

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИНУСНО-КОСИНУСНОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ
И ИНТЕРПОЛЯЦИИ СИГНАЛА***

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, Ю. В. Бондаренко

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: reznik@iae.nsk.su
bjuv@iae.nsk.su*

Исследованы особенности синусно-косинусных преобразований на интервале $-0,5T \leq t \leq 0,5T$, эквивалентных косинусному преобразованию на интервале $0 \leq t \leq T$. Получены соотношения для дисперсии ошибки реконструкции сигнала, позволяющие в зависимости от априорных сведений об анализируемом сигнале выбрать для его представления наиболее подходящее ортогональное разложение. Для сравнения последнего с традиционным синусно-косинусным преобразованием использована модель стационарного случайного сигнала.

Введение. При аппроксимации, интерполяции и экстраполяции цифровых сигналов различной физической природы удачный выбор ортогонального разложения, наиболее соответствующего характеру рассматриваемой проблемы, зачастую является определяющим моментом, влияет на точность решения конкретной прикладной задачи [1–3]. Несмотря на огромное число используемых на практике функциональных базисов, до последнего времени самым распространенным представлением сигнала остается классическое тригонометрическое разложение. В предлагаемой работе речь пойдет о некоторых особенностях применения рядов Фурье, а также будут даны рекомендации, соблюдение которых может уменьшить дисперсию ошибки представления сигнала.

Предварительный анализ и уточнение задачи. Ошибка представления сигнала $f(t)$ рядом Фурье

$$f^*(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) + \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00653), Президиума Российской академии наук (программа № 14.1/2006 г.) и Президиума Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 3.9/2006 г.).

состоит из суммы ошибок представления его четной $f^+(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$ и нечетной $f^-(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$ составляющих.

Коэффициенты a_k при определенных условиях убывают со скоростью $\sim 1/k^2$, а коэффициенты b_k при ненулевых значениях нечетной составляющей $f^-(t)$ на краях интервала разложения – со скоростью $\sim 1/k$ [4].

Довести скорость убывания коэффициентов b_k до скорости убывания коэффициентов a_k возможно, если вторую составляющую базиса $\left(\cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right)\right)$ заменить функцией $\sin\left(\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)$, т. е. перейти к новому базису $\left(\cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)\right)$. Функции нового базиса ортогональны на интервале $-0,5T \leq t \leq 0,5T$, что легко подтверждается прямой проверкой.

При использовании этого базиса* разложение (1) заменяется разложением

$$f^*(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) + \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right), \quad (2)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} f(t) \cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} f(t) \sin\left(\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right) dt.$$

Рассмотрим скорость убывания коэффициентов b_k на примере разложения сигнала $f(t) = t$. При использовании формулы (1) (интегрируем по частям) величина

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} dt \left(t \sin\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) \right) \approx (-1)^{k+1} T/\pi k,$$

в то время как разложение (2) дает коэффициент

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} dt \left(t \sin\left(\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right) \right) \approx (-1)^{k+1} 4T/(\pi(2k-1))^2.$$

* Отметим, что при переходе от интервала $-0,5T \leq t \leq 0,5T$ к интервалу $0 \leq t \leq T$, т. е. при замене t переменной $t - 0,5T$, соотношение (2) превращается в косинусное преобразова-

ние $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{2N} a_k \cos\left(\frac{\pi}{T} kt\right)$.

Из этих вычислений следует, что в данном конкретном случае использование ряда (2) приводит к увеличению скорости убывания коэффициентов b_k . Далее исследуются различные варианты восстановления сигнала и выясняются условия, при которых более предпочтительно разложение (1) или разложение (2). В проводимом анализе используется как аналоговое, так и дискретное представление сигнала.

