

УДК 539.376

## АСИМПТОТИКА ДАЛЬНОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РОСТЕ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В СРЕДЕ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ

Л. В. Степанова, М. Е. Федина

Самарский государственный университет, 443011 Самара

E-mail: lst@ssu.samara.ru

Приведено асимптотическое исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности у вершины растущей в условиях ползучести трещины с учетом процесса накопления рассеянных повреждений. Установлено, что к вершине трещины и к ее берегам примыкает область полностью поврежденного материала, конфигурация которой найдена и исследована. Показано, что решение Хатчинсона — Райса — Розенгрена не может быть принято в качестве граничного условия в бесконечно удаленной точке, и получена новая асимптотика дальнего поля напряжений, управляющая геометрией области полностью поврежденного материала.

**Ключевые слова:** поле напряжений, трещина, поврежденность, асимптотический анализ.

**Введение.** Анализ напряженно-деформированного состояния в теле с трещиной с учетом накопления повреждений представляет особый интерес, поскольку комбинации компонент тензора напряжений и параметр поврежденности входят, как правило, в критерий разрушения и, следовательно, определяют условия работы элемента конструкции.

Исследованию полей напряжений, деформаций и сплошности (поврежденности) в связанной постановке задачи (например, упругость — поврежденность, пластичность — поврежденность, ползучесть — поврежденность) в последнее время уделяется значительное внимание [1–7]. Связанность постановки задачи обусловлена, с одной стороны, необходимостью описать влияние накопления микродефектов в теле с макроскопической трещиной на напряженно-деформированное состояние, с другой — желанием учесть обратный процесс, а именно изменение напряженно-деформированного состояния вследствие образования и роста микродефектов.

Установлено [1–7], что накопленные в теле с макротрещиной повреждения приводят к отсутствию характерной как для линейной, так и для нелинейной механики разрушения сингулярности поля напряжений в окрестности вершины трещины либо к ее существенному ослаблению.

В настоящей работе показано, что влияние накопления повреждений проявляется в изменении не только ближнего поля напряжений (в окрестности вершины трещины), но и дальнего поля напряжений (на большом удалении от вершины трещины).

При изучении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины часто используется подход, применяемый при построении теории пограничного слоя [8] или “принцип микроскопа” [9]. В рамках этих подходов изучается окрестность вершины трещины, и в такой постановке трещина предполагается полубесконечной, а истинные граничные условия заменяются условиями асимптотического сближения, например, с особым упругим решением при исследовании трещины в упругопластическом материале в

предположении маломасштабного пластического течения [10, 11]. В этом случае говорят, что область пластического течения “полностью управляется” особым упругим решением. Аналогичный метод при решении задачи о росте трещины в упругопластических материалах применяется для формулирования граничного условия в бесконечно удаленной точке в [12–14], а также при решении задач механики трещин в связанной постановке. Так, в [5–7] исследуется напряженно-деформированное состояние у вершины трещины антиплоского сдвига [5] и нормального отрыва [6, 7] в связанных постановках (упругость — поврежденность и пластичность — поврежденность), где предполагается, что поле напряжений непосредственно у вершины трещины искажается вследствие процесса накопления повреждений, тогда как при удалении от вершины трещины в область неповрежденного материала можно считать, что поле напряжений полностью определяется сингулярным упругим решением. Таким образом, принимается гипотеза, согласно которой область накопления рассеянных повреждений полностью определяется особым упругим решением.

Подобный подход используется и при постановке граничного условия в бесконечно удаленной точке в упругом нелинейно-вязком материале [15, 16].

В настоящей работе рассматриваются определяющие соотношения  $\dot{\epsilon}_{ij} = (3B/2)(\sigma_e/\psi)^{n-1} s_{ij}/\psi$ , основанные на степенном законе теории установившейся ползучести.

При исследовании поля сплошности на значительном удалении от вершины трещины можно предположить, что параметр сплошности стремится к единице. Тогда определяющие соотношения рассматриваемой задачи полностью совпадают со степенным законом установившейся ползучести, поэтому граничные условия могут быть сформулированы как условия асимптотического сближения с решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена (Hutchinson — Rice — Rosengren (HRR)) [17, 18].

Однако, как показывает асимптотический анализ кинетического уравнения, решение HRR не может быть принято в качестве граничного условия в бесконечно удаленной точке. Следовательно, влияние процесса накопления повреждений проявляется и в изменении поля напряжений на расстояниях от вершины трещины, много больших, чем характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, моделируемой в окрестности вершины трещины, но все еще малых по сравнению и с длиной трещины, и с характерным линейным размером тела.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим растущую полубесконечную трещину в неограниченном теле (рис. 1). Пусть определяющие соотношения исследуемого материала построены на основе степенной зависимости Нортона между скоростями деформаций ползу-

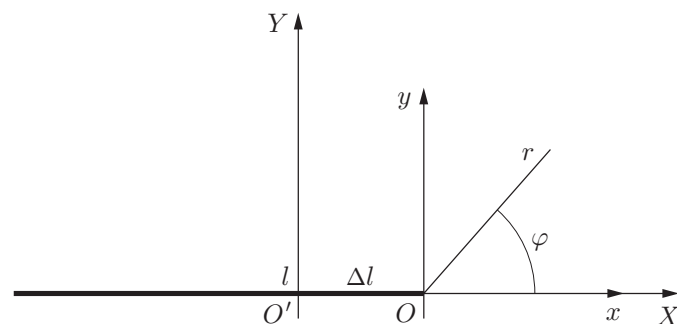


Рис. 1. Геометрия вершины растущей трещины:

