

УДК 535.41

**Е. А. Краснопевцев, Л. А. Борыняк**

(Новосибирск)

**ТОМОГРАФИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЯ**

Рассматриваются  $2D$  и  $3D$  преобразования Радона для плоскопараллельного слоя, а также методы восстановления локальной характеристики слоя на основе двумерного и трехмерного суммарного изображения.

**Введение.** При изучении цилиндрических оболочек с помощью разработанных авторами методов панорамной интерферометрии [1] возникает томографическая задача: по полученным интегральным проекциям восстановить распределение локальной характеристики для стенки оболочки. Традиционная томография осуществляет реконструкцию в области, близкой по форме к кругу. Осевое сечение оболочки имеет форму вытянутого прямоугольника. Тела с таким поперечным сечением широко распространены в технике. С целью исследования таких объектов рассматриваются прямые и обратные  $2D$  и  $3D$  преобразования Радона для плоскопараллельного слоя, а также методов восстановления на основе  $2D$  и  $3D$  суммарного изображения. Исследуется оптически прозрачный слой, для которого измеряется оптическая длина пути вдоль разных направлений просвечивания с помощью голографической интерферометрии. При этом устанавливаются абсолютные порядки интерференционных полос. Томографические методы восстанавливают по этим данным пространственное распределение показателя преломления или геометрической характеристики элементов слоя. Изучаемое распределение можно представить в виде совокупности точечных элементов с определенными весами, поэтому точечный объект может служить тестом при установлении качества восстановления. Приведены примеры восстановлений, выполненные аналитическими методами. Полученные результаты могут быть использованы для исследования деформированного состояния цилиндрических оболочек, а также пластинок и стержней постоянной толщины.

**Локальная характеристика слоя и интегральная проекция.** На рис. 1 представлена схема голографического интерферометра во встречных пучках, предназначенного для исследования оптически прозрачного слоя  $B$ . Коллимированный когерентный пучок лучей  $A$  проходит через фотоэмульсию  $H$ , пересекает слой  $B$  и, рассеив-

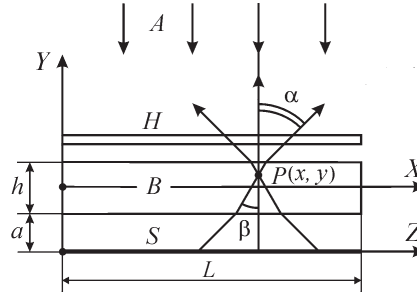


Рис. 1. Схема голографического интерферометра:  $A$  – освещающие лучи;  $H$  – фотоэмульсия;  $B$  – исследуемый слой;  $S$  – светорассеивающая поверхность

шись на поверхности  $S$ , пересекает элементы  $B$  и  $H$  под разными углами. Экспозиция производится дважды: до и после нагружения слоя, в результате формируется двухэкспозиционная голограмма  $H$ . При освещении голограммы опорной волной возникают два мнимых, микроскопически отличающихся состояния слоя, которые интерферируют друг с другом. Предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие видимость интерференционных полос [2]. Интерференционная картина проецируется на поверхность  $S$ , на которую нанесена координатная сетка. Схема получения интерферограмм [3] позволяет установить абсолютные порядки интерференционных полос.

Для некоторого сечения слоя плоскостью опишем регистрируемую на интерферограмме оптическую разность хода функцией  $\tilde{P}(z, \alpha)$ , где  $\alpha$  – угол наблюдения ( $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ). Из геометрии рис. 1, где ось  $X$  находится на срединной поверхности слоя, следует

$$z = x - yt\text{g}\beta - T, \quad (1)$$

здесь  $T = a\text{tg}\alpha + (h/2)\text{tg}\beta$ ;  $\beta$  – угловое положение луча в слое  $B$ ;  $\sin\alpha = n_0 \sin\beta$ ;  $n_0$  – показатель преломления объекта. Величина  $\tilde{P}(z, \alpha)$  складывается из двух составляющих, возникающих при распространении луча через объект между точкой входа в фотоэмульсию и точкой выхода из нее. Первое слагаемое  $P(z, \beta_s)$  набирает освещающий луч, второе слагаемое  $P(z, \beta)$  – рассеянный луч. В результате оптический ход, набираемый рассеянным лучом на пути от точки  $z$  поверхности  $S$  до голограммы  $H$ , выражается через экспериментальные данные:  $P(z, \beta) = \tilde{P}(z, \alpha) - \frac{1}{2}\tilde{P}(z, \alpha_s)$ , где  $\alpha_s$  – угол

падения освещающего луча на поверхность слоя. Для рис. 1  $\alpha_s = 0$ . При фотографировании голограммы под углом  $\alpha$  регистрируется интерференционная картина, поэтому  $\tilde{P}(z, \alpha) = \lambda t m(z, \alpha)$ , где  $m(z, \alpha)$  – порядок интерференционной полосы, наблюдаемой под углом  $\alpha$  в точке  $z$  поверхности  $S$ . Таким образом, на основе экспериментальных данных находим интегральную проекцию

$$P(z, \beta) = \lambda [m(z, \alpha) - (1/2)m(z, 0)]. \quad (2)$$

С другой стороны, величина  $P(z, \beta)$  обусловлена изменением состояния  $f(x, y)$  единичных элементов слоя, через которые прошел луч. Суммируя вклады элементов по пути следования луча, получаем интегральную проекцию в виде  $P(z, \beta) = \int f(x, y) dl_o$ , где элемент