Весовые и отсчетные функции. Ряд (1) может быть представлен в виде интеграла свертки [4]

$$f(t) = \int_{-0,5T}^{0,5T} f(\tau)w(\tau - t)d\tau, \quad (3)$$

где весовая функция (ядро Дирихле)

$$w(\tau - t) = \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\pi}{T}(\tau - t)\right)}{T \sin\left(\frac{\pi}{T}(\tau - t)\right)}. \quad (4)$$

При использовании разложения (2) весовая функция

$$w(\tau - t) = \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\pi}{T}(\tau - t)\right)}{2T \sin\left(\frac{\pi}{T}(\tau - t)\right)} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{T}(\tau - t)\right)\right) + \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\pi}{T}(\tau + t)\right)}{2T \sin\left(\frac{\pi}{T}(\tau + t)\right)} \times \\ \times \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{T}(\tau + t)\right)\right) - \frac{1}{T} \sin\left((2N+1)\frac{\pi}{T}\tau\right) \cdot \sin\left((2N+1)\frac{\pi}{T}t\right). \quad (5)$$

Реконструкция сигнала по совокупности равноотстоящих отсчетов (интервал дискретизации Δ) дает отличающиеся интерполяционные формулы с использованием базиса $\left(\cos\left(\frac{\pi}{T}2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{T}(2k-1)t\right)\right)$ для нечетного $(2N+1)$ и четного $(2N)$ числа отсчетов. В первом случае, когда $T = (2N+1)\Delta$, формула (2) принимает вид

$$f^*(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}2kt\right) + \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}(2k-1)t\right), \quad (6)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f(n\Delta), \quad a_k = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f(n\Delta) \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}2kn\right), \quad (7)$$

$$b_k = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f(n\Delta) \sin\left(\frac{\pi}{2N+1}(2k-1)n\right).$$

В случае нечетного числа отсчетов их общее количество $(2N+1)$ совпадает с числом констант: a_0 , N констант a_k и N констант b_k .

Аналогом соотношения (6) является теорема отсчетов

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N \frac{f(n\Delta)}{2} \left[\theta(t-n\Delta) \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} (t-n\Delta) \right) \right) + \theta(t+n\Delta) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} (t+n\Delta) \right) \right) \right], \quad (8)$$

где

$$\theta(t-n\Delta) = \sin \left(\frac{\pi}{\Delta} (t-n\Delta) \right) / \left((2N+1) \sin \left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} (t-n\Delta) \right) \right).$$

При четном числе отсчетов ($T=2N\Delta$) формула (2) превращается в соотношение

$$f^*(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos \left(\frac{\pi}{2N\Delta} 2kt \right) + \sum_{k=1}^N b_k \sin \left(\frac{\pi}{2N\Delta} (2k-1)t \right). \quad (9)$$

Соотношения для констант*:

$$a_0 = \sum_{n=-(N-1)}^N f \left(\frac{2n-1}{2} \Delta \right), \quad a_k = \sum_{n=-(N-1)}^N f \left(\frac{2n-1}{2} \Delta \right) \cos \left(\frac{\pi}{2N} 2k \frac{2n-1}{2} \right), \quad (10)$$

$$b_k = \sum_{n=-(N-1)}^N f \left(\frac{2n-1}{2} \Delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{2N} (2k-1) \frac{2n-1}{2} \right).$$

Теорема отсчетов для этого случая:

$$f(t) = \sum_{n=-(N-1)}^N \frac{f \left(\frac{2n-1}{2} \Delta \right)}{2} \left[\theta \left(t - \frac{2n-1}{2} \Delta \right) \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2N\Delta} \left(t - \frac{2n-1}{2} \Delta \right) \right) \right) - \theta \left(t + \frac{2n-1}{2} \Delta \right) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2N\Delta} \left(t + \frac{2n-1}{2} \Delta \right) \right) \right) \right]. \quad (11)$$

Соотношение (8) вытекает из формулы (6) после подстановки в нее формул (7) для коэффициентов и последующего суммирования по индексу k , а соотношение (11) – соответственно из (9) и (10) и проведения аналогичной операции суммирования. Соотношение (8) вытекает также из формулы (5), если ее умножить на интервал дискретизации Δ , заменить период T величиной $(2N+1)\Delta$ и положить переменную τ равной $n\Delta$.

Интегральная по времени дисперсия ошибки. Рассмотрим дисперсию ошибки реконструкции рядами (1), (2), (6) и (9) сигнала, в качестве кото-

* Отметим, что коэффициент $a_N = 0$, и поэтому число констант совпадает с числом отсчетов.