$XO'Y$  — неподвижная система координат;  $xOy$  — движущаяся вместе с вершиной трещины система координат

чести и напряжениями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (1.1)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $B$ ,  $n$  — константы материала;  $\sigma_e$  — интенсивность напряжений: в случае плоского деформированного состояния  $\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{r\varphi}^2$ , в случае плоского напряженного состояния  $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2$ , где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 1$ ) — параметр сплошности Качанова [19] ( $\omega = 1 - \psi$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) — параметр поврежденности Работнова [20]);  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$  — компоненты диватора напряжений: в случае плоского деформированного состояния  $s_{rr} = -s_{\varphi\varphi} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/2$ , в случае плоского напряженного состояния  $s_{rr} = (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/3$ ,  $s_{\varphi\varphi} = (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})/3$ .

Изучим поля напряжений, скоростей деформаций ползучести и скалярный параметр сплошности на значительном удалении от вершины распространяющейся трещины типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины движущейся трещины в материале с определяющими соотношениями вида (1.1) в среде с поврежденностью было предметом многочисленных исследований [1–4]. В [1, 2] показано, что вблизи берегов трещины и ее вершины существует область полностью поврежденного материала или (и) зона активного накопления повреждений (микропор, микротрещин, микродефектов), иногда называемая зоной процесса. В силу этого традиционные для механики сплошных сред уравнения не могут быть сформулированы в окрестности вершины продвигающейся трещины. Поэтому примем, что вблизи вершины дефекта существует зона полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. Пусть разрешающая система уравнений (уравнения равновесия, условие совместности деформаций, кинетическое уравнение накопления повреждений) исследуется на значительном удалении от вершины дефекта, что позволяет определить асимптотику дальнего поля напряжений и конфигурацию области полностью поврежденного материала.

Итак, необходимо найти решение системы уравнений, записанной в полярной системе координат с полюсом в вершине подвижной трещины (см. рис. 1) и состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0; \quad (1.2)$$

соотношений Коши, связывающих перемещения и деформации, т. е.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;  $u_i$  — перемещения; условия совместности деформаций, сформулированного для скоростей деформаций ползучести, а именно

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}; \quad (1.4)$$

кинетического уравнения, постулирующего степенной закон накопления повреждений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (1.5)$$

где  $A$ ,  $m$  — константы материала;  $t$  — время;  $\sigma_{eqv} = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_e + (1 - \alpha - \beta)\sigma_{kk}$  — эквивалентное напряжение ( $\sigma_1$  — максимальное главное напряжение;  $\sigma_{kk}$  — гидростатическое напряжение; константы  $\alpha$  и  $\beta$  находятся экспериментально). В случае трещины,

движущейся с некоторой скоростью  $v(t)$  в направлении оси  $x$ , материальная производная по времени  $t$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Ограничиваясь в дальнейшем изучением установившегося роста трещины, когда нет явной зависимости искомых величин от времени, производную по времени будем определять соотношением

$$\frac{d}{dt} = -v \frac{\partial}{\partial x} = -v \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Поскольку в случае установившегося роста трещины

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv 0,$$

кинетическое уравнение приобретает вид

$$-v \left( \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) = -A \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m. \quad (1.6)$$

Определяющие соотношения (1.1) представляются в форме:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{3}{4} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \quad \dot{\epsilon}_{r\varphi} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \quad (1.7)$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, & \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (1.8)$$

в случае плоского напряженного состояния.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0. \quad (1.9)$$

Граничное условие в бесконечно удаленной точке записывается так:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi) \rightarrow \tilde{C} r^{s_0} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.10)$$

где значения  $s_0$  находятся в процессе решения задачи;  $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  — функции, подлежащие определению.

Следует отметить, что граничное условие (1.10) для рассматриваемых определяющих соотношений (1.1) в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано как

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi) = \left( \frac{C^*}{B I_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.11)$$

поскольку в бесконечно удаленной точке  $\psi \equiv 1$  и двучленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины отыскивается в виде

$$\psi(r, \varphi) = 1 - r^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) + o(r^{\gamma_1}), \quad \gamma_1 < 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

В этом случае определяющие уравнения (1.1) сводятся к обычным соотношениям степенного закона установившейся ползучести. Однако, как будет показано ниже, из кинетического уравнения накопления повреждений (1.6) вытекает соотношение  $\gamma_1 = 1 - m/(n+1)$

и так как  $m = 0,7n$ , то  $\gamma_1 > 0$ , что противоречит условию  $\gamma_1 < 0$  в (1.12). Следовательно, граничное условие (1.11) принимается в более общем виде (1.10). Величина  $\tilde{C}$  может быть найдена путем решения задачи с истинными граничными условиями для реального элемента конструкции, находящегося под действием определенной системы нагрузок.

Решение краевой задачи (1.2)–(1.8) с граничными условиями (1.9), (1.10) является функцией следующих переменных и параметров задачи:  $r, \varphi, A, m, v, \tilde{C}, B, n$ .

Анализ размерностей показывает, что можно перейти к следующим безразмерным функциям:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = [\tilde{C}(v/A)^{s_0}]^{1/(s_0m+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{r}, \varphi), \quad \dot{\varepsilon}_{ij}(r, \varphi) = 3B\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tilde{r}, \varphi)/2, \quad \psi(r, \varphi) = \tilde{\psi}(\tilde{r}, \varphi),$$

где  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  и  $\tilde{\psi}$  — безразмерные функции от безразмерных переменных  $\varphi$  и  $\tilde{r} = r/r_0$ ,  $r_0 = [\tilde{C}^{-m}v/A]^{1/(s_0m+1)}$  (далее знак тильды опускается).