пути луча через объект  $dl_o = \frac{dx}{\sin \beta} = \frac{dy}{\cos \beta}$ . Предположим, что при

любом направлении  $\beta$  проекция определяется одной и той же функцией  $f(x, y)$ , тогда можно выразить  $f(x, y)$  через множество проекций  $P(z, \beta)$ . Далее изложена теория преобразования Радона применительно к прямоугольному сечению и представленным на рисунке координатным осям объекта  $X, Y$  и оси  $Z$ , на которую ведется проецирование под произвольным углом.

**Преобразования Радона для прямоугольного сечения.** Функция  $f(x, y)$  определена в области  $0 \leq x \leq L, -h/2 \leq y \leq h/2$ . Для осуществления фурье-преобразований по координатам  $x, y$  введем вместо  $f(x, y)$  функцию, определенную в пределах всей плоскости:

$$F(x, y) = f(x, y)S_L(x)\Pi_h(y), \quad (3)$$

$$\text{где } S_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{при } x < 0, L < x, \end{cases} \quad \Pi_h(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq h/2, \\ 0 & \text{при } |y| > h/2. \end{cases}$$

Прямоугольные функции представим через их фурье-образы [4]:

$$S_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixt) \hat{S}_L(t) dt, \quad \Pi_h(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iyp) \hat{\Pi}_h(p) dp. \quad (4)$$

$$\text{Здесь } \hat{S}_L(t) = \frac{1}{i} \left[ \frac{1}{t} - \frac{\exp(-iLt)}{t} \right], \quad \hat{\Pi}_h(p) = 2 \frac{\sin hp/2}{p}.$$

С учетом (1) получаем выражение для проекции на ось  $Z$  под углом  $\beta$ , т. е. прямое преобразование Радона:

$$\begin{aligned} P(z, \beta) &= \frac{1}{\sin \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x, \frac{x-z-T}{\operatorname{tg} \beta}\right) dx = \frac{1}{\cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F[z + y \operatorname{tg} \beta + T, y] dy = \\ &= \frac{1}{\cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \delta(z - \zeta) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \delta[(z - x + T) \cos \beta + y \sin \beta] dx dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\zeta = x - y \operatorname{tg} \beta - T$  есть проекция точки  $(x, y)$  на ось  $Z$ . Подставляя (3), (4) в (5), имеем

$$P(z, \beta) = \frac{1}{4\pi^2 \cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_L(t) \exp[it(z + T)] dt \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}_h(p) dp \int_{-\infty}^{+\infty} f[z + y + T, y] \exp[iy(p + t \operatorname{tg} \beta)] dy. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи применения формул (5) и (6).

*Точечная функция.* Если

$$F(x, y) = l^2 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (7)$$

то из формулы (5) получаем

$$P(z, \beta) = \frac{l^2}{\cos \beta} \delta(z - \zeta_0), \quad (8)$$

где  $\zeta_0 = x_0 - y_0 \operatorname{tg} \beta - T$ .

*Равномерное распределение.* Для равномерного распределения  $f(x, y) = C = \text{const}$  и из (6) имеем

$$P(z, \beta) = \frac{C}{2\pi \cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_L(t) \hat{\Pi}_h(-t \operatorname{tg} \beta) \exp[it(z + T)] dt = \frac{C}{\sin \beta} [I(A) - I(A - L)],$$

где  $I(A) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Bt}{t^2} \exp(iAt) dt$ ;  $A = z + T$ ;  $B = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \beta$ .

Поскольку, согласно [4],

$$I(A) = \begin{cases} -B & \text{при } A < -|B|, \\ A \operatorname{sgn} B & \text{при } |A| < |B|, \\ B & \text{при } A > |B|, \end{cases}$$

то получаем

$$P(z, \beta) = \frac{C}{\sin \beta} \rho(z, \beta). \quad (9)$$

График функции  $\rho(z, \beta)$  для  $\beta > 0$  представлен на рис. 2, где  $b = -(h + a) \operatorname{tg} \alpha$ ,  $c = -a \operatorname{tg} \alpha$ ,  $d = L - B - T$ ,  $e = L - a \operatorname{tg} \alpha$ . В интервале  $-a \operatorname{tg} \alpha < z < (L - h \operatorname{tg} \beta - a \operatorname{tg} \alpha)$  имеем  $\rho(z, \beta) = h \operatorname{tg} \beta$  и