рого используем стационарный случайный процесс со спектром мощности $S_f(\omega)$. В этом случае интегральная дисперсия ошибки

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \varepsilon^2(\omega), \quad (12)$$

где величина дисперсии $\varepsilon^2(\omega)$ при аппроксимации формулой (2) записывается в виде

$$\varepsilon^2(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} dt \left| e^{-\omega t} - a_0 - \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) - \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi}{T} (2k-1)t\right) \right|^2. \quad (13)$$

Применение базиса (1) с синусом полного угла во второй сумме соотношения (13) требует замены аргумента синуса величиной $\frac{\pi}{T} 2kt$.

Вычисление соотношения (13) дает следующий результат:

$$\varepsilon^2(\omega) = 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(\frac{\sin\left(\frac{T}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{T} k\right)\right)}{\frac{T}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{T} k\right)} + (-1)^k \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{T} k\right)\right)}{\frac{T}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{T} k\right)} \right)^2. \quad (14)$$

При использовании для аппроксимации сигнала стандартного базиса (1) величина дисперсии ошибки составляет

$$\varepsilon^2(\omega) = 1 - \sum_{k=-N}^{2N} \left(\frac{\sin\left(\frac{T}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right)\right)}{\frac{T}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right)} \right)^2. \quad (15)$$

Дисперсии (14) и (15) для периода сигнала $T = (2N+1)\Delta$ при $N = 4$ показаны на рис. 1, *a*. Видно более «спокойное» поведение соотношения (14). В табл. 1 приведены отношения дисперсий ошибок (12) при равномерном спектре мощности $S_f(\omega)$ в пределах $-\alpha \frac{\pi(2N+1)}{T} \leq \omega \leq \alpha \frac{\pi(2N+1)}{T}$. Из данных таблицы следует, что при значении параметра $\alpha = 1$ базис (2) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{T} (2k-1)t\right) \right)$ незначительно уступает базису (1) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{T} 2kt\right) \right)$. Однако при уменьшении значения параметра α до величины $2N/(2N+1)$ дисперсия ошибки аппроксимации базисом (2) примерно в 1,6–1,3 раза меньше, чем при использовании базиса (1), и убывает с ростом параметра N . Разность формул (15) и (14) показана на рис. 1, *b*. Эта зависимость подтверждает изложенное выше.

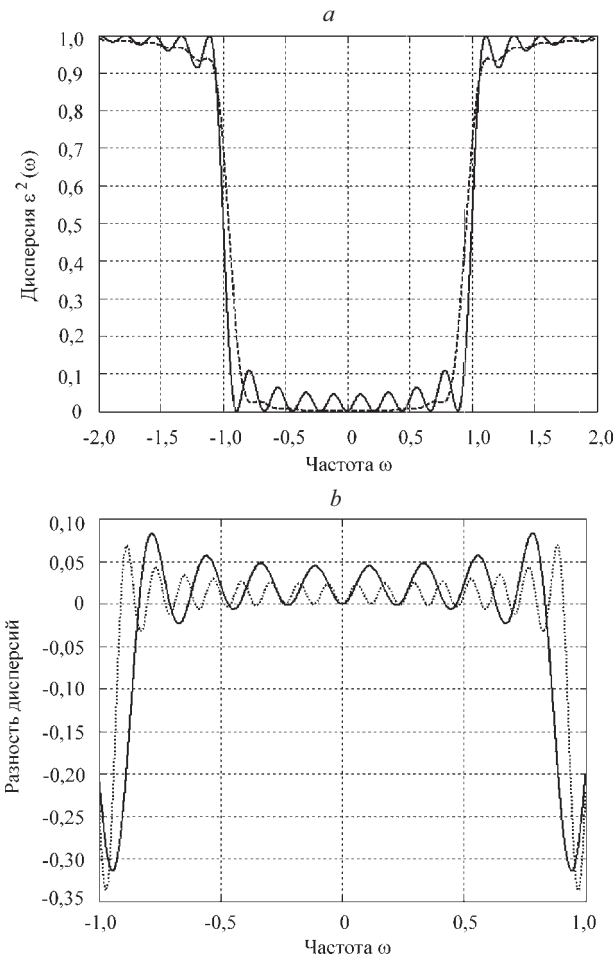


Рис. 1. Ошибки восстановления сигнала: *a* – дисперсии ошибки (14) (пунктирная кривая) и (15) (сплошная кривая); *b* – разность дисперсий (15) и (14) для $N = 4$ (сплошная кривая) и $N = 8$ (пунктирная кривая)