Уравнения равновесия, условие совместности после введения безразмерных величин сохраняют свой вид. Кинетическое уравнение будет иметь следующую форму:

$$\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m. \quad (1.13)$$

Определяющие соотношения (1.7) и (1.8) представляются в безразмерных переменных в виде

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = -\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \quad (1.14)$$

в случае плоской деформации и

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \quad (1.15)$$

в случае плоского напряженного состояния.

Граничные условия в бесконечно удаленной точке в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi) \rightarrow r^{s_0} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (1.16)$$

Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений (1.2)–(1.4), (1.7), (1.8), (1.13) с граничными условиями (1.16) и

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0.$$

**2. Асимптотическое решение задачи.** Компоненты тензора напряжений представляются с помощью функции напряжений Эри  $F(r, \varphi)$  как

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \quad (2.1)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial^2/\partial \varphi^2$  — оператор Лапласа.

Решение сформулированной системы уравнений будем отыскивать в форме степенных разложений

$$F(r, \varphi) = r^{\lambda_0} f^{(0)}(\varphi) + r^{\lambda_1} f^{(1)}(\varphi) + o(r^{\lambda_1}) \quad (\lambda_j < 0), \\ \psi(r, \varphi) = 1 - r^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) + o(r^{\gamma_1}) \quad (\gamma_j < 0) \quad (2.2)$$

при  $r \rightarrow \infty$ , двигаясь от бесконечно удаленной точки к окрестности вершины трещины; собственные функции  $f^{(j)}(\varphi)$ ,  $g^{(j)}(\varphi)$  и собственные значения  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$  подлежат определению.

В силу (2.1) и (2.2) двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений, интенсивности напряжений и эквивалентного напряжения определяются равенствами:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \varphi) &= r^{s_0}[\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})''] + r^{s_1}[\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})''], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= r^{s_0}\lambda_0(\lambda_0 - 1)f^{(0)} + r^{s_1}\lambda_1(\lambda_1 - 1)f^{(1)}, \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) &= r^{s_0}(1 - \lambda_0)(f^{(0)})' + r^{s_1}(1 - \lambda_1)(f^{(1)})'\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \varphi) &= r^{s_0}f_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1}f_{rr}^{(1)}(\varphi), & \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= r^{s_0}f_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1}f_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) &= r^{s_0}f_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1}f_{r\varphi}^{(1)}(\varphi), & s_0 &= \lambda_0 - 2, \quad s_1 = \lambda_1 - 2,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}f_{rr}^{(j)}(\varphi) &= \lambda_j f^{(j)} + (f^{(j)})'', & f_{\varphi\varphi}^{(j)}(\varphi) &= \lambda_j(\lambda_j - 1)f^{(j)}, & f_{r\varphi}^{(j)} &= (1 - \lambda_j)(f^{(j)})', \\ \sigma_e(r, \varphi) &= r^{s_0}\sigma_e^{(0)}(\varphi) + r^{s_1}\sigma_e^{(1)}(\varphi), & \sigma_{eqv}(r, \varphi) &= r^{s_0}\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1}\sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Здесь в случае плоской деформации

$$\begin{aligned}(\sigma_e^{(0)})^2 &= (3/4)\{\lambda_0^2(\lambda_0 - 2)^2(f^{(0)})^2 + 4(\lambda_0 - 1)^2[(f^{(0)})']^2 - 2\lambda_0 s_0 f^{(0)}(f^{(0)})'' + [(f^{(0)})'']^2\}, \\ \sigma_e^{(1)} &= \{[\lambda_0(2 - \lambda_0)f^{(0)} - (f^{(0)})''][\lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} - (f^{(1)})''] + 4(1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)(f^{(0)})'(f^{(1)})'\}/\sigma_e^{(0)}\end{aligned}$$

и в случае плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}(\sigma_e^{(0)})^2 &= \lambda_0^2(\lambda_0^2 - 3\lambda + 3)(f^{(0)})^2 + 3(\lambda_0 - 1)^2[(f^{(0)})']^2 + \lambda_0(3 - \lambda_0)f^{(0)}(f^{(0)})'' + [(f^{(0)})'']^2, \\ \sigma_e^{(1)} &= \{(\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})'')(\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'') + \lambda_0(\lambda_0 - 1)\lambda_1(\lambda_1 - 1)f^{(0)}f^{(1)} - \\ &\quad - [(\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})'')\lambda_1(\lambda_1 - 1)f^{(1)} + (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'')\lambda_0(\lambda_0 - 1)f^{(0)}] + \\ &\quad + 3(1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)(f^{(0)})'(f^{(1)})'\}/\sigma_e^{(0)}, \\ \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) &= \alpha\sigma_1^{(0)}(\varphi) + \beta\sigma_e^{(0)}(\varphi) + (1 - \alpha - \beta)\sigma_{kk}^{(0)}(\varphi).\end{aligned}$$

Постоянная  $\gamma_1$  определяется посредством асимптотического анализа кинетического уравнения (1.13). Подставляя асимптотические разложения (2.2) в кинетическое уравнение (1.13), получим

$$\gamma_1 \cos \varphi r^{\gamma_1 - 1} g^{(1)}(\varphi) - \sin \varphi r^{\gamma_1 - 1} (g^{(1)}(\varphi))' = -r^{(\lambda_0 - 2)m} (\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi))^m.$$