$$P(z, \beta) = \frac{Ch}{\cos \beta}. \quad (10)$$

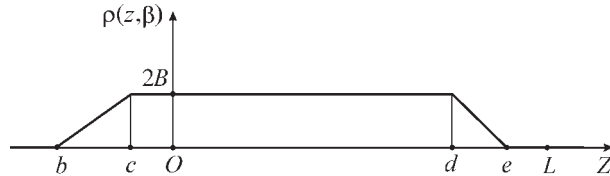


Рис. 2. График функции  $\rho(z, \beta)$  для  $\beta > 0$

При практическом применении преобразования Радона следует учесть, что в эксперименте угол  $\beta$  ограничен:  $-\beta_m \leq \beta \leq \beta_m$ , где  $\beta_m < \pi/2$ . Следовательно, для  $ha \ll L$  в области  $0 < z < L$  преобразование Радона (5) приобретает вид

$$P(z, \beta) = \frac{1}{\cos\beta} \int_{-h/2}^{h/2} f[z + y\operatorname{tg}\beta + T, y] dy = \frac{1}{\sin\beta} \int_{z + \operatorname{atg}\alpha}^{z + h\operatorname{tg}\beta + \operatorname{atg}\alpha} f\left(x, \frac{x - z - T}{\operatorname{tg}\beta}\right) dx \quad (11)$$

*Тонкостенная оболочка, нагруженная внутренним давлением.* Рассмотрим осевое сечение оболочки, изготовленной из материала с малой оптической чувствительностью. В этом случае функция  $f(x, y) = n_0 \varepsilon_r(x, y)$ , где  $n_0$  – показатель преломления;  $\varepsilon_r$  – величина радиальной деформации. Тогда из (11) получаем

$$P(z, \beta) = \frac{n_0}{\sin\beta} \int_{z'}^{z' + K} \varepsilon_r\left(x, \frac{x - z - T}{\operatorname{tg}\beta}\right) dx, \quad (12)$$

где  $K = h\operatorname{tg}\beta$ ,  $z' = z + \operatorname{atg}\alpha$ . Для тонкостенной оболочки напряжения удовлетворяют соотношению  $\sigma_r \ll \sigma_x, \sigma_\theta$ , поэтому  $\varepsilon_r = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_\theta)$ . Для длинной цилиндрической оболочки, прикрепленной к жестким торцам и нагруженной внутренним давлением  $p$ , нормальные напряжения можно представить в виде [5]

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{pr}{h} \left[ 0,5 - \frac{6(1-\mu/2)}{hr\eta^2} \frac{y}{h} \exp(-\eta x)(\cos\eta x - \sin\eta x) \right], \\ \sigma_\theta(x, y) &= \frac{pr}{h} \left[ 1 - \frac{6\mu(1-\mu/2)}{hr\eta^2} \frac{y}{h} \exp(-\eta x)(\cos\eta x - \sin\eta x) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right) \exp(-\eta x)(\cos\eta x + \sin\eta x) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\eta^2 = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{rh}$ ;  $\mu$  – коэффициент Пуассона. С учетом (13) получаем

$$\varepsilon_r(x, y) = \frac{pr}{Eh} \left\{ A + e^{-\eta x} \left[ B(\cos\eta x + \sin\eta x) + C \frac{y}{h} (\cos\eta x - \sin\eta x) \right] \right\}, \quad (14)$$

где  $A = -1,5\mu$ ;  $B = \mu(1 - \mu/2)$ ;  $C = 6 \frac{\mu(1 - \mu/2)(1 + \mu)}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}}$ . При обычном значении коэффициента Пуассона  $\mu = 0,3$  имеем  $A = -0,45$ ;  $B = 0,255$ ;  $C = 1,205$ ;  $\eta = \frac{1,285}{\sqrt{rh}}$ . Подставляя (14) в (12), находим

$$P(z, \beta) = P_0 + \frac{n_0}{\sin \beta} \frac{pr}{Eh} \left\{ B(I_1 + I_2) - \frac{C}{K} [(z+T)(I_1 - I_2) - I_3] \right\}, \quad (15)$$

где

$$P_0 = A \frac{n_0 h}{\cos \beta}; \quad I_1 = \int_{z'}^{z'+K} e^{-\eta x} \cos \eta x dx = \frac{e^{-\eta x}}{2\eta} (\sin \eta x - \cos \eta x) \Big|_{z'}^{z'+K};$$

$$I_2 = \int_{z'}^{z'+K} e^{-\eta x} \sin \eta x dx = -\frac{e^{-\eta x}}{2\eta} (\sin \eta x + \cos \eta x) \Big|_{z'}^{z'+K};$$

$$I_3 = \int_{z'}^{z'+K} x e^{-\eta x} (\cos \eta x - \sin \eta x) dx = \frac{dI_2}{d\eta} =$$

$$= \frac{e^{-\eta x}}{\eta} \left[ x \sin \eta x + \frac{1}{2\eta} (\sin \eta x + \cos \eta x) \right] \Big|_{z'}^{z'+K}.$$