Несмотря на различия между формулами (14) и (15) для конечного числа гармоник N , их предельные значения при $|\omega| \rightarrow \infty$ совпадают и равны 1. Если величина периода $T = (2N + 1)\Delta$ фиксирована, а число гармоник N неограниченно возрастает, то дисперсия ошибки, определяемая соотношениями (14) и

Т а б л и ц а 1

α	N				
	16	32	64	128	256
1	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83
$2N/(2N + 1)$	1,63	1,51	1,45	1,38	1,34
$2(N - 1)/(2N + 1)$	2,78	2,27	1,96	1,78	1,64

(15), стремится к 0 в полосе частот $|\omega| < \infty$. При фиксированной величине Δ и том же поведении числа гармоник интегральная по частоте дисперсия ошибки становится равной энергии сигнала в полосе частот $|\omega| \gg \pi/\Delta$, а внутри полосы частот $|\omega| \leq \pi/\Delta$ – равной 0, так как весовые функции (4) и (5) становятся весовой функцией фильтра нижних частот.

Интерполяция сигнала соотношением (6) по совокупности $2N + 1$ отсчетов дает дисперсию ошибки представления сигнала

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega) = & 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(\varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) + (-1)^k \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta + \frac{\pi}{2N+1} k \right) \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(\varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) + (-1)^k \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta + \frac{\pi}{2N+1} k \right) \right) \times \\ & \times \left(\varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) + (-1)^k \varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta + \frac{\pi}{2N+1} k \right) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) &= \frac{\sin \left(\frac{2N+1}{2} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) \right)}{(2N+1) \sin \left(\frac{1}{2} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) \right)}, \\ \varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) &= \frac{\sin \left(\frac{2N+1}{2} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right) \right)}{\frac{2N+1}{2} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N+1} k \right)}. \end{aligned}$$

При использовании для восстановления сигнала дискретного варианта формулы (1) дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega) = & 1 + \sum_{k=-N}^N \varphi_{\Sigma}^2 \left(\omega\Delta - \frac{2\pi}{2N+1} k \right) - \\ & - 2 \sum_{k=-N}^N \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{2\pi}{2N+1} k \right) \varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta - \frac{2\pi}{2N+1} k \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Дисперсии ошибки (16) и (17) для $N = 4$ изображены на рис. 2, а. Поведение формул (16) и (17) аналогично поведению формул (14) и (15), за исключением эффекта, обусловленного дискретизацией сигнала. Табл. 2 содержит данные о величине отношения интегральных по частоте дисперсий ошибок (12) для равномерного спектра мощности на частотах $-\alpha \frac{\pi}{\Delta} \leq \omega \leq \alpha \frac{\pi}{\Delta}$. При $\alpha = 1$ использование для интерполяции соотношения (6) уступает примене-