Отсюда следует, что если принять гипотезу о равенстве порядков величин при  $r \rightarrow \infty$ , фигурирующих в левой и правой частях последнего уравнения, то справедливы равенства  $\gamma_1 - 1 = (\lambda_0 - 2)m$  или  $\gamma_1 = 1 + s_0 m$  и

$$\sin \varphi (g^{(1)}(\varphi))' - \gamma_1 \cos \varphi g^{(1)}(\varphi) = (\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi))^m. \quad (2.5)$$

Двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений (2.3) и параметра сплошности (второе выражение в (2.2)) позволяют найти двучленные асимптотические разложения компонент тензора скоростей деформаций ползучести. Подстановка (2.3) и второго асимптотического разложения из (2.2) в (1.14) и (1.15) приводит к двучленным асимптотическим разложениям скоростей деформаций ползучести (при  $r \rightarrow \infty$ ):

— для случая плоского деформированного состояния

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}(r, \varphi) &= -\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = r^{s_0 n} \varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^{s_0 n + s_1 - s_0} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= r^{s_0 n} \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_0 n + s_1 - s_0} \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi),\end{aligned}\quad (2.6)$$

где

$$\varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) = (1/2)(\sigma_e^{(0)})^{n-1}(f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)}), \quad \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) = (\sigma_e^{(0)})^{n-1} f_{r\varphi}^{(0)}; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi) &= (1/2)(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{f_{rr}^{(1)} - f_{\varphi\varphi}^{(1)} + (f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)})[ng^{(1)} + (n-1)\sigma_e^{(1)}/\sigma_e^{(0)}]\}; \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{f_{r\varphi}^{(1)} + f_{r\varphi}^{(0)}[ng^{(1)} + (n-1)\sigma_e^{(1)}/\sigma_e^{(0)}]\};\end{aligned}\quad (2.8)$$

— для случая плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}(r, \varphi) &= r^{s_0 n} \varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^{s_0 n + s_1 - s_0} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= r^{s_0 n} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_0 n + s_1 - s_0} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi}(r, \varphi) &= r^{s_0 n} \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_0 n + s_1 - s_0} \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi),\end{aligned}\quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) &= (1/3)(\sigma_e^{(0)})^{n-1}(2f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) = (1/3)(\sigma_e^{(0)})^{n-1}(2f_{\varphi\varphi}^{(0)} - f_{rr}^{(0)}), \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} f_{r\varphi}^{(0)};\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi) &= (1/3)(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{2f_{rr}^{(1)} - f_{\varphi\varphi}^{(1)} + (2f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)})[ng^{(1)} + (n-1)\sigma_e^{(1)}/\sigma_e^{(0)}]\}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) &= (1/3)(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{2f_{\varphi\varphi}^{(1)} - f_{rr}^{(1)} + (2f_{\varphi\varphi}^{(0)} - f_{rr}^{(0)})[ng^{(1)} + (n-1)\sigma_e^{(1)}/\sigma_e^{(0)}]\}, \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{f_{r\varphi}^{(1)} + f_{r\varphi}^{(0)}[ng^{(1)} + (n-1)\sigma_e^{(1)}/\sigma_e^{(0)}]\}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

При выводе второго члена асимптотического разложения скоростей деформаций ползучести (2.8) и (2.11) учтено, что  $s_1 = s_0 + \gamma_1$ . Это равенство следует из сравнения порядков слагаемых при  $r^{s_1 - s_0}$  и  $r^{\gamma_1}$ , фигурирующих в двучленном асимптотическом разложении скоростей деформаций. Только при совпадении этих порядков процесс построения членов асимптотического разложения может быть продолжен сколь угодно долго и на каждом шаге будет получено обыкновенное дифференциальное уравнение для новой неизвестной функции (либо для  $f^{(k)}$ , либо для  $g^{(k)}$ ) и будут отсутствовать ничем “не уравновешенные” слагаемые в условии совместности. Таким образом, показатели степеней в асимптотическом разложении компонент тензора напряжений  $s_k$  определяются следующим образом: собственное значение  $s_0$  находится численно (процедура описана ниже),  $s_k$  ( $k > 0$ ) устанавливается с помощью асимптотического анализа  $(k+1)$ -членного разложения скоростей деформаций ползучести. Показатели  $\gamma_k$  отыскиваются посредством асимптотического анализа кинетического уравнения накопления повреждений.

Следует отметить, что главный член в асимптотических разложениях компонент тензора скоростей деформаций ползучести (2.7) и (2.10) определяется полностью функцией  $f^{(0)}(\varphi)$  в силу (2.4), что дает возможность определить сначала неизвестную функцию  $f^{(0)}(\varphi)$  из условия совместности деформаций без определения функции  $g^{(1)}(\varphi)$ . Таким образом, начально связанная задача “развязывается”. Действительно, подстановка (2.6) (для случая плоского деформированного состояния и (2.9) для случая плоского напряженного состояния) в условие совместности деформаций и приравнение коэффициентов при одинаковых степенях  $r$  позволяют получить два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$2(s_0 n + 1) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - s_0 n (s_0 n + 2) \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(0)}; \quad (2.12)$$

$$2(s_0n + s_1 - s_0 + 1) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{R\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - (s_0n + s_1 - s_0)(s_0n + s_1 - s_0 + 2) \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(1)} \quad (2.13)$$

для плоского деформированного состояния и

$$2(s_0n + 1) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - s_0n \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(0)} + (s_0n + 1) s_0n \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)}; \quad (2.14)$$

$$2(s_0n + s_1 - s_0 + 1) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{r\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - (s_0n + s_1 - s_0) \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + (s_0n + s_1 - s_0 + 1) s_0n \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(1)} \quad (2.15)$$

для плоского напряженного состояния.