Для тонких оболочек и не слишком больших углов  $\beta$  величина  $\eta K = 1,285 \sqrt{\frac{h}{r}} \operatorname{tg} \beta < 1$ , поэтому можно разложить интегралы в ряд по степеням  $(\eta K)$ . С точностью до первой степени  $(\eta K)$  формула проекции для тонкостенной оболочки с внутренним давлением имеет вид

$$P(z, \beta) = \frac{n_0 pr}{E \cos \beta} \left\{ A + e^{-\eta z'} \left[ B(\cos \eta z' + \sin \eta z' - \eta K \sin \eta z') - C \frac{\eta K}{6} \cos \eta z' \right] \right\}. \quad (16)$$

**Обратное преобразование Радона.** Преобразование Фурье функции  $P(z, \beta)$  с учетом (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \beta) \exp(-i\omega z) dz = \\ &= \frac{1}{\cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \exp[-i\omega(x - y \operatorname{tg} \beta - T)] dx dy = \frac{\exp(i\omega T)}{\cos \beta} \hat{F}(\omega_x, \omega_y), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\omega_x = \omega$ ,  $\omega_y = -\omega \operatorname{tg} \beta$ . Поскольку  $d\omega_x d\omega_y = \frac{d\beta |\omega| d\omega}{\cos^2 \beta}$ , то двумерное обратное преобразование Фурье функции  $\hat{F}(\omega_x, \omega_y)$  с учетом (17) есть

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \hat{P}(\omega, \beta) \exp(i\omega\zeta) |\omega| d\omega \frac{d\beta}{\cos\beta},$$

где  $\zeta = x - y \operatorname{tg} \beta - T$ , или

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \beta) \exp[-i\omega(z - \zeta)] dz. \quad (18)$$

Определим фокусирующую функцию

$$h(z - \zeta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp[-i\omega(z - \zeta)] d\omega \quad (19)$$

Интеграл в (19) берется из [4], в результате имеем обобщенную функцию

$$h(z - \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(z - \zeta)^2}. \quad (20)$$

Уравнение (18) с учетом (19) принимает вид

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \beta) h(z - \zeta) dz \quad (21)$$

и с учетом (20)

$$F(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z, \beta)}{(z - \zeta)^2} dz. \quad (22)$$

Формулы (18), (21), (22) восстанавливают функцию по ее проекциям и являются обратным преобразованием Радона для координат и лучей, представленных на рис. 1. Входящие в формулы величины имеют физический смысл, поэтому интегралы предполагаются сходящимися, по крайней мере, после выделения главного значения или регуляризации.

В качестве теста рассмотрим восстановление точечной функции (7) по ее проекциям (8). Подставляя (8) в (18), получаем

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{l^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos^2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp[i\omega(\zeta - \zeta_0)] d\omega = \\
&= \frac{l^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp[i\omega(x - x_0)] d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega(y - y_0)u] du, \quad (23)
\end{aligned}$$

где  $u = \operatorname{tg}\beta$ . Поскольку  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega(y - y_0)u] du = \frac{2\pi}{|\omega|} \delta(y - y_0)$ , то восстановленная функция (23) совпадает с оригиналом (7).

**Приближенное обратное преобразование.** При практическом использовании схемы рис. 1 следует учесть замечание, сделанное в связи с выражением (11). Тогда обратное преобразование Радона (21) принимает вид

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_0^L P(z, \beta) h_w(z - \zeta, \beta) dz, \quad (24)$$

где  $h_w(z - \zeta, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| w(\omega, \beta) \exp[-i\omega(z - \zeta)] d\omega$  — ограниченная

по спектру фокусирующая функция;  $w(\omega, \beta)$  — функция окна. Ограничиваясь низкочастотной составляющей изображения, полагаем, что функция проекций  $\hat{P}(\omega, \beta)$  незначительна при  $|\omega| > \Omega(\beta)$ . Выбираем частотную границу, не зависящую от направления просвечивающих лучей и определяемую обратной величиной наименьшего расстояния  $s$  между ними. Тогда расстояние между соседними лучами внутри объекта, измеренное вдоль оси  $Z$ , равно  $\Delta z = s/\cos\alpha$ , поэтому полуширина частотной полосы  $\Omega(\beta) = \pi/\Delta z = \Omega \cos\beta$ . Выберем в качестве функции окна, например, прямоугольную функцию

$$w_r(\omega, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \Omega(\beta), \\ 0 & \text{при } |\omega| > \Omega(\beta). \end{cases}$$

Тогда фокусирующая функция принимает вид [6]:

$$h_w(z, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\Omega(\beta)}^{\Omega(\beta)} |\omega| \exp(-i\omega z) d\omega = \frac{\Omega^2(\beta)}{4\pi} \left\{ 2 \frac{\sin[z\Omega(\beta)]}{z\Omega(\beta)} - \frac{\sin^2[z\Omega(\beta)/2]}{[z\Omega(\beta)/2]^2} \right\}. \quad (25)$$

Если  $h_w(z, \beta)$  известна только для эквидистантных точек  $z_m = m\Delta z$ , то фокусирующую функцию можно аппроксимировать рядом из  $\delta$ -функций:



$$h_A(z, \beta) = \Delta z \sum_{m=-N}^N h(z_m, \beta) \delta(z - z_m). \quad (26)$$

Из (25) находим значения фокусирующей функции в эквидистантных точках  $z_m$ . Поскольку  $z_m \Omega(\beta) = m\pi$ , получаем  $h(0, \beta) = \frac{\pi \cos^2 \beta}{4s^2}$ , если  $m = 0$ ;  $h(z_m, \beta) = -\frac{\cos^2 \beta}{\pi s^2 m^2}$ , если  $m$  нечетное;  $h(z_m, \beta) = 0$ , если  $m$  четное.

