

$$(9.10) \quad 2t \left| \frac{\partial Y}{\partial t} \right| / \left| \xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right| = O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Оценка (9.10) при  $q \rightarrow \infty$  подтверждает непротиворечивость найденного приближенного решения и в том числе корректность (9.6).

Из (1.8) и (9.6) получается  $Y'_\xi = \sqrt{4e}$  при  $\xi = 0$ , что соответствует формуле (1.10) без учета запаздывания взаимодействия. Следовательно, закон растекания (1.10) остается в силе, если в области больших толщин важно запаздывание взаимодействия.

Укажем на существенную роль лагранжева описания задачи Стефана [9, 10] для полученного приближенного решения неавтономной задачи с учетом запаздывания взаимодействия.

Таким образом, закон движения линии смачивания при растекании пленки от неподвижного поршня (п. 1) является асимптотикой для целого ряда основных задач (пп. 2—9) растекания тонких пленок. Следовательно, зависимость  $u_* \sqrt{t} = \text{const}$  (1.10) в определенном смысле универсальная.

Отметим, что коэффициент в законе растекания, найденный экспериментально, может служить источником дополнительной информации о силах Ван-дер-Ваальса и граничном условии при смачивании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса. — М.: Наука, 1988.
2. Воинов О.В. Волновые движения в слое вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активных веществ // ПМТФ. — 1971. — № 3. — С. 81—89.
3. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Colloid Int. Sci. — 1971. — V. 35, N 1. — P. 85—101.
4. Воинов О.В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. — 1977. — № 2. — С. 92—99.
5. Hervet H., de Gennes P.G. The dynamics of wetting of "dry" solid // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. II. — 1984. — T. 299, N 9. — P. 499—503.
6. Lopez J., Miller C.A., Ruckenstein E. Spreading kinetics of liquid drops on solids // J. Colloid Int. Sci. — 1976. — V. 56, N 3. — P. 460.
7. Bascom W.D., Cottington R.L., Singletary C.R. Dynamic surface phenomena in the spontaneous spreading of oils on solids // Contact angles, wettability and adhesion / Ed. E.W. Fowkes. — Washington: D.C., Amer. Chem. Soc., 1964.
8. Воинов О.В. Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1976. — № 5. — С. 76—84.
9. Мейрманов А.М., Пухначев В.В. Лагранжевы координаты в задаче Стефана // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1980. — Вып. 47. — С. 90—111.
10. Пухначев В.В. Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // ДАН СССР. — 1987. — Т. 294, № 3. — С. 535—538.

г. Тюмень

Поступила 4/1 1994 г.

УДК 532.516

В.Н. Старовойтов

#### МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

В данной работе рассматривается известная в математической гидродинамике задача об определении движения двух несмешивающихся вязких жидкостей, граница раздела которых обладает поверхностным натяжением. В классической постановке наличие поверхностного натяжения означает, что на границе раздела  $\Gamma$  выполняется условие [1—3]

$$[P < n > ] = \sigma kn,$$

где  $P$  — тензор напряжений;  $n$  — вектор нормали к  $\Gamma$ ;  $k$  — средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ;  $\sigma$  — постоянная; скобки  $[ \cdot ]$  означают скачок функции при переходе через  $\Gamma$ .

Разрешимость данной задачи доказана лишь «в малом», т.е. либо на достаточно малом промежутке времени, либо в окрестности точного решения. В связи с этим использование классической постановки при численном моделировании может привести к недоразумениям. Имеет смысл поискать постановки, близкие к классической с механической, а возможно, и с математической точки зрения, которые допускали бы решение «в целом». Это и является целью данной работы.

Предлагаемая здесь модель учитывает взаимную диффузию жидкостей, а также, несмотря на то что граница раздела «размазывается», эффект поверхностного натяжения.

1. Вывод модели. Пусть в некотором объеме  $\Omega$  находится смесь двух несжимаемых жидкостей. Положим для простоты плотности обеих жидкостей равными единице. Распределение компонентов смеси по объему будем определять через задание их концентраций. Пусть  $\varphi$  — концентрация одной из жидкостей. Следуя [4, 5], определим плотность свободной энергии следующим образом:

$$(1.1) \quad f = f(T, \varphi, \nabla\varphi) = w(T, \varphi) + \frac{\alpha}{2} |\nabla\varphi|^2.$$

Здесь  $T$  — температура;  $w(T, \varphi)$  — плотность свободной энергии однородного раствора;  $\alpha$  — положительная постоянная.