Уравнения (2.12) и (2.14) являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка относительно функции  $f^{(0)}(\varphi)$ . Поэтому сначала определяется функция  $f^{(0)}(\varphi)$ , а затем исследуется уравнение (2.5) как неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $g^{(1)}(\varphi)$  с правой частью, определяемой функцией  $f^{(0)}(\varphi)$ . После определения функции  $g^{(1)}(\varphi)$  можно найти численное решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.13) (или (2.15)), которое является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно функции  $f^{(1)}(\varphi)$  (в это уравнение входят функции  $f^{(0)}(\varphi)$  и  $g^{(1)}(\varphi)$ , но на данном шаге построения асимптотических разложений они являются уже известными функциями). Последовательность этих действий может быть продолжена. Таким образом, в настоящей работе предложен алгоритм “развязывания” системы уравнений связанной задачи. На каждом этапе определяется либо функция  $f^{(j)}(\varphi)$  по найденным функциям  $f^{(0)}, \dots, f^{(j-1)}$  и  $g^{(1)}, \dots, g^{(j)}$ , либо функция  $g^{(j)}(\varphi)$  по найденным функциям  $f^{(0)}, \dots, f^{(j-1)}$  и  $g^{(1)}, \dots, g^{(j-1)}$  ( $j \geq 1$ ).

В настоящей работе определяются одночленное разложение функции напряжений Эри и двучленное разложение параметра сплошности, поскольку, имея их, можно оценить конфигурацию области полностью поврежденного материала, охватывающей вершину трещины и примыкающей к ее берегам.

Подстановка (2.7) в (2.12) с учетом (2.4) ведет к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции  $f^{(0)}(\varphi)$

$$\begin{aligned} (f^{(0)})^{IV} N(\varphi) = & 4(s_0n + 1)(1 - \lambda_0)[(n - 1)K(\varphi)(f^{(0)})' + h^2(f^{(0)})''] + \\ & + h^2[(s_0\lambda_0 + s_0n(s_0n + 2))(f^{(0)})'' - s_0n(s_0n + 2)(2 - \lambda_0)\lambda_0 f^{(0)}] - \\ & - (n - 1)(n - 3)(K(\varphi)/h)^2[(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}] - \\ & - 2(n - 1)K(\varphi)[(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}] - (n - 1)M(\varphi)[(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}], \quad (2.16) \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= [(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}][(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}] + 4(1 - \lambda_0)^2 (f^{(0)})'(f^{(0)})'', \\ M(\varphi) &= -[(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}]\lambda_0 s_0 (f^{(0)})'' + [-s_0\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})'']^2 + 4(1 - \lambda_0)^2 (f^{(0)})'(f^{(0)})'', \\ N(\varphi) &= n[(f^{(0)})'' - s_0\lambda_0 f^{(0)}(f^{(0)})'']^2 + 4(1 - \lambda_0)^2 [(f^{(0)})']^2, \\ h(\varphi) &= \sqrt{[(f^{(0)})'' - \lambda_0 s_0 f^{(0)}]^2 + 4(1 - \lambda_0)^2 ((f^{(0)})')^2}, \end{aligned}$$

в случае плоской деформации; подстановка (2.10) в (2.14) с учетом (2.4) ведет к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции  $f^{(0)}(\varphi)$



$$\begin{aligned}
(f^{(0)})^{IV} N(\varphi) &= 6(s_0 n + 1)(1 - \lambda_0)[(n - 1)K(\varphi) + h^2(f^{(0)})'''] - \\
&\quad - [(n - 3)(K(\varphi)/h)^2 + (n - 1)M(\varphi)][\lambda_0(3 - \lambda_0)f^{(0)} + 2(f^{(0)})''] - \\
&\quad - 2(n - 1)K(\varphi)[\lambda_0(3 - \lambda_0)(f^{(0)})' + 2(f^{(0)})'''] - \\
&\quad - h^2 \lambda_0 s_0 n ((s_0 n + 1)(2\lambda_0 - 3) - 3 + \lambda_0)f^{(0)} - h^2(\lambda_0(3 - \lambda_0) - s_0 n(s_0 n + 1))(f^{(0)})'', \quad (2.17)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K(\varphi) &= (\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})''')(\lambda_0 (f^{(0)})' + (f^{(0)})''''') + \lambda_0^2 (\lambda_0 - 1)^2 f^{(0)} (f^{(0)})' + \\
&\quad + 3(1 - \lambda_0)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'' - \lambda_0 (1 - \lambda_0) (\lambda_0 (f^{(0)})' + (f^{(0)})''''') f^{(0)} / 2 - \\
&\quad - \lambda_0 (1 - \lambda_0) (\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})''') (f^{(0)})' / 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(\varphi) &= (\lambda_0 (f^{(0)})' + (f^{(0)})''''')^2 + \lambda_0 (3 - \lambda_0) (\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})''') (f^{(0)})'' + \\
&\quad + \lambda_0^2 (1 - \lambda_0)^2 ((f^{(0)})')^2 + \lambda_0^2 (\lambda_0 - 1) (2\lambda_0 - 3) f^{(0)} (f^{(0)})'' / 2 + 3(1 - \lambda_0)^2 ((f^{(0)})'')^2 + \\
&\quad + 3(1 - \lambda_0)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'''' - \lambda_0 (\lambda_0 - 1) (\lambda_0 (f^{(0)})' + (f^{(0)})''''') (f^{(0)})';
\end{aligned}$$

$$N(\varphi) = (n - 1)(\lambda_0(3 - \lambda_0)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'')^2 / 2 + 2h^2;$$

$$\begin{aligned}
h &= [(\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})''')^2 + \lambda_0^2 (\lambda_0 - 1)^2 (f^{(0)})^2 - \\
&\quad - (\lambda_0 f^{(0)} + (f^{(0)})''') \lambda_0 (\lambda_0 - 1) f^{(0)} - 3(1 - \lambda_0)^2 ((f^{(0)})')^2]^{1/2}
\end{aligned}$$

