

**ДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА
В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ**

И. В. Высоцкая, А. Л. Генкин, М. И. Жуковский

(Ленинград)

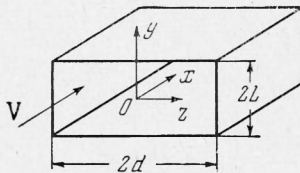
В работах [1, 2] приводится решение задачи о двумерном течении невязкого не-теплопроводного газа с постоянной проводимостью в канале постоянного сечения при частных видах задания приложенного магнитного поля.

В данной работе методом малого параметра получено решение задачи о двумерном течении газа с переменной проводимостью в скрещенных электрическом и произвольном магнитном полях. В качестве параметров выбрано магнитное число Рейнольдса R_m и параметр магнитогидродинамического взаимодействия S . В работе используется система единиц СИ.

Обозначения

V — скорость потока;	j — плотность электрического тока;
p — давление в потоке;	E — напряженность электрического поля;
ρ — плотность газа;	σ — электропроводность газа;
T — температура газа;	κ — отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме;
L — половина высоты канала;	μ — магнитная проницаемость.
B — вектор магнитной индукции;	
B_0 — приложенное магнитное поле;	

1. Рассмотрим двумерное течение в плоскости xy (фигура 1) невязкого¹ нетеплопроводного газа с переменной проводимостью в канале постоянного сечения в присутствии постоянного электрического и произвольного (приложенного в плоскости xy) магнитного поля. Кроме того, пренебрегаем составляющей B_z индуцированного магнитного поля. В этом случае



Фиг. 1

$$V(u, v, 0), \quad B(B_x, B_y, 0), \quad E(0, 0, -E_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

Здесь $E_0 = \text{const}$ для канала со сплошными электродами.

Введем безразмерные величины

$$u^\circ = \frac{u}{u_0}, \quad v^\circ = \frac{v}{u_0}, \quad p^\circ = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad \rho^\circ = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad x^\circ = \frac{x}{L}, \quad y^\circ = \frac{y}{L},$$

$$E^\circ = \frac{E_0}{u_0 B_0}, \quad B_x^\circ = \frac{B_x}{B_0}, \quad B_y^\circ = \frac{B_y}{B_0}, \quad j^\circ = \frac{j}{\sigma_0 u_0 B_0}, \quad \sigma^\circ = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad T^\circ = \frac{T}{T_0} \quad (1.2)$$

В дальнейшем употребляются только безразмерные величины и верхний индекс ^o для простоты записи опускается.

¹ Предполагается, что размер d достаточно велик.

Система уравнений, описывающая исследуемое течение, в этих переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} - j B_y S & \left(S = \frac{\sigma_0 L B_{00}^2}{\rho_0 u_0} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + j B_x S, & \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\kappa - 1} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) &= \frac{j^2 S}{\sigma} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= R_m j & (R_m = \mu \sigma_0 u_0 L) \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, & j = \sigma (-E_0 + u B_y + v B_x), \quad \sigma = \sigma(p, T) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия для газодинамической части задачи имеют вид

$$u = 1, \quad \rho = 1, \quad v = 0, \quad p = p_0 \quad \text{при } x = 0; \quad v = 0 \quad \text{при } y = \pm 1 \quad (1.4)$$

Рассмотрим случай, когда S и R_m — малые величины. Решение системы (1.3) будем искать в виде рядов¹

$$z = z_{00} + S z_1 + R_m z_2 + S^2 z_3 + S R_m z_4 + R_m^2 z_5 + \dots \quad (1.5)$$

где под z понимаются u, v, ρ, p, B_x, B_y , причем в силу (1.4)

$$u_{00} = 1, \rho_{00} = 1, v_{00} = 0, p_{00} = p_0, B_{x00} = B_{x0}, B_{y00} = B_{y0}.$$