В результате выражение (26) можно переписать в виде

$$h_A(z - \zeta, \beta) = \frac{\pi \cos \beta}{4s} \left\{ \delta(z - \zeta) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{неч. ст.})}}^N \frac{1}{m^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \delta\left(z - \zeta - \frac{ms}{\cos \beta}\right) + \delta\left(z - \zeta + \frac{ms}{\cos \beta}\right) \right] \right\}, \quad (27)$$

где  $N \leq L/s$ . Подставляя (27) в (24), получаем приближенную форму обратного преобразования Радона:

$$f_A(x, y) = \frac{1}{4s} \left\{ K_0(x, y) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{неч. ст.})}}^N \frac{1}{m^2} [K_{+m}(x, y) + K_{-m}(x, y)] \right\}. \quad (28)$$

$$\text{Здесь } K_0(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\zeta, \beta) d\beta, \quad K_{\pm m}(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P\left(\zeta \pm \frac{ms}{\cos \beta}, \beta\right) d\beta,$$

$$\zeta(x, y, \beta) = x - y \operatorname{tg} \beta - T.$$

В качестве примера применения формулы (28) рассмотрим восстановление приближенного образа точечной функции (7). Для этого преобразуем ее проекцию (8) к виду

$$P(\zeta, \beta) = l^2 \delta[(x - x_0) \cos \beta - (y - y_0) \sin \beta] = \frac{l^2}{r} \delta(\beta - \beta_0),$$

где  $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{x - x_0}{y - y_0}$ ,  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Таким образом, с ростом  $r$  проекция убывает медленно, и если при восстановлении ограничиться лишь первым слагаемым выражения (28), то восстановленная функция будет соответствовать размытому изображению. Аналогично находим

$$P\left(\zeta + \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right) = l^2 \delta[(x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\sin\beta + ms] = \frac{l^2}{\sqrt{|r^2 - m^2 s^2|}} \delta(\beta - \beta_1),$$

где  $r \neq ms$ . Подставляя полученные выражения в (28), имеем восстановленный приближенный образ точечной функции:

$$f_A(r) = \frac{l^2}{4s} \left( \frac{1}{r} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^N \frac{1}{m^2} \frac{1}{|r^2 - m^2 s^2|^{1/2}} \right) \quad (29)$$

При  $s \rightarrow 0$  имеем  $N \sim 1/s \rightarrow \infty$ . Разлагая функцию  $|r^2 - m^2 s^2|^{-1/2}$  в ряд по степеням  $m^2 s^2 / r^2$  и удерживая первые два члена, получаем из (29), что слагаемые  $1/r$  взаимно сокращаются и остается быстропадающая функция  $f_A(r) \sim 1/r^3$ . Это означает, что реконструкция (28) дает удовлетворительное приближение к оригиналу.

Представим формулу (28) в другом виде, используя равенство  $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ . Тогда

$$f_A(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{s} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^N \frac{1}{m^2} \left\{ \left[ P(\zeta, \beta) - P\left(\zeta + \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right) \right] + \left[ P(\zeta, \beta) - P\left(\zeta - \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right) \right] \right\} d\beta.$$

Разлагая функции  $P\left(\zeta \pm \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right)$  в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми четырьмя членами ряда, а также полагая  $N \rightarrow \infty, Ns \cong L$ , приходим к приближенной реконструкции в виде

$$f_A(x, y) = -\frac{L}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{\partial^2 P(z, \beta)}{\partial z^2} \right)_{z=\zeta} \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = -\frac{L}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 P(z, u)}{\partial z^2} \right)_{z=\zeta} du \quad (30)$$

где  $L$  – длина образующей оболочки;  $u = \text{tg}\beta$ . Заметим, что выражение (30) устойчиво по отношению к выбору вида функции окна, так, оно остается неизменным, с точностью до постоянного множителя, при использовании косинусоидальной функции окна [7].

