad l_6^2 = k^2 - i g^{-1}.$$

Выпишем окончательно решения уравнений (I.54), (I.55) для скважинной жидкости:

$$v_r = C_5 l_0 I_1(l_0 r), \quad (\text{I.59})$$

$$v_z = i k C_5 I_0(l_0 r), \quad (\text{I.60})$$

$$B_\varphi = C_6 I_1(l_6 r). \quad (\text{I.61})$$

Получим дисперсионное соотношение на волновой вектор k из условия удовлетворения решений (I.46)—(II.50), (I.59)—(I.61) условиям на границе скважины (индекс ⁽⁰⁾ относится к скважинной жидкости, индекс ⁽¹⁾ — к насыщенной пористой среде):

1) условию непрерывности Φ -й компоненты магнитного поля и z -компоненты электрического поля:

$$B_\varphi^{(1)} = B_\varphi^{(0)}, \quad (\text{I.62})$$

$$E_z^{(1)} = E_z^{(0)}, \quad (\text{I.63})$$

2) условию непрерывности нормального потока массы

$$(1 - \phi) u_r^{(1)} + \phi v_r^{(1)} = v_r^{(0)}, \quad (\text{I.64})$$

3) условию непрерывности компонент тензора напряжений Σ_{ik}

$$\Sigma_{rr}^{(1)} = \Sigma_{rr}^{(0)}, \quad (\text{I.65})$$

$$\Sigma_{rz}^{(1)} = 0, \quad (\text{I.66})$$

4) условию равенства компонент нормальной проекции парциальных тензоров напряжений насыщающей жидкости $\Sigma_{rr}^{(1)}$ и скважинной жидкости $\Sigma_{rr}^{(0)}$

$$\Sigma_{rr}^{(1)} = \phi \Sigma_{rr}^{(0)}. \quad (\text{I.67})$$

Последнее условие в терминах давления принимает вид $\frac{p^{(1)}}{\rho^{(1)}} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}$.

Как следствие, выполняется непрерывность временных производных компонент тензора напряжений:

$$\dot{\Sigma}_{rz}^{(1)} = 0, \quad \dot{\Sigma}_{rr}^{(1)} = \dot{\Sigma}_{rr}^{(0)}, \quad \dot{\Sigma}_{rr}^{(1)} = \phi \dot{\Sigma}_{rr}^{(0)}, \quad (\text{I.68})$$

которые определяются через скорости

$$-\dot{p}^{(1)} = \pi_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} + \pi_2 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(1)},$$

$$\dot{\Sigma}_{rr}^{(1)} = \pi_3 \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} + \pi_4 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(1)} + 2\partial_r u_r,$$

$$\dot{\Sigma}_{rz}^{(1)} = \partial_r u_z + \partial_z u_r,$$

$$\dot{\Sigma}_{rr}^{(0)} = -\dot{p}^{(0)} = \pi_0 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(0)},$$

где $\pi_1 = \frac{\rho_s}{\rho} \gamma - \frac{\rho_l}{\rho} K$, $\pi_2 = \frac{\rho_l}{\rho} \gamma + \frac{\rho_l}{\rho} K$, $\pi_3 = \frac{\rho_s}{\rho} \gamma - \frac{2}{3} \mu$, $\pi_4 = \frac{\rho_l}{\rho} \gamma$, $\pi_0 = \rho^{(0)} c_{\rho 0}^2$.

Подставляя выражения (I.46)—(II.50), (I.59)—(I.61) в граничные условия (I.62)—(I.67), представим граничные условия в форме $G\mathbf{h} = 0$, где определены вектор коэффициентов $\mathbf{h} = (C_1 \ C_2 \dots C_5 \ C_6)^T$ и матрица G , ненулевые компоненты которой имеют вид:

$$g_{11} = ((1-\phi) + R_{21}\phi) l_1 K_1(l_1 r_2), \quad g_{12} = ((1-\phi) R_{12} + \phi) l_2 K_1(l_2 r_2),$$

$$g_{13} = -ik((1-\phi) + \beta_3\phi) K_1(l_3 r_2), \quad g_{14} = -ik(\beta_4\phi - (1-\phi) P_{12}) K_1(l_3 r_2),$$

$$g_{15} = -l_0 I_1(l_0 r_2),$$

$$g_{21} = ((\pi_3 + \pi_4 R_{21})(l_1^2 - k^2) + 2l_1^2) K_0(l_1 r_2) + 2l_1 K_1(l_1 r_2)/r_2,$$

$$g_{22} = ((\pi_3 R_{12} + \pi_4)(l_2^2 - k^2) + 2R_{12} l_2^2) K_0(l_2 r_2) + 2R_{12} l_2 K_2(l_2 r_2)/r_2,$$