Подставив выражения (1.5) в систему (1.3) и приравнявая члены при одинаковых степенях S и R_m соответственно, получим системы уравнений относительно функций $u_1, v_1, p_1, \rho_1, u_2, v_2, p_2, \rho_2, B_{x1}, B_{y1}, B_{x2}, B_{y2}$. Так, при первой степени S получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= - \frac{\partial p_1}{\partial x} - \sigma (B_{y0} - E_0) B_{y0}, & \frac{\partial v_1}{\partial x} &= - \frac{\partial p_1}{\partial y} + \sigma (B_{y0} - E_0) B_{x0} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 0, & \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - \kappa \rho_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right) &= \sigma (B_{y0} - E_0)^2 \\ \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial B_{y1}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Аналогично при первой степени R_m имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial x}, & \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial p_2}{\partial x} - \kappa \rho_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_{y2}}{\partial x} - \frac{\partial B_{x2}}{\partial y} &= \sigma (B_{y0} - E_0), & \frac{\partial B_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial B_{y2}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Как видно из уравнений, функции u_1, v_1, p_1, ρ_1 зависят от приложенных магнитного и электрического полей B_{x0}, B_{y0}, E_0 . Что касается функций u_2, v_2, p_2, ρ_2 , то они вообще не зависят от B и E_0 . Исследуя систему (1.3), можно показать, что уравнения в системе для определения гидродинамических функций и составляющих вектора магнитной индукции разделяются в любом приближении.

Граничные условия для системы (1.6) получим из (1.4)

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad \rho_1 = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad v_1 = 0 \quad \text{при } y = \pm 1 \quad (1.10)$$

При этом v_1 — ограниченная величина при $x \rightarrow \infty$.

¹ Разложение по этим параметрам для задачи о свободной струе сжимаемой проводящей жидкости используется также в работе [3].

2. Для решения дифференцируем первое уравнение (1.6) по y , второе — по x и вычтем из первого результата второй. Получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial y} [\sigma B_{y_0} (B_{y_0} - E_0)] - \frac{\partial}{\partial x} [\sigma B_{x_0} (B_{y_0} - E_0)] \quad (2.1)$$

При помощи первых трех уравнений (1.6) исключим из четвертого производные $\partial p_1 / \partial x$ и $\partial \rho_1 / \partial x$; получим уравнение

$$- \frac{1}{\kappa - 1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma B_{y_0} (B_{y_0} - E_0) \right] + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \frac{\rho_0 \kappa}{\kappa - 1} = \sigma (B_{y_0} - E_0)^2 \quad (2.2)$$

Продифференцируем (2.2) по y и вычтем результат из (2.1); получим

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (2.3)$$

$$M_0^2 = \frac{1}{\kappa \rho_0}, \quad q(x, y) = (1 - M_0^2) \frac{\partial}{\partial x} [\sigma B_{x_0} (B_{y_0} - E_0)] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \{ \sigma (B_{y_0} - E_0) [B_{y_0} - (\kappa - 1) M_0^2 (B_{y_0} - E_0)] \}$$

Рассмотрим случай дозвукового течения. Применяя метод Г. А. Гринберга [4], для уравнений (2.3) с граничными условиями (1.10) найдем

$$v_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin \frac{k\pi\eta}{2} \left\{ \int_0^{\infty} q_k(z) \exp \left[- \frac{k\pi}{2} (z + \xi) \right] dz - \right. \\ \left. - \int_0^{\xi} q_k(z) \exp \left[- \frac{k\pi}{2} (\xi - z) \right] dz - \int_{\xi}^{\infty} q_k(z) \exp \left[- \frac{k\pi}{2} (z - \xi) \right] dz \right\} \quad (2.4)$$

$$q_k = \int_0^z q \sin \frac{k\pi\eta}{2} d\eta, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{1 - M_0^2}}, \quad \eta = y + 1$$

Из уравнений (2.2), первого и третьего уравнений (1.6) при граничных условиях (1.10) получим

$$u_1 = \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} \int_0^{\infty} \sigma (B_{y_0} - E_0) [(\kappa - 1) (B_{y_0} - E_0) + B_{y_0}] dx - \frac{1}{1 - M_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial v_1}{\partial y} dx \\ p_1 = - \int_0^{\infty} \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \int_0^{\infty} \sigma B_{y_0} (B_{y_0} - E_0) dx, \quad \rho_1 = - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx$$

Перейдем к определению функций u_2, v_2, ρ_2, p_2 . Решение уравнений (1.8) строится аналогично, и для функции v_2 получаем уравнение

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

Граничные условия для системы (1.8), согласно (1.4), имеют вид

$$v_2 = 0, \quad u_2 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \rho_2 = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad v_2 = 0 \quad \text{при } y = \pm 1 \quad (2.7)$$

причем v_2 — ограниченная величина при $x \rightarrow \infty$.