в случае плоского напряженного состояния. Решения полученных уравнений должны удовлетворять граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f^{(0)}(\pi) = 0, \quad (f^{(0)})'(\pi) = 0 \quad (2.18)$$

и условиям симметрии на ее продолжении

$$(f^{(0)})'(0) = 0, \quad (f^{(0)})'''(0) = 0. \quad (2.19)$$

Для численного решения уравнений (2.16), (2.17) использовался метод Рунге — Кутты — Фельберга пятого порядка в сочетании с методом пристрелки. Решение уравнений (2.16) и (2.17) с граничными условиями (2.18), (2.19) сводилось к исследованию задач Коши. Для этого граничные условия при  $\varphi = \pi$  заменяются начальными  $f^{(0)}(0) = c_1$ ,  $(f^{(0)})''(0) = c_2$  при  $\varphi = 0$ . В силу однородности уравнений (2.16) и (2.17) можно принять условие нормировки  $f^{(0)}(0) = 1$ . Таким образом, начальные условия имеют вид

$$f^{(0)}(0) = 1, \quad (f^{(0)})'(0) = 0, \quad (f^{(0)})''(0) = c_2, \quad (f^{(0)})'''(0) = 0.$$

При нахождении численного решения систем уравнений (2.16) и (2.17) определялись такие собственные значения  $s_0$  и постоянная  $c_2$  для разных  $n$ , чтобы выполнялись граничные условия при  $\varphi = \pi$ :  $f^{(0)}(\pi) = 0$  и  $(f^{(0)})'(\pi) = 0$ . При определении констант  $s_0$  и  $c_2$  проверялось выполнение условия  $(f^{(0)})^2(\pi) + ((f^{(0)})'(\pi))^2 \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Собственные числа  $s_0$  и значения второй производной функции  $f^{(0)}(\varphi)$  на линии, продолжающей трещину  $\varphi = 0$ , приводятся в табл. 1 и 2 для случаев плоского деформированного и плоского напряженного состояний соответственно. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла для трещины нормального отрыва в случае плоского напряженного состояния при  $n = 1$  и  $n = 5$  приводятся на рис. 2, а, б соответственно. Зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла для остальных  $n$  имеют характер, сходный с показанным на рис. 2, б за исключением случаев  $n = 2$  для плоской

Таблица 1

$n$	$s_0$	$f''(0)$
1	-1,5	-0,75
2	-1,0	-0,5
3	-0,7716	-0,4372
4	-0,6684	-0,4092
5	-0,6179	-0,3985
6	-0,5901	-0,3950
7	-0,5732	-0,3943
8	-0,5621	-0,3948
9	-0,5543	-0,3958

Таблица 2

$n$	$s_0$	$f''(0)$
1	-1,5	-0,75
2	-1,1540	-0,5686
3	-1,0	-0,5
4	-0,9133	-0,4658
5	-0,8580	-0,4428
6	-0,8197	-0,4261
7	-0,7919	-0,4134
8	-0,7708	-0,4035
9	-0,7543	-0,3955

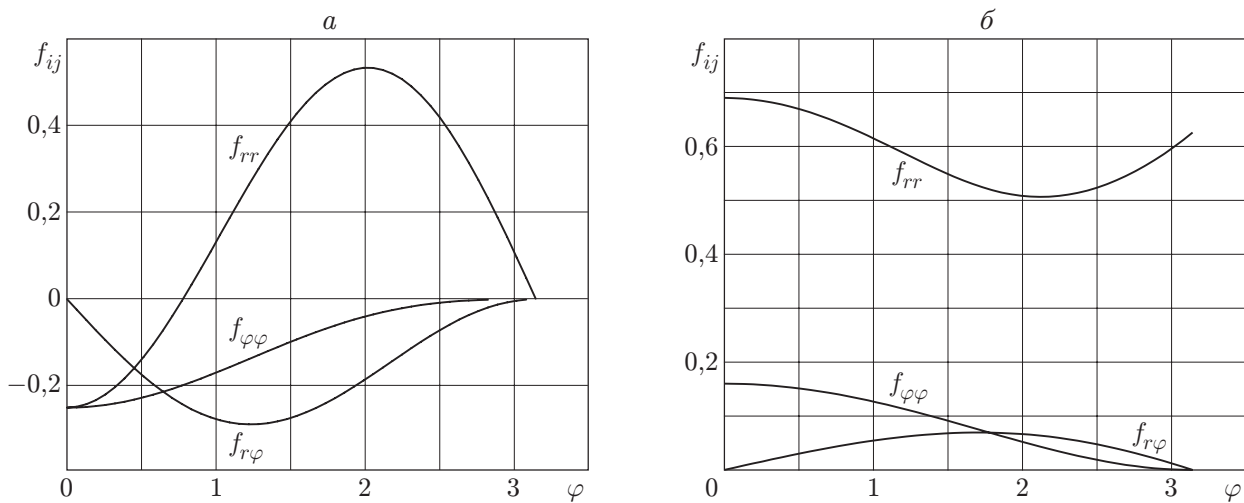


Рис. 2. График зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии: а —  $n = 1, m = 1$ ; б —  $n = 5, m = 0,7n$

деформации и  $n = 3$  для плоского напряженного состояния, для которых  $\lambda_0 = 1$ , поэтому в силу (2.3)  $\sigma_{ij} = \text{const}$  для всех  $i, j$ .