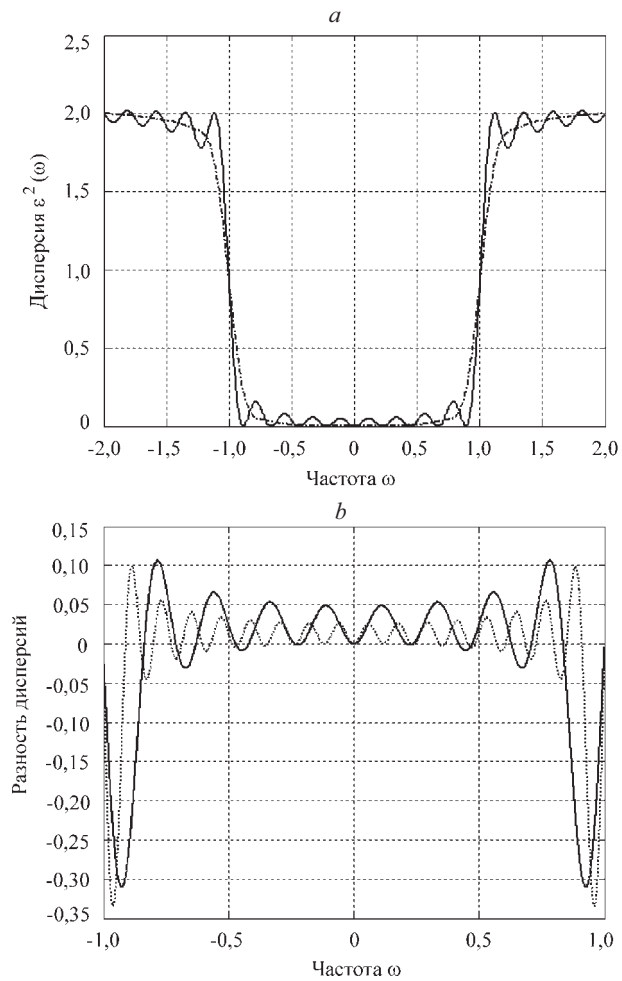


Рис. 2. Ошибки восстановления сигнала: a – дисперсии ошибки (16) (пунктирная кривая) и (17) (сплошная кривая); b – разность дисперсий (17) и (16) для $N = 4$ (сплошная кривая) и $N = 8$ (пунктирная кривая)

нию дискретного варианта формулы (1). Если параметр $\alpha = \frac{2N}{2N + 1}$, то ситуация меняется: более целесообразным оказывается использование базиса

Т а б л и ц а 2

α	N				
	16	32	64	128	256
1	0,92	0,93	0,94	0,94	0,94
$\frac{2N}{2N + 1}$	1,45	1,35	1,30	1,25	1,22
$\frac{2(N - 1)}{2N + 1}$	2,04	1,72	1,54	1,43	1,35

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} 2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} (2k-1)t\right) \right).$$

Разность соотношений (17) и (16) показана на рис. 2, *b*. Относительно предельных значений дисперсии ошибки, определяемой формулами (16) и (17), замечания сводятся к следующему. При $N \rightarrow \infty$ и фиксированном шаге дискретизации по времени Δ величины (16) и (17) одинаковы и равны 2, а интегральная по частоте дисперсия ошибки равна удвоенной энергии сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$, так как формулы (8) и (11) становятся рядом Котельникова.

При интерполяции по четному числу отсчетов $2N$ с использованием ряда (6) интегральная дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega) = & 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(\varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N} k \right) + (-1)^k \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta + \frac{\pi}{2N} k \right) \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(\varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N} k \right) + (-1)^k \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta + \frac{\pi}{2N} k \right) \right) \times \\ & \times \left(\varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{2N} k \right) + (-1)^k \varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta + \frac{\pi}{2N} k \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношение (18) отличается от формулы (16) только длиной периода.

Дискретный аналог разложения (1) при четном числе отсчетов содержит особенность

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(\frac{\pi}{2N\Delta} 2kt\right) + \sum_{k=1}^{N^{**}} b_k \sin\left(\frac{\pi}{2N\Delta} 2kt\right). \quad (19)$$

В формуле (19) коэффициент a_N , как уже отмечалось выше, равен 0 при любом числе N , отличном от 0. Значок «**» у второй суммы (19) означает, что коэффициент b_N сопровождается множителем $1/2$. С учетом этих замечаний после вычисления интегральной дисперсии ошибки приходим к следующему результату:

$$\varepsilon^2(\omega) = 1 + \sum_{k=-(N-2)}^{N-1} \varphi_{\Sigma}^2 \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{N} k \right) - 2 \sum_{k=-(N-2)}^{N-1} \varphi_{\Sigma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{N} k \right) \varphi_{\Gamma} \left(\omega\Delta - \frac{\pi}{N} k \right) + \delta, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{1}{2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \pi) - \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \pi))^2 - \\ & - \frac{1}{2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \pi) - \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \pi)) (\varphi_{\Gamma}(\omega\Delta - \pi) - \varphi_{\Gamma}(\omega\Delta + \pi)). \end{aligned}$$

Вид функций (18) и (20) при параметре $N = 4$ приведен на рис. 3, *a*. Как и на рис. 1, 2, кривая ошибки (18) имеет более плавный характер. В табл. 3 даны сравнительные данные величины (12) для равномерного спектра мощ-