**Суммарное изображение.** При использовании преобразования Радона фильтрованная проекция в частотной области пропорциональна  $\hat{P}(\omega, \beta)|\omega|$ . Проекция равномерного распределения  $P(z, \beta) = P(\beta)$  не зависит от переменной  $z$ , в результате томограмма дает нулевое значение. Для восстановления пространственно низкочастотных объектов будем следовать подходу, изложенному в [8] и соответствующему методам классической томографии. Введем суммарное изображение в виде  $\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{P(\zeta, \beta)}{L(\beta)} d\beta$ , где  $L(\beta) = \frac{h}{\cos\beta}$  – про-

тяженность проецирующего луча через объект. Тогда

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\beta P(\zeta, \beta) d\beta. \quad (31)$$

Экспериментальное определение интеграла, входящего в (31), предлагается в работе [3]. Выражая функции  $\sigma(x, y)$  и  $P(\zeta, \beta)$  через их фурье-образы, приходим к соотношению

$$\hat{\sigma}(\omega, \beta) = \frac{2 \cos^3 \beta \exp(-i\omega T)}{h|\omega|} \hat{P}(\omega, \beta). \text{ С учетом (17) имеем}$$

$$\hat{\sigma}(\omega, \beta) = \frac{2 \cos^2 \beta}{h|\omega|} \hat{F}(\omega, \beta). \text{ Таким образом, суммарное изображение}$$

снижает разрешение объекта при больших пространственных частотах и больших углах просвечивания.

Рассмотрим некоторые частные случаи суммарного изображения.

*Точечная функция.* Используя выражение (8) для проекции точечной функции, из (31) получаем

$$\sigma(x, y) = \frac{l^2}{\pi h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta[(x - x_0) - (y - y_0) \operatorname{tg}\beta] d\beta = \frac{l^2}{\pi h} \frac{1}{r} |\cos\theta|,$$

где  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ;  $\cos\theta = (y - y_0)/r$ ;  $\theta$  – угол наблюдения, отсчитываемый от оси  $Y$ . Таким образом, при фиксированном угле наблюдения восстановленное изображение точечной функции уменьшается с расстоянием как  $1/r$ ; при  $r = \text{const}$  яркость изображения ослабевает с увеличением угла наблюдения. Если два близко расположенных на расстоянии  $\Delta r$  точечных объекта находятся вблизи линии наблюдения, то контрастность восстановления на расстоянии  $r$  от них есть  $\frac{\sigma(r_1) - \sigma(r_2)}{\sigma(r_1)} \cong \frac{\Delta r}{r}$ .

*Равномерное распределение.* Для распределения с проекцией (10) находим из (31)  $\sigma(x, y) = C$ , т. е. в данном случае суммарное изображение совпадает с оригиналом. Однако для общего случая проекций, не зависящих от переменной  $z$ , не удастся восстановить ис-

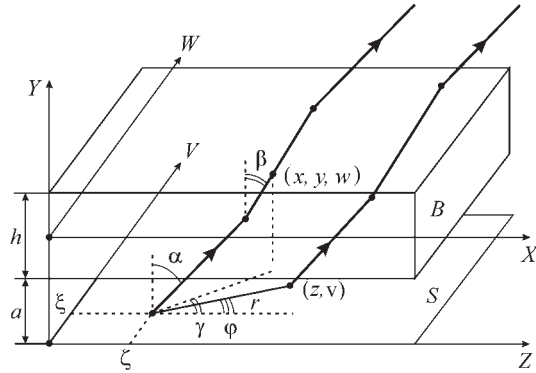


Рис. 3. Схема трехмерного просвечивания объекта B, S – светорассеивающая поверхность

ходную функцию. В этом случае необходимо выбрать другую ориентацию плоскости сечения  $(z, y)$  объекта.

*Тонкостенная оболочка, нагруженная внутренним давлением.* Для получения суммарного изображения функции  $n_0 \epsilon_r(x, y)$  подставим проекцию (16) в (31), тогда

$$\sigma(x, y) = \frac{n_0 p r}{E h} \times$$

$$\times \left\{ A + e^{-\eta x} \left\{ B [I_1 (\cos \eta x + \sin \eta x) + I_2 (\cos \eta x - \sin \eta x)] + \eta h \left[ \left( B I_4 + \frac{C}{6} I_3 \right) \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \cos \eta x + \left( B I_3 - \frac{C}{6} I_4 \right) \sin \eta x \right] \right\} \right\}, \quad (32)$$

где после замены  $\operatorname{tg} \beta = u$  под знаками интегралов имеем

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \cos(au) \frac{du}{1+u^2}, \quad I_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \sin(au) \frac{du}{1+u^2},$$

$$I_3 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \cos(au) \frac{u du}{1+u^2}, \quad I_4 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \sin(au) \frac{u du}{1+u^2},$$

$$a = \eta \left( y + \frac{h}{2} \right) = 1,285 \sqrt{h/r} \left( \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right) < 1$$

для тонких оболочек. Ограничиваясь разложением интегралов в фигурной скобке (32) степенями  $\sqrt{h/r}$  не выше первой, получаем

$I_1 = 1, I_2 = 0$ . Интегралы  $I_3, I_4$  не имеют вкладов с нулевой степенью  $\sqrt{h/r}$ , поэтому

$$\sigma(x, y) = \frac{n_0 P r}{E h} [A + e^{-\eta x} B(\cos \eta x + \sin \eta x)]. \quad (33)$$

Таким образом, в первом приближении по  $\sqrt{h/r}$  восстановленное суммарное изображение правильно воспроизводит первые два слагаемые исходной функции (14).