Система (1.8) с граничными условиями (2.7) имеет нулевое решение

$$v_2 = 0, \quad u_2 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \rho_2 = 0 \quad (2.8)$$

Если исследовать систему (1.3), не ограничиваясь первыми степенями S и R_m в разложениях (1.5), то нетрудно показать, что все члены u_n, v_n, p_n, ρ_n , стоящие при различных степенях параметра R_m , равны нулю.

Тогда разложения (1.5) можно представить так

$$z = z_{00} + S(z_1 + R_m z_4 + R_m^2 z_8 + \dots) + S^2(z_3 + R_m z_7 + R_m^2 z_{11} + \dots) + \dots$$

($z = u, v, \rho, p$)

Для задач, в которых нельзя пренебречь зависимостью электропроводности газа от давления и температуры, может быть использован следующий метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения выбираем $\sigma = 1$ и определяем $p^{(0)}$, $\rho^{(0)}$ и $T^{(0)}$; значение $\sigma(x, y)$ находим по последней формуле (1.3) и подставляем его в правые части формул (2.4), (2.5). Аналогично вычисляются следующие приближения.

Для определения функций B_{x1} , B_{y1} , B_{x2} , B_{y2} имеем уравнения (1.7) и (1.9). Из условия нормальности силовых линий индуцированного магнитного поля к поверхности полюсов, параллельных стенкам канала, получим граничные условия

$$B_{x1} = 0, \quad B_{x2} = 0 \quad \text{при } y = \pm 1 \quad (2.9)$$

Для канала большой длины можно пренебречь концевым эффектом на входе. В результате будем иметь ¹

$$B_{x1} = B_{x2} = B_{y1} = B_{y2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.10)$$

Система (1.7) при условиях (2.9), (2.10) имеет нулевое решение

$$B_{x1} = 0, \quad B_{y1} = 0 \quad (2.11)$$

Система (1.9) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 B_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{xz}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} [\sigma (E_0 - B_{y0})] \quad (2.12)$$

Используя (2.9), (2.10), получим аналогично предыдущему

$$B_{x2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin \frac{k\pi\eta}{2} \left\{ \int_0^{\infty} f_k(z) \exp \left[-\frac{k\pi}{2}(z+x) \right] dz - \int_0^x f_k(z) \exp \left[-\frac{k\pi}{2}(x-z) \right] dz - \int_x^{\infty} f_k(z) \exp \left[-\frac{k\pi}{2}(z-x) \right] dz \right. \quad (\eta = y+1)$$

$$B_{y2} = \int_0^x \frac{\partial B_{xz}}{\partial y} dx + \int_0^x \sigma (B_{y0} - E_0) dx, \quad f_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} [\sigma (E_0 - B_{y0})] \sin \frac{k\pi\eta}{2} d\eta$$

Нетрудно показать, что все члены B_{xn} , B_{yn} , стоящие коэффициентами при различных степенях параметра S , равны нулю. Тогда разложения (1.5) можно представить следующим образом:

$$z = z_{00} + R_m(z_2 + S z_4 + S^2 z_7 + \dots) + R_m^2(z_5 + S z_8 + S^2 z_{12} + \dots) + \dots$$

($z = B_x, B_y$)

Решение систем уравнений, соответствующих более высоким степеням S и R_m , строится аналогично решению систем (1.6) — (1.9).