Будем предполагать процесс изотермическим, поэтому температура  $T$  играет роль параметра. Тем не менее выбор того или иного значения  $T$  играет существенную роль. Дело в том, что в реальных растворах  $w$  является выпуклой по  $\varphi$  функцией, если температура выше некоторого критического уровня  $T_c$ . Если  $T < T_c$ , у функции  $w$  появляется участок невыпуклости [5—7]. Для значений концентрации из этого участка коэффициент диффузии отрицателен, и происходит явление так называемой восходящей диффузии, когда компоненты смеси стремятся разделиться.

Слагаемое  $\alpha/2 |\nabla\varphi|^2$  вносит в систему своего рода поверхностное натяжение. Действительно, пусть у нас имеется частица жидкости, занимающая область  $V_1 = \{0 \leq x_k \leq 1, k = 1, 2, 3\}$ , и концентрация  $\varphi$  зависит только от  $x_1$ , т.е. вектор  $\nabla\varphi$  направлен вдоль оси  $x_1$ . Растянем частицу вдоль оси  $x_2$  в 2 раза, сохраняя при этом ее объем неизменным. Пусть

$$F_i = \int \int \int_{V_i} f dx_1 dx_2 dx_3 \quad (i = 1, 2)$$

— свободные энергии жидкости до и после деформации,  $V_2 = \{0 \leq x_1 \leq 1/2, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 1\}$  — область, занимаемая жидкостью после деформации. Тогда

$$\begin{aligned} F_1 &= \int \int \int_{V_1} \left( w(\varphi(x)) + \frac{\alpha}{2} |\nabla_x \varphi|^2 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left( w(\varphi(y)) + \frac{\alpha}{8} |\nabla_y \varphi|^2 \right) dy_1 dy_2 dy_3, \\ F_2 &= \int_0^{1/2} \int_0^2 \int_0^1 \left( w(\varphi(y)) + \frac{\alpha}{2} |\nabla_y \varphi|^2 \right) dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned}$$

Видно, что  $F_2 > F_1$ , т.е. при растяжении вдоль изолиний концентрации свободная энергия увеличивается, чему система должна «сопротивляться».

Приступим к описанию модели. В рамках односкоростного подхода концентрация  $\varphi$  должна удовлетворять уравнению

$$(1.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div} \mathbf{j},$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость макроскопического движения жидкости;  $\mathbf{j}$  — вектор диффузионного потока. Согласно теории Кана и Хилларда [5—7], диффузионный поток пропорционален градиенту обобщенного химического потенциала  $\theta$ :

$$(1.3) \quad \mathbf{j} = \beta \nabla \theta,$$

который, в свою очередь, есть функциональная производная свободной энергии:

$$(1.4) \quad \theta = -\alpha \Delta \varphi + w'(\varphi)$$

(штрих означает производную по аргументу).

Условие несжимаемости жидкости предполагает

$$(1.5) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Наконец, уравнение импульса записывается стандартным образом:

$$(1.6) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{g}.$$

Здесь  $\mathbf{g}$  — вектор внешней массовой силы.

Нам осталось уточнить вид тензора напряжений. Воспользуемся для этого методом виртуальной мощности. Сначала предположим, что силы вязкого трения отсутствуют. Пусть  $\omega$  — произвольный объем жидкости,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  — векторное поле на  $\omega$  (поле виртуальной скорости) такое, что  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ,  $\mathbf{u}|_{\omega} = 0$ . Тогда отображение  $\mathbf{h}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$  задает при достаточно малых  $t > 0$  некоторую внутреннюю деформацию жидкой частицы  $\omega$ . Мощность напряжений, вызывающих эту деформацию, в момент  $t = 0$  можно вычислить двумя способами:

$$N(\mathbf{u}) = - \int_{\omega} P_0 : D(\mathbf{u}) d\mathbf{x}$$

( $P_0$  — тензор напряжений без вязкого трения,  $D(\mathbf{u})$  — тензор скоростей деформации с компонентами  $D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ );

$$N(\mathbf{u}) = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \left( w(\varphi(\mathbf{h}_t(\mathbf{x}))) + \frac{\alpha}{2} |\nabla(\varphi(\mathbf{h}_t(\mathbf{x})))|^2 \right) d\mathbf{x} \Big|_{t=0} =$$

$$= \int_{\omega} (w'(\varphi) \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} + \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla(\nabla \varphi \cdot \mathbf{u})) d\mathbf{x} = \int_{\omega} \alpha (\nabla \varphi \otimes \nabla \varphi) : D(\mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Приравняв друг к другу оба выражения для мощности, в силу произвольности функции  $\mathbf{u}$  получим

$$\operatorname{div} P_0 = \operatorname{div}(-\alpha (\nabla \varphi \otimes \nabla \varphi) + S)$$