**Трехмерное просвечивание объекта.** Функция  $F(x, y, w)$ , определенная в трехмерном пространстве объекта, проецируется на плоскость  $(z, v)$  путем просвечивания лучами, идущими под углами  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 3), причем  $\sin \alpha = n_0 \sin \beta$ . Пренебрегая дифракцией и рефракцией внутри объекта, считаем, что луч образует ломаную линию, и если он прошел через исследуемую точку  $(x, y, w)$ , то луч вышел из точки  $z = \zeta, v = \xi$  рассеивающей поверхности  $S$ , где  $\zeta = x - y \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \gamma - T_1; \quad \xi = w - y \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \gamma - T_2; \quad T_1 = T \cos \gamma; \quad T_2 = T \sin \gamma; T = a \operatorname{tg} \alpha + (h/2) \operatorname{tg} \beta$ . Суммируя вклады всех точек объекта, через которые проходит луч, получаем функцию интегральной проекции в виде  $P(z, v, \beta, \gamma) = \int F(x, y, w) dl$ , где элемент пути

$$dl = \frac{dx}{\sin \beta \cdot \cos \gamma} = \frac{dy}{\cos \beta} = \frac{dw}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} P(z, v, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\sin \beta \cdot \cos \gamma} \int F \left[ x, \frac{x - z - T_1}{\operatorname{tg} \beta \cdot \cos \gamma}, v + (x - z) \operatorname{tg} \gamma \right] dx = \\ &= \frac{1}{\cos \beta} \int F [z + y \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \gamma + T_1, y, v + y \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \gamma + T_2] dy = \\ &= \frac{1}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \int F \left( z + \frac{w - v}{\operatorname{tg} \gamma}, \frac{w - v - T_2}{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin \gamma}, w \right) dw = \\ &= \iiint \delta[(z - x + T_1) \cos \beta + y \sin \beta \cdot \cos \gamma] \delta[v - w + (x - z) \operatorname{tg} \gamma] F(x, y, w) dx dy dw = \\ &= \frac{1}{\cos \beta} \iiint \delta(z - \zeta) \delta(v - \xi) F(x, y, w) dx dy dw. \end{aligned} \quad (34)$$

При  $\gamma = 0, v = \text{const}$  имеем просвечивание, представленное на рис. 1, при этом выражение (34) переходит в (5).

Для решения обратной задачи – восстановления значения функции  $F$  в точке  $(x, y, w)$  по ее проекциям – рассмотрим двумерное преобразование Фурье функции  $P(z, v, \beta, \gamma)$  по переменным  $z, v$ . С учетом (34) имеем

$$\hat{P}(\omega_z, \omega_v, \beta, \gamma) = \iint P(z, v, \beta, \gamma) e^{-i(\omega_z z + \omega_v v)} dz dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos\beta} \int \int \int F(x, y, w) e^{-i(\omega_z \zeta + \omega_v \xi)} dx dy dw = \\
&= \frac{\exp[iT(\omega_z \cos \gamma + \omega_v \sin \gamma)]}{\cos\beta} \hat{F}[\omega_z, -(\omega_z \cos \gamma + \omega_v \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta, \omega_v]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Трехмерное обратное преобразование Фурье функции  $\hat{F}$  есть

$$F(x, y, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \hat{F}(\omega_x, \omega_y, \omega_w) e^{i(\omega_x x + \omega_y y + \omega_w w)} d\omega_x d\omega_y d\omega_w. \quad (36)$$

Переходя от переменных  $\omega_x, \omega_y, \omega_w$  к переменным  $\omega, \beta, \gamma$ , согласно выражениям  $\omega_x = \omega \cos \gamma$ ,  $\omega_y = -\omega \operatorname{tg} \beta$ ,  $\omega_w = \omega \sin \gamma$ , вычисляем якобиан и получаем  $d\omega_x d\omega_y d\omega_w = \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} d\gamma \omega^2 d\omega$ . Теперь (36) с учетом (35)

можно представить в виде

$$F(x, y, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_0^\pi I d\gamma, \quad (37)$$

где  $I = \int \int P(z, v, \beta, \gamma) dz dv \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-i\omega A} d\omega$ ,  $A = (z - \zeta) \cos \gamma + (v - \xi) \sin \gamma$ . В

плоскости  $(z, v)$  введем полярную систему координат с центром в точке  $(\zeta, \xi)$ :  $z = \zeta + r \cos \phi$ ,  $v = \xi + r \sin \phi$ , где  $r = r(\zeta, \xi)$ , тогда  $A = r \cos(\phi - \gamma)$ ,  $dz dv = r dr d\phi$ . Поскольку  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-i\omega A} d\omega = -2\pi \delta^{(2)}(A)$ , то

$$\begin{aligned}
I &= -2\pi \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \phi, \beta, \gamma) r \frac{d^2 \delta[r \cos(\phi - \gamma)]}{d[r \cos(\phi - \gamma)]^2} dr = \\
&= -2\pi \int_0^\pi \frac{d\phi}{|\cos(\phi - \gamma)|^3} \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \phi, \beta, \gamma) r \delta^{(2)}(r) dr.
\end{aligned}$$