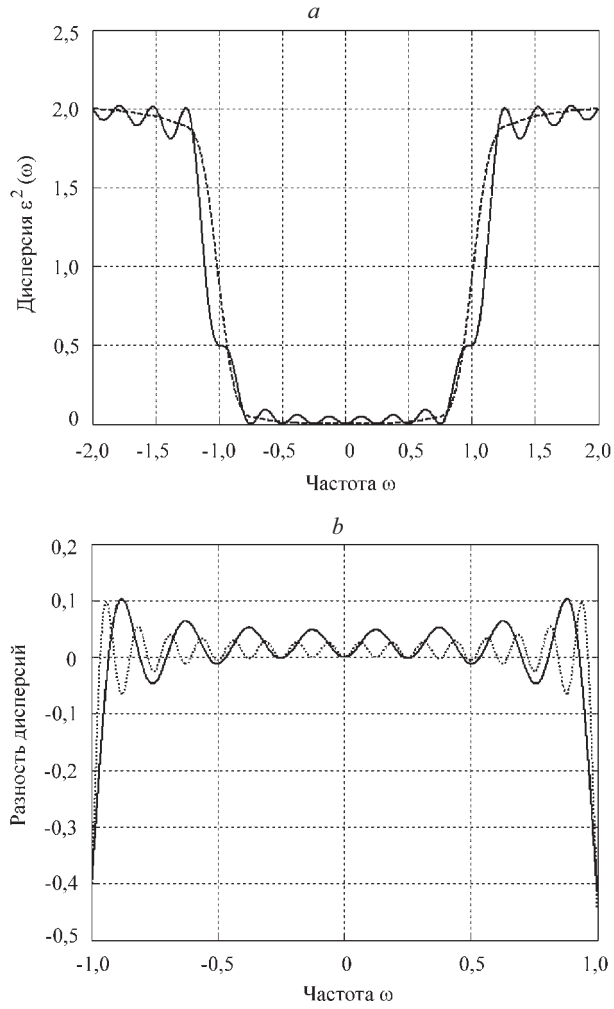


Рис. 3. Ошибки восстановления сигнала: *a* – дисперсии ошибки (18) (пунктирная кривая) и (20) (сплошная кривая); *b* – разность дисперсий (20) и (18) для $N = 4$ (сплошная кривая) и $N = 8$ (пунктирная кривая)

ности в полосе частот $-\alpha\pi/\Delta \leq \omega \leq \alpha\pi/\Delta$ при значениях параметра $\alpha = 1, \alpha = (2N - 2)/(2N)$ и $\alpha = (2N - 4)/(2N)$.

Разность формул (20) и (18) показана на рис. 3, *b*.

Т а б л и ц а 3

α	N				
	16	32	64	128	256
1	1,08	0,07	1,06	1,06	1,06
$2N/(2N + 1)$	1,70	1,51	1,40	1,33	1,27
$2(N - 1)/(2N + 1)$	2,19	1,77	1,56	1,44	1,36

Предельные значения дисперсии ошибки при четном числе отсчетов (формулы (18) и (20)) аналогичны предельным значениям при нечетном числе отсчетов. Интегральная по частоте дисперсия ошибки при $N \rightarrow \infty$ также равна удвоенной энергии сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$, так как соотношение (11) становится рядом Котельникова.

Заключение. Из изложенного следует, что применение рядов Фурье (2), (6) и (9) при незначительной передискретизации с использованием модели стационарного случайного сигнала с ограниченным по частоте и равномерным спектром мощности оказывается более предпочтительным по сравнению с рядом (1) и его дискретными вариантами. При нечетном числе отсчетов уже достаточно передискретизации, равной величине $1 + 1/(2N)$, а при четном числе отсчетов – величине $1 + 1/(N - 1)$.

В основе используемой модели сигнала для определения дисперсии ошибки лежит предположение о некоррелированности его спектральных составляющих. В реальных условиях это предположение не всегда выполняется и, например, для конкретного сигнала с нечетной составляющей, имеющей нулевые значения на краях интервала $-0,5T \leq t \leq 0,5T$, более предпочтительно применение разложения, базирующегося на соотношении (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Теоремы отсчетов для сигналов с ограниченным спектром // Автометрия. 2005. **41**, № 5. С. 33.
2. **Бондаренко Ю. В.** Оценка точности восстановления импульсного сигнала при многоканальной регистрации // Автометрия. 2007. **43**, № 1. С. 49.
3. **Efimov V. M., Reznik A. L., Torgov A. V.** Optimal signal interpolation using the values of signal and its derivative // Pattern Recogn. and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications. 2007. **17**, N 1. P. 76.
4. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа. М.: ГИФМЛ, 1961.

Поступила в редакцию 10 апреля 2007 г.