( $S$  — произвольный шаровой тензор, возникающий из-за того, что  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ). Нам удобно взять  $S = -pI + \alpha |\nabla \varphi|^2 I$ , где  $I$  — единичный тензор,  $p$  — давление. Так как в уравнение (1.6) входит только дивергенция тензора напряжений, можно считать, что

$$P_0 = -\alpha (\nabla \varphi \otimes \nabla \varphi) + S.$$

Добавляя к  $P_0$  напряжения вязкого трения, имеем

$$(1.7) \quad \mathbf{P} = -pI + 2\mu D(\mathbf{v}) + \alpha (|\nabla \varphi|^2 I - \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi)$$

( $\mu$  — коэффициент вязкости).

Заметим, что последнее слагаемое в (1.7) является оператором проектирования на плоскость, касательную к поверхности уровня функции  $\varphi$ . Это слагаемое и отвечает за поверхностное натяжение.

Уравнения (1.2)—(1.7) образуют замкнутую модель. Что касается функции  $w$ , то ее зависимость от  $\varphi$  определяется свойствами конкретно взятой среды. В дальнейшем удобнее считать, что  $\varphi$  — не концентрация, а фазовая функция, которая линейно зависит от концентрации и равна  $-1$ , если концентрация равна нулю, и  $1$ , если концентрация равна  $1$ . Вид уравнений при этом, конечно, не изменится. Будем рассматривать систему при температуре ниже критической, т.е. когда функция  $w(\varphi)$  невыпуклая. Мотивация такого выбора приведена ниже. Для определенности положим

$$(1.8) \quad w(\varphi) = \gamma^{-1}W(\varphi) = \gamma^{-1}(\varphi^2 - 1)^2,$$

где  $\gamma$  — константа, характеризующая степень смешиваемости двух жидкостей. Действительно, если свободная энергия  $F$  жидкости, находящейся в объеме  $\Omega$ , ограничена константой  $C$ , то

$$\gamma^{-1} \int_{\Omega} W(\varphi) dx \leq C.$$

Отсюда следует, что мера множества  $D_k = \{x \in \Omega: W(\varphi(x)) > k\}$  оценивается как

$$\text{mes} D_k \leq C\gamma/k$$

для любой константы  $k > 0$ . Видно, что  $\text{mes} D_k \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow 0$ , т.е. мера множества, где значение  $|\varphi|$  отлично от  $1$ , стремится к нулю при  $\gamma \rightarrow 0$ . Таким образом, при значениях  $\gamma$ , близких к нулю, жидкости почти не смешиваются. Следовательно, исходя из того, что мы хотим построить модель, приближенно описывающую движение несмешивающихся жидкостей, выбор функции  $w$  в виде (1.8) оправдан.

**З а м е ч а н и е.** Вообще говоря, функция  $W$  определена лишь на отрезке  $[-1, 1]$ . Вне этого отрезка ее можно считать равной  $+\infty$ . Это вносит некоторые осложнения, связанные с ее дифференцированием. Предположим, что функция  $W$  имеет вид (1.8) на всей числовой оси. Это не является слишком большим допущением, если значение  $\gamma$  достаточно мало.

Модели, подобные предложенной здесь, уже исследовались для описания процесса чистой диффузии без переноса [7], а также фазовых переходов [8—11].

2. Проведем формальный асимптотический анализ предложенной модели. Запишем систему (1.2)—(1.8) в безразмерных переменных. Предположим, что в рассматриваемом движении существуют характерные масштабы длины  $l$  и скорости  $V$ . Введем новые независимые переменные

$$x' = l^{-1}x, \quad t' = l^{-1}Vt$$

и новые искомые функции

$$v' = V^{-1}v, \quad p' = l(V\mu)^{-1}p, \quad \theta' = l(V\mu)^{-1}\theta.$$

Тогда уравнения преобразуются к виду

$$\text{Re} \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + (v' \cdot \nabla') v' \right) = -\nabla' p' + \Delta' v' + A \text{div}(|\nabla \varphi|^2 I - \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi) + g,$$

$$\text{div} v' = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t'} + (v' \cdot \nabla') \varphi = B \Delta' \theta',$$

$$-A \Delta' \varphi + C^{-1} W'(\varphi) - \theta' = 0,$$

где  $\text{Re} = V\mu^{-1}$ ;  $A = \alpha(lV\mu)^{-1}$ ;  $B = \beta\mu l^{-1}$ ;  $C = \gamma V\mu l^{-1}$ .

Пусть  $\varepsilon$  — положительный малый параметр. Приняв  $\text{Re} = 1$ ,  $A = B = \varepsilon$ ,  $C = c\varepsilon$  ( $c$  — постоянная), перепишем систему:

$$(2.1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = \text{div} T + \varepsilon \text{div}(|\nabla \varphi|^2 I - \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi) + g,$$

$$T = -pI + 2D, \quad \text{div} v = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi = \varepsilon \Delta \theta,$$

$$-\varepsilon \Delta \varphi + \frac{c}{\varepsilon} W'(\varphi) - \theta = 0.$$

Предположим, что существует решение данной задачи и все функции, образующие это решение, дифференцируемы нужное число раз.

Рассмотрим случай двух пространственных переменных, так как размерность не имеет принципиального значения.

Определим кривую  $\Gamma(t) = \{(x,y): \varphi(x,y,t) = 0\}$  ( $x, y$  — декартовы координаты на плоскости). Будем считать, что  $\Gamma(t)$  обладает достаточной гладкостью. В окрестности кривой  $\Gamma(t)$  можно определить функцию

$$r(x,y,t) = \text{signdist}((x,y), \Gamma(t)),$$

т.е.  $r$  — расстояние от точки до  $\Gamma(t)$ , взятое с отрицательным знаком с одной стороны  $\Gamma$  и с положительным с другой. Тогда  $|\nabla r| = 1$ ,  $\Delta r = k$  ( $k$  — средняя кривизна линии уровня функции  $r$ ).

Представим все входящие в модель функции в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ , причем будем использовать различные разложения внутри и вне некоторой окрестности кривой  $\Gamma(t)$ , а потом склеим их.

*Внешние разложения* имеют вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varphi(x,y,t,\varepsilon) &= \varphi_0(x,y,t) + \varepsilon \varphi_1(x,y,t) + \varepsilon^2 \dots, \\ \theta(x,y,t,\varepsilon) &= \theta_0(x,y,t) + \varepsilon \theta_1(x,y,t) + \varepsilon^2 \dots, \\ v(x,y,t,\varepsilon) &= v_0(x,y,t) + \varepsilon v_1(x,y,t) + \varepsilon^2 \dots, \\ T(x,y,t,\varepsilon) &= T_0(x,y,t) + \varepsilon T_1(x,y,t) + \varepsilon^2 \dots, \\ p(x,y,t,\varepsilon) &= p_0(x,y,t) + \varepsilon p_1(x,y,t) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

*Внутренние разложения.* Введем в окрестности кривой  $\Gamma(t)$  локальные координаты  $(r, s)$ , где  $s$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль  $\Gamma(t)$  от некоторой фиксированной точки. Растянем эту окрестность, заменив  $r$  новой координатой  $\rho = r/\varepsilon$ . Тогда

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varphi(x,y,t,\varepsilon) &= \Phi(\rho,s,t,\varepsilon) = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \dots, \\ \theta(x,y,t,\varepsilon) &= \Xi(\rho,s,t,\varepsilon) = \Xi_0 + \varepsilon \Xi_1 + \varepsilon^2 \dots, \\ v(x,y,t,\varepsilon) &= V(\rho,s,t,\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \dots, \\ T(x,y,t,\varepsilon) &= \Lambda(\rho,s,t,\varepsilon) = \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \dots, \\ p(x,y,t,\varepsilon) &= \Psi(\rho,s,t,\varepsilon) = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

Подставляя разложения (2.2) в систему (2.1) и выделяя члены порядка  $O(1)$ , получим

$$(2.4a) \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \varphi_0 = 0;$$

$$(2.4б) \quad W'(\varphi_0) = 0;$$

$$(2.4в) \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) v_0 = \text{div} T_0 + g;$$

$$(2.4г) \quad \text{div} v_0 = 0;$$

$$(2.4д) \quad T_0 = -p_0 I + 2D_0.$$

Здесь

$$D_{0ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \right).$$

Заметим, что из (2.4б) следует, что  $\varphi_0$  может принимать значения  $\pm 1$  и  $0$ . Но  $\varphi_0 \neq 0$ , так как если  $\varphi_0 = 0$  в некоторой точке, то эта точка

принадлежит кривой  $\Gamma(t)$ , а разложения (2.2) выписывались вне некоторой окрестности  $\Gamma(t)$ .

Рассмотрим теперь внутренние разложения. Запишем уравнения (2.1) в окрестности  $\Gamma(t)$  в локальных координатах:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon V_r + V_\rho(r_t + V \cdot \nabla r) + \varepsilon V_s(s_t + V \cdot \nabla s) = \\ = \Lambda_\rho \nabla r + \varepsilon \Lambda_s \nabla s - \Phi_\rho^2 \operatorname{div}(\nabla r \otimes \nabla r) - \\ - \varepsilon \Phi_\rho \Phi_s \operatorname{div}(\nabla r \otimes \nabla s + \nabla s \otimes \nabla r) - (\frac{\Phi_\rho}{\rho} \frac{\Phi_s}{s})_\rho \nabla s - \\ - \varepsilon (\Phi_\rho \Phi_s)_s \nabla r - \varepsilon^2 \Phi_s^2 \operatorname{div}(\nabla s \otimes \nabla s) - \\ - \varepsilon^2 (\Phi_s^2)_s |\nabla s|^2 \nabla s + (\Phi_\rho^2)_s \nabla s + \\ + \varepsilon (\Phi_s^2)_\rho |\nabla s|^2 \nabla r + (\Phi_s^2)_\rho |\nabla s|^2 \nabla s + \varepsilon g; \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \Phi_r + \varepsilon \Phi_\rho(r_t + V \cdot \nabla r) + \varepsilon^2 \Phi_s(s_t + V \cdot \nabla s) = \\ = \Xi_{\rho\rho} + \varepsilon \Xi_\rho \nabla r + \varepsilon^2 |\nabla s|^2 \Xi_s + \varepsilon^2 \Delta s \Xi_s; \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} -\varepsilon \Xi = \Phi_{\rho\rho} + \varepsilon \Delta r \Phi_\rho + \varepsilon^2 |\nabla s|^2 \Phi_s + \\ + \varepsilon^2 \Delta s \Phi_s - cW'(\Phi); \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon \Lambda = -\varepsilon \Psi I + 2(V_\rho \otimes \nabla r + \nabla r \otimes V_\rho) + \\ + 2\varepsilon(V_s \otimes \nabla s + \nabla s \otimes V_s). \end{aligned}$$

Обозначим  $u = r_t$ ,  $n = \nabla r$ ,  $\tau = \nabla s$ ,  $k = \Delta r$  и разложим эти функции в ряд по степеням  $r$ :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u(r,s) &= u_0(s) + \varepsilon u_1(s)\rho + \varepsilon^2 \dots, \\ n(r,s) &= n_0(s) + \varepsilon n_1(s)\rho + \varepsilon^2 \dots, \\ \tau(r,s) &= \tau_0(s) + \varepsilon \tau_1(s)\rho + \varepsilon^2 \dots, \\ k(r,s) &= k_0(s) + \varepsilon k_1(s)\rho + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

( $u_0$ ,  $n_0$ ,  $k_0$  — скорость в направлении нормали, нормаль и средняя кривизна поверхности  $r = 0$ ).

Подставим разложения (2.3), (2.9) в уравнения (2.5)–(2.8) и оставим члены порядка  $O(1)$ :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} V_\rho(u_0 + V_0 \cdot n_0) = \Lambda_\rho \cdot n_0 - \Phi_\rho^2 k_0 n_0 - \\ - (\Phi_\rho \Phi_{0s})_\rho \tau_0 + (\Phi_\rho^2)_s \tau_0; \\ \Xi_{\rho\rho} = 0; \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \Phi_{\rho\rho} - cW'(\Phi_0) = 0;$$

$$(2.12) \quad V_\rho \otimes n_0 + n_0 \otimes V_\rho = 0.$$

Здесь было учтено, что  $\operatorname{div}(\nabla r \otimes \nabla r) = \Delta r \nabla r$ , так как  $|\nabla r| = 1$ .

Из (2.12) следует

$$(2.13) \quad V_\rho = 0.$$

Воспользуемся теперь условием склейки асимптотических разложений:

$$(2.14a) \quad \Phi_0|_{\rho = \pm \infty} = \varphi_0(\Gamma_\pm);$$

$$(2.14б) \quad \Lambda_0|_{\rho = \pm \infty} = T_0(\Gamma_\pm);$$

$$(2.14в) \quad V_0|_{\rho = \pm \infty} = v_0(\Gamma_\pm)$$

( $f(\Gamma_\pm)$  означает след функции  $f$  на поверхности  $\Gamma$  слева и справа). Из (2.4б) и (2.14а) можно сделать вывод, что

$$(2.15) \quad \Phi_0|_{\rho = \pm \infty} = \pm 1.$$

Решая уравнение (2.11) с условиями на бесконечности (2.15), находим  
(2.16) 
$$\Phi_0 = \text{th}(\rho\sqrt{2c}).$$

Кроме того, получаем, что  $\Phi_0$  не зависит от  $s$ , что вместе с (2.10) и (2.13) дает

$$\Lambda_{0\rho} n_0 - \Phi_0^2 k_0 n_0 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $\rho$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим

$$(\Lambda_0|_{\rho=+\infty} - \Lambda_0|_{\rho=-\infty}) n_0 = \sigma k_0 n_0,$$

где

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0^2 d\rho = 1/(3\sqrt{2c}).$$

Используя (2.14б), из последнего равенства находим

$$(2.17) \quad (T_0(\Gamma_+) - T_0(\Gamma_-)) n_0 = \sigma k_0 n_0.$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Он зависит от свойств конкретно взятой среды (в нашем случае от вида функции  $\psi$ ).

Далее, в силу (2.13)  $V_0$  не зависит от  $\rho$ , поэтому

$$V_0|_{\rho=+\infty} - V_0|_{\rho=-\infty} = 0,$$

и, как следует из (2.14в),

$$(2.18) \quad v_0(\Gamma_+) - v_0(\Gamma_-) = 0.$$

Система уравнений (2.4) вместе с условиями (2.17), (2.18) на границе раздела  $\Gamma$  дает классическую постановку задачи о движении двух несмешивающихся жидкостей, разделенных поверхностью, обладающей поверхностным натяжением.

Проведенный нами асимптотический анализ показывает, что классическая постановка задачи является нулевым приближением к модели (2.1). Конечно, рассуждения этого пункта ни в коей мере не могут претендовать на строгость, но они вселяют надежду на то, что модель (2.1) с достаточной точностью может быть использована в практических расчетах.

Работа поддержана по гранту ЗН—206—93 Санкт-Петербургского конкурсного центра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Солонников В.А. О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1986. — Т. 152. — С. 137—157.
2. Денисова И.В. Движение капли в потоке жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1989. — Вып. 93.
3. Старовойтов В.Н. Разрешимость задачи о движении жидкости с межфазной границей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1990. — Вып. 95.
4. Cahn J.W., Hillard J.E. Free energy of a non-uniform system. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 28. — P. 258—266.
5. Cahn J.W. On spinodal decomposition // Acta Metallurgica. — 1961. — V. 9, N 9. — P. 795—801.
6. Скрипов В.П., Скрипов А.В. Спинодальный распад // Успехи физ. наук. — 1979. — Т. 128, вып. 2. — С. 193—231.
7. Elliot C.M. The Cahn-Hilliard model for the kinetics of phase separation // Intern. Ser. of Numer. Math. — 1989. — V. 88. — P. 35—73.
8. Caginalp G. Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 39, N 11. — P. 5887—5896.
9. Caginalp G. An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1986. — V. 92. — P. 205—245.

10. Plotnikov P.I., Starovoitov V.N. Stefan problem with surface tension as a limit of the phase field model // Free boundary problems in continuum mechanics: Intern. Conf., Novosibirsk, 1991. — Basel u.a., 1992. — P. 263—270. — (Intern. Ser. of