Подставляя асимптотическое разложение (2.2) в кинетическое уравнение (1.11) в предположении установившегося роста трещины, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\sin \varphi (g^{(1)}(\varphi))' - \gamma_1 \cos \varphi g^{(1)}(\varphi) = (\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi))^m, \quad (2.20)$$

где  $\gamma_1 = 1 + s_0 m$ . Значения показателя степени  $\gamma_1$  в разложении скалярного параметра сплошности описаны в табл. 3 и 4 в случаях плоской деформации и плоского напряженного состояния соответственно.

Двучленное асимптотическое разложение параметра сплошности позволяет оценить форму и размеры области полностью поврежденного материала. Используя найденные зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла, можно найти функцию  $g^{(1)}(\varphi)$ , исследуя численно обыкновенное дифференциальное уравнение (2.20) с условием регулярности его решения при  $\varphi = 0$ :

$$g^{(1)}(0) = -(\sigma_{eqv}^{(0)}(0))^m / \gamma_1.$$

Поскольку на границе данной зоны параметр сплошности обращается в нуль:  $\psi(r, \varphi) = 1 - r^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) = 0$ , уравнение границы области полностью поврежденного материала имеет

Таблица 3

$n$	$m$	$\gamma_1$
1	1	-0,5
2	0,7n	-0,4
3	0,7n	-0,6205
4	0,7n	-0,8717
5	0,7n	-1,1626
6	0,7n	-1,4785
7	0,7n	-1,8089
8	0,7n	-2,1479
9	0,7n	-2,4925

Таблица 4

$n$	$m$	$\gamma_1$
1	1	-0,5
2	0,7n	-0,6156
3	0,7n	-1,1
4	0,7n	-1,5574
5	0,7n	-2,0030
6	0,7n	-2,4431
7	0,7n	-2,8805
8	0,7n	-3,3167
9	0,7n	-3,7532

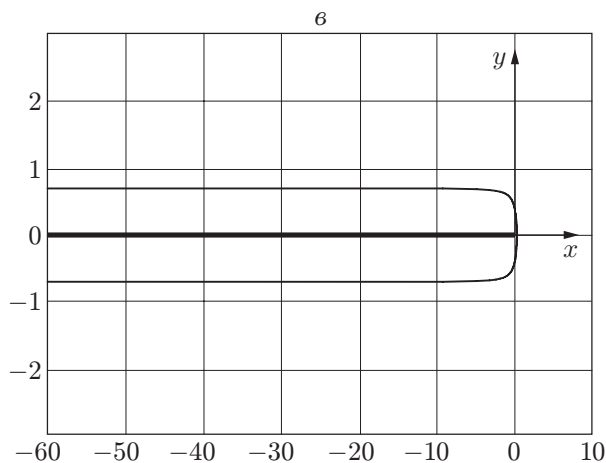
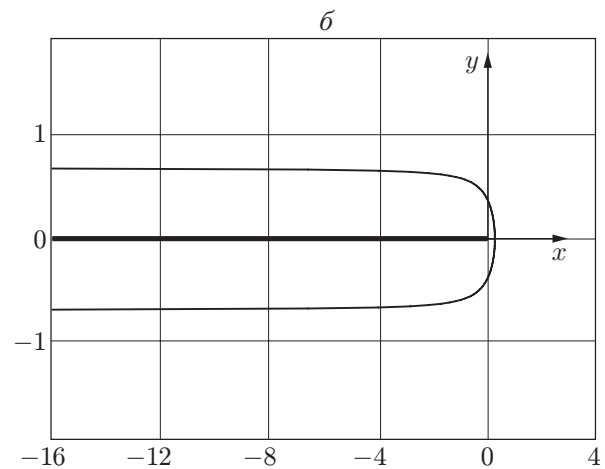
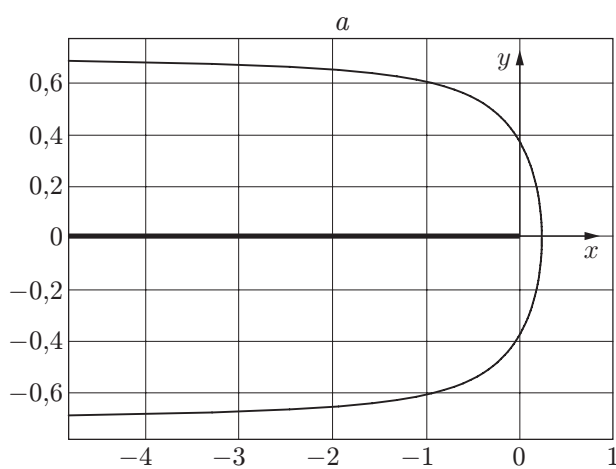


Рис. 3. Геометрия области полностью поврежденного материала при  $n = 3$ ,  $m = 0,7n$ :

*a* — для наблюдателя, находящегося в непосредственной окрестности вершины трещины;  
*б* и *в* — для наблюдателя, удаляющегося от вершины трещины

вид

$$r(\varphi) = [g^{(1)}(\varphi)]^{-1/\gamma_1}.$$

Конфигурация области полностью поврежденного материала представлена на рис. 3, *a, б, в* для наблюдателя, находящегося на разных расстояниях от вершины растущей трещины.