3. Аналогично можно решить задачу в плоскости xz . Для этого случая примем $v = 0$, $B_x = B_z = 0$, $\partial/\partial y = 0$, $\mathbf{E}(0, 0, -E_0)$. Здесь $E_0 = \text{const}$ для сплошных электродов. Будем считать, что размер L достаточно велик. В отличие от предыдущей задачи в качестве характерного линейного размера выбираем d — половину ширины канала.

¹ При более строгой формулировке граничного условия для B_{x1} , B_{y1} , B_{x2} , B_{y2} при $x = 0$ необходимо воспользоваться формулой Био — Савара.

Система уравнений, описывающая течение в безразмерной форме при пренебрежении индуцированным магнитным полем, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma B_y (E_0 - u B_y) S \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} - \sigma w B_y^2 S, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (3.1) \\ \frac{1}{\kappa - 1} \left[u \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\kappa p}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right] &= \sigma [w^2 B_y^2 + (u B_y - E_0)^2] S. \end{aligned}$$

$$u = 1, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad p = p_0 \quad \text{при } x = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } y = \pm 1 \quad (3.2)$$

Решение системы (3.1) будем искать в виде

$$z = z_{00} + S z_{10} + S^2 z_{20} + \dots \quad (z = u, w, \rho p) \quad (3.3)$$

Заметим, что $u_{00} = 1, w_{00} = 0, \rho_{00} = 1, p_{00} = p_0$ в силу (3.2).

Подставим (3.3) в уравнение (3.1). Приравнявая нулю члены при одинаковых степенях S , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \sigma B_y (E_0 - B_y), \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = - \frac{\partial p_1}{\partial z} \quad (3.4) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - \kappa p_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = \sigma (B_y - E_0)^2 \end{aligned}$$

Решение системы (3.4) получается аналогично решению системы (1.6).

Отметим в заключение, что, поскольку исследуется течение газа в канале постоянного сечения без учета вязкости, двумерное течение может возникнуть только в том случае, если приложено двумерное магнитное поле. Так, если для первой из рассматриваемых задач положить

$$\sigma = \text{const}, \quad B_{x0} = 0, \quad B_{y0} = f(x) \quad (3.5)$$

то формулы (2.4), (2.5) дают решение одномерной задачи. При этом в частном случае, когда $f(x) = B_0 = \text{const}$, из (2.4), (2.5) получаем

$$v_1 = 0, \quad u_1 = Ax, \quad \rho_1 = -Ax, \quad p_1 = (c - A)x \quad (3.6)$$

$$\left(A = \frac{B_0 - E_0}{\rho_0 \kappa - 1} [\kappa (B_0 - E_0) + E_0], \quad c = B_0 (E - B_0) \right)$$

Соотношения (3.6), в отличие от известных решений одномерной задачи для канала постоянного сечения [5-7], имеют весьма простой вид.

Выполненные по формулам (3.6) расчеты показали, что отклонение от точного решения [5] не превышает 3%. Для дальнейшего уточнения этого результата необходимо использовать решение систем, соответствующих более высоким степеням параметров S и R_m в разложениях (1.5).

Поступила 21 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Б е р е з и н О. А. Движение проводящего газа в магнитогазодинамическом генераторе, Вестн. Ленингр. ун-та, 1961, № 13, вып. 3.
2. S a k u r a i T., N a i t o M. Steady Two-Dimensional Channel Flow of an Incompressible Perfect Fluid with Small Electric Conductivity in the Presence of Nonuniform Magnetic Fields. Phys. Soc. Japan, 1962, vol. 17, No. 4.
3. H a s i m o t o H., Swirl of a Conducting Gas due to the Hall Effect. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, No. 8.
4. Г р и н б е р г Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
5. N o w a c k i P. J. The theory of the magnetohydrodynamic generator with constant area. Nucleonika, 1962, vol. 7, No. 4.
6. N e u r i n g e r J. L. Optimum power generation from a moving plasma. Fluid Mech., 1960, vol. 7.
7. Л у р ь е К. А. Решение уравнений одномерного движения сжимаемого газа конечной проводимости в поперечном электрическом и магнитном полях (стационарный случай). Ж. техн. физ., 1961, т. 31, № 5.