$$g_{23} = -2ik(l_3 K_0(l_3 r_2) + K_1(l_3 r_2)/r_2), \quad g_{24} = -2ikP_{12}(l_4 K_0(l_4 r_2) + K_1(l_4 r_2)/r_2),$$

$$g_{25} = -\pi_0(l_0^2 - k^2) I_0(l_0 r_2),$$

$$g_{31} = 2ik l_1 K_1(l_1 r_2), \quad g_{32} = 2ik R_{12} l_2 K_1(l_2 r_2),$$

$$g_{33} = (l_3^2 + k^2) K_1(l_3 r_2), \quad g_{34} = P_{12}(l_3^2 + k^2) K_1(l_3 r_2)$$

$$g_{41} = \left((\pi_1 + R_{21}\pi_2)(l_1^2 - k^2) - \bar{b}_\alpha \frac{\rho^{(1)}}{\rho_s^{(1)}} (1 - R_{21}) \right) K_0(l_1 r_2),$$

$$g_{42} = \left((R_{12}\pi_1 + \pi_2)(l_2^2 - k^2) - \bar{b}_\alpha \frac{\rho^{(1)}}{\rho_s^{(1)}} (R_{12} - 1) \right) K_0(l_2 r_2),$$

$$g_{45} = -\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \pi_0 (l_0^2 - k^2) I_0(l_0 r_2),$$

$$g_{51} = ik(1 - R_{21}) K_0(l_1 r_2), \quad g_{52} = ik(R_{12} - 1) K_0(l_2 r_2),$$

$$g_{53} = (1 + gP_{21} - \beta_3) l_3 K_0(l_3 r_2), \quad g_{54} = (P_{12} + g - \beta_4) l_4 K_0(l_4 r_2),$$

$$g_{56} = g l_6 I_0(l_6 r_2),$$

$$g_{63} = P_{21} K_1(l_3 r_2), \quad g_{64} = K_1(l_4 r_2), \quad g_{66} = -I_1(l_6 r_2).$$

Дисперсионное соотношение, связывающее волновой вектор k и частоту ω , находим из равенства определителя матрицы $G = 0$. Нахождение корней получаемого нелинейного уравнения проводится численно методом Мюллера. Среди корней дисперсионного соотношения выделяется колебательная мода, характеризующая волну Стоунли. Найденные решения (I.59)—(I.61) и соотношение (I.56) позволяют определить электроакустическое отношение в скважине.

ПРИЛОЖЕНИЕ II. РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СКВАЖИНЕ

Теория, описывающая радиальные колебания для измерения проницаемости в насыщенной пористой среде, строится на линеаризованном варианте континуальной теории фильтрации [Доровский, 1989, Доровский, Перепечко, 1992]. Радиальные колебания подробно рассмотрены в статье [Доровский и др., 2011], но без введения электрического поля. Поэтому в данной работе приведем основные уравнения и решения, особо отметив соотношения для вычисления электрического поля, которое генерируется радиальными колебаниями в скважинной системе за счет акустоэлектрического эффекта.

Акустическое поле $\mathbf{v} = (v_r, 0, 0)$ в скважинной жидкости ($r_1 < r < r_2$) (см. рис. 3) описывается уравнением

$$\ddot{\mathbf{v}} - c_{p0}^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Электрическое поле в жидкости при радиальных колебаниях отсутствует. Электрическое поле $\mathbf{E} = (E_r, 0, 0)$ в пористой среде ($r_2 < r < \infty$) определяется соотношением

$$\mathbf{E} = -\frac{\alpha \rho_l}{\sigma} (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (\text{II.2})$$

При этом скорости пористой матрицы $\mathbf{u} = (u_r, 0, 0)$ и насыщающей ее жидкости $\mathbf{v} = (v_r, 0, 0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\mathbf{u}} - c_l^2 \Delta \mathbf{u} - a_1 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a_2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\rho_l}{\rho_s} b (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) = 0, \quad (\text{II.3})$$

$$\ddot{\mathbf{v}} + a_3 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - a_4 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - b (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) = 0. \quad (\text{II.4})$$

Здесь все обозначения соответствуют обозначениям Приложения I, диссипативный коэффициент $b = \rho_l \chi = \eta / (k\rho)$.

Гармонический источник акустического сигнала, расположенный в центре скважины, определяет давление $p = P_0 e^{-i\omega t}$ при $r = r_1$. Акустический отклик исследуемой системы будет также гармоническим $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}) e^{-i\omega t}$.