Используя соотношения  $r \delta^{(2)}(r) = -2\delta^{(1)}(r)$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(r) f(r) dr = -f^{(1)}(0)$ ,

приходим к выражению

$$I = -4\pi \int_0^\pi \frac{d\phi}{|\cos(\phi - \gamma)|^3} \left( \frac{\partial P(r, \phi, \beta, \gamma)}{\partial r} \right)_{r=0}.$$

В результате из (37) получаем формулу для восстановления функции по ее проекциям:

$$F(x, y, w) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_0^\pi d\gamma \int_0^\pi \frac{d\phi}{|\cos(\phi - \gamma)|^3} \left( \frac{\partial P(r, \phi, \beta, \gamma)}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (38)$$

Другой способ восстановления функций с невысокой пространственной частотой состоит в использовании трехмерного суммарного изображения

$$\Sigma(x, y, w) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\gamma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{P(\zeta, \xi, \beta, \gamma)}{L(\beta, \gamma)} d\beta,$$

где  $L(\beta, \gamma)$  – протяженность луча через объект. Для плоскопараллельного слоя  $L(\beta, \gamma) = h/\cos\beta$ , тогда

$$\Sigma(x, y, w) = \frac{1}{\pi^2 h} \int_0^\pi d\gamma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\zeta, \xi, \beta, \gamma) \cos\beta d\beta. \quad (39)$$

Рассмотрим частные случаи применения этой формулы.

Для случая равномерного распределения проекция есть  $P(z, v, \beta, \gamma) = \frac{Ch}{\cos\beta}$  и суммарное изображение (39) дает совпадение

с оригиналом.

При рассмотрении точечной функции

$F(x, y, w) = l^3 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \times \delta(w - w_0)$  имеем из (34) проекцию в виде

$$P(\zeta, \xi, \beta, \gamma) = (l^3 / \cos\beta) \delta[x - x_0 - (y - y_0) \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma] \times \\ \times \delta[w - w_0 - (y - y_0) \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\gamma].$$

Подставляя это выражение в (39), приходим к результату

$$\Sigma(x, y, w) = \frac{l^3}{\pi^2 h} \frac{1}{r^2} \frac{1}{|\operatorname{tg}\theta|},$$

где  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (w - w_0)^2$ ;

$$|\operatorname{tg}\theta| = \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (w - w_0)^2}}.$$

Таким образом, для  $\theta \neq 0$  и  $\theta \neq 90^\circ$  восстановленное изображение точки достаточно быстро убывает с удалением от места локализации как  $1/r^2$ . Заметим, что если линза создает в точке  $z = 0$  изображение точечного светящегося объекта, то яркость его изображения изменяется вдоль оптической оси по закону  $1/z^2$ . При фиксированном  $r$  яркость изображения ослабевает с ростом угла наблюдения  $\theta$ . Если два близко расположенных на расстоянии  $\Delta r$  то-

чечных объекта находятся вблизи линии наблюдения, то контрастность восстановления на расстоянии  $r$  от них есть  $\frac{\Sigma(r_1) - \Sigma(r_2)}{\Sigma(r_1)} \cong 2 \frac{\Delta r}{r}$ . Сравнивая эти результаты с результатами для

двумерного суммарного изображения, получаем, что контрастность трехмерного изображения в 2 раза выше. Следовательно, трехмерное суммарное изображение дает хорошее восстановление объекта для углов наблюдения  $0 < \theta \ll 90^\circ$ .

**Заключение.** В работе изложены и проиллюстрированы на примерах несколько подходов к томографии слоя постоянной толщины, широко распространенного в технике. Восстановления тестовой точечной функции, выполненные аналитически на основе  $2D$  приближенного преобразования Радона и  $3D$  суммарного изображения, дают хорошее качество изображения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борыняк Л. А., Краснопевцев Е. А.** Панорамная интерферометрия // Автометрия. 1998. № 2. С. 13.
2. **Гинзбург В. М., Степанов Б. М.** Голографические измерения. М.: Радио и связь, 1981. С. 58.
3. **Краснопевцев Е. А., Борыняк Л. А.** Панорамный интерферометр с максимальной апертурой // Автометрия. 1999. № 4. С. 3
4. **Брычков Ю. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
5. **Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.** Сопrotивление материалов. М., 1986. С. 533.
6. **Bracewell R. N., Riddle A. C.** Inversion of fan-beam scans in radio astronomy // Astrophysical Journ. 1967. **150**. Pt. 1. P. 427.
7. **Budinger T. F., Gullberg G. T., Huesman R. H.** Emission computed tomography // Image Reconstruction from Projections /Ed. G. T. Herman. Berlin, 1979.
8. **Вайнштейн Б. К.** Синтез проектирующих функций // ДАН СССР. 1971. **196**, № 5. С. 1072.

*Поступила в редакцию 15 марта 1999 г.*