Таким образом, установлено, что асимптотика HRR — ставшая уже классической асимптотика компонент тензора напряжений у вершины трещины для степенной зависимости между компонентами тензора напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) — не может служить граничным условием в бесконечно удаленной точке в задаче о росте полубесконечной трещины в среде с поврежденностью для рассматриваемого типа

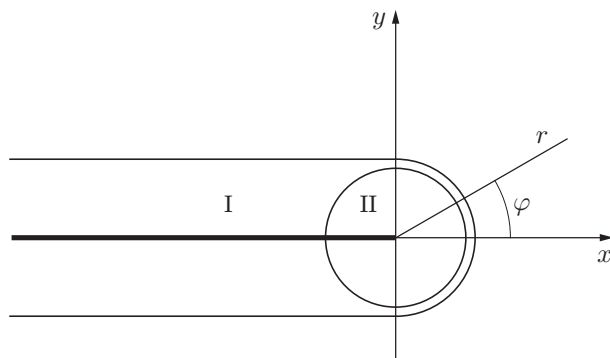


Рис. 4. Конфигурация области полностью поврежденного материала (I) и зона преобладания решения HRR (II)

определяющих соотношений. Невозможность формулирования граничного условия в бесконечно удаленной точке как требования асимптотического сближения искомого решения с решением HRR можно объяснить тем, что размеры области полностью поврежденного материала превосходят размеры зоны доминирования решения HRR, так что зона, где справедливо решение HRR, частично или полностью охвачена областью полностью поврежденного материала и, следовательно, геометрия последней не может управляться асимптотикой HRR (рис. 4).

Следует отметить, что спектр собственных значений данной задачи и характер сингулярности компонент тензора напряжений у вершины трещины исследовался в [21], где были получены собственные значения лишь для отдельных показателей степенного закона установившейся ползучести ( $n = 1, 3, 5$ ). Полученные в настоящей работе собственные значения для всех важных с практической точки зрения показателей  $n$  (см. табл. 1–4) совпадают с собственными значениями, определенными в [21].

**Заключение.** Сравнительно простой подход, реализованный в настоящей работе, дает возможность определить геометрию области полностью поврежденного материала у вершины трещины и ее берегов. Можно отметить, что во многих случаях исследователи задают границу области полностью поврежденного материала априори, опираясь, например, на экспериментальные наблюдения [3], где граница области перед вершиной трещины описывается дугой эллипса, а за ее вершиной доопределяется двумя прямыми, параллельными берегам трещины. В отличие от подхода, используемого в [3], в рамках настоящего исследования удастся единой зависимостью  $r = r(\varphi)$  найти границу области полностью поврежденного материала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // Физ.-хим. механика материалов. 1992. Т. 28, № 1. С. 5–11.
2. Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 160–166.
3. Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 43. P. 6203–6220.
4. Murakami S., Liu Y., Miruno M. Computational methods for creep fracture analyses by damage mechanics // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 2000. V. 183, N 1/2. P. 15–33.

5. **Jin Z. H., Batra R. C.** Crack shielding and material deterioration in damage materials: an antiplane shear fracture problem // Arch. Appl. Mech. 1998. N 68. P. 247–258.
6. **Zhao J., Zhang X.** The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engng Fracture Mechanics. 1995. V. 50, N 1. P. 131–141.
7. **Zhao J., Zhang X.** On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Intern. J. Fract. 2001. V. 108. P. 383–395.
8. **Райс Дж.** Математические методы в механике разрушения // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. Т. 2: Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
9. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
10. **Hult J. A. H., McClintock F.** Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear // Proc. of the 9th Intern. congress on applied mechanics, Brussels, Belgium, 1956. S. 1. V. 8. P. 51–58.
11. **Du Z.-Z., Hancock J. W.** The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint // J. Mech. Phys. Solids. 1991. V. 39, N 4. P. 555–567.
12. **Lee Y. J.** Dynamic asymptotic mode III crack tip field in rate dependent materials // Intern. J. Fract. 1995. V. 70. P. 125–145.
13. **Freund L. B., Hutchinson J. W.** High strain-rate crack growth in rate-dependent plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1985. V. 33, N 2. P. 169–191.
14. **Varias A. G., Shin C. F.** Quasi-static crack advance under a range of constraints — steady-state fields based on a characteristic length // J. Mech. Phys. Solids. 1993. V. 41, N 5. P. 835–861.
15. **Hui C. Y., Riedel H.** The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions // Intern. J. Fract. 1981. V. 17. P. 409–425.
16. **Hui C. Y.** The mechanics of self-similar crack growth in an elastic power-law creeping material // Intern. J. Solids Struct. 1986. V. 22, N 4. P. 357–372.
17. **Hutchinson J. W.** Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
18. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
19. **Качанов Л. М.** О времени разрушения в условиях получести // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 8. С. 26–31.
20. **Работнов Ю. Н.** О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
21. **Lu M., Lee S. B.** Eigenspectra and order of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium // Intern. J. Fract. 1998. V. 92. P. 55–70.

*Поступила в редакцию 19/І 2004 г.,  
в окончательном варианте — 28/ІХ 2004 г.*

---