Решения дифференциальных уравнений для невзаимодействующих составляющих скоростей определяется граничными условиями для взаимодействующих мод (индекс (0) характеризует скважинную жидкость, (1) — насыщенную пористую среду):

1) на поверхности источника, возбуждающего колебания в жидкости, ($r = r_1$) гармонический источник фиксирует давление (его спектральную компоненту в безразмерном виде)

$$p^{(0)} = \bar{P}_0, \quad (\text{II.5})$$

2) на границе скважины и насыщенной пористой среды ($r = r_2$) принимаются условия неразрывности потока массы, непрерывности тензора напряжений $(\Sigma_{rr}^{(1)}, \Sigma_{rr}^{(0)})$ и парциального давления

$$(1 - \phi) u_r^{(1)} + \phi v_r^{(1)} = v_r^{(0)}, \quad (\text{II.6})$$

$$\Sigma_{rr}^{(1)} = \Sigma_{rr}^{(0)}, \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{p^{(1)}}{\rho^{(1)}} - \kappa \frac{\rho^{(1)}}{\rho_s^{(1)}} \bar{b} (\varphi_u^{(1)} - \varphi_v^{(1)}) = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)}}. \quad (\text{II.8})$$

Решение системы уравнений (II.3), (II.4) с граничными условиями (II.5)—(II.8) удобно выразить через функции Ганкеля $H_\alpha^{(1)}(z)$, $H_\alpha^{(2)}(z)$ [Bateman, Erdélyi, 1953]:

$$p^{(1)} = -i B_1 (\pi_1 + \pi_2 R_3) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1})/\sqrt{\lambda_1} - i B_2 (\pi_1 R_2 + \pi_2) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2})/\sqrt{\lambda_2}, \quad (\text{II.9})$$

$$u_r^{(1)} = B_1 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) + B_2 R_2 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}), \quad (\text{II.10})$$

$$v_r^{(1)} = B_1 R_3 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) + B_2 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}). \quad (\text{II.11})$$

В качестве следствия получаем необходимое для нас выражение на разность скоростей твердой матрицы и насыщающей жидкости

$$u_r^{(1)} - v_r^{(1)} = B_1 (1 - R_3) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) + B_2 (R_2 - 1) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}),$$

определяющее электрическое поле в пористой среде

$$E_r^{(1)} = -\frac{C_e}{C_i} (u_r^{(1)} - v_r^{(1)}).$$

В скважине решение в безразмерной форме имеет вид:

$$p^{(0)} = -i B_0 \pi_0 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_0})/\sqrt{\lambda_0} - i C_0 \pi_0 H_1^{(2)}(r/\sqrt{\lambda_0})/\sqrt{\lambda_0},$$

$$v_r^{(0)} = B_0 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_0}) + C_0 H_1^{(2)}(r/\sqrt{\lambda_0}).$$

Постоянные интегрирования B_1 , B_2 , B_0 , C_0 определяются граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск, Изд-во ОИГГМ СО РАН, 1994, 187 с.

Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика, 1989 (7), с. 39—45.

Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ, 1992, т. 33, № 3, с. 403—409.

Доровский В.Н., Доровский С.В. Электромагнитоакустический метод измерения электропроводности и ζ -потенциала // Геология и геофизика, 2009, т. 50 (6), с. 735—744.

Доровский В.Н., Роменский Е.И., Федоров А.Ю., Перепечко Ю.В. Резонансный метод измерения проницаемости горных пород // Геология и геофизика, 2011, т. 52 (7), с. 950—957.

Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. New York, McGraw-Hill, 1953, v. 2, 396 p.

Dorovsky V.N., Dubinsky V., Nefedkin Yu.A., Fedorov A.I., Podberezheny M.Yu., Perepechko Yu.V., Dubinsky Z. Method and apparatus for estimating formation permeability and electroacoustic constant of an electrolyte-saturated multi-layered rock taking into account osmosis. Patent Baker Hughes Inc. Pub. 2010, № US 2010/0254218 A1.

Dorovsky V.N., Fedorov A.I., Perepechko Yu.V. Radial waves in a borehole and Stoneley waves for measuring formation permeability and electroacoustic constant, United States, Patent Application Publication (Baker Hughes), 2012, № US 2012/0095688 A1, Apr.19.2012.

Singer J., Saunders J., Holloway L., Stoll J.B., Pain C., Stuart-Bruges W., Mason G. Electrokinetic logging has the potential to measure permeability // SPWLA 46th Annual Logging Symposium, New Orleans, USA, June 26—29, 2005.

Singer J., Saunders J.H., Pain C. Method and apparatus for determining the permeability of earth formations. Patent Sondex Wireline Limited. Int. Pub, 2006, № WO 2006/067441 A1.

Wu X., Yin H. Method for determining reservoir permeability from borehole Stoneley-wave attenuation using Biot's poroelastic theory. Patent Exxon Mobil Upstream Research Co., Pub, 2007, № WO2007/001746.

Pride S. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B, 1994, v. 50, № 21, p. 15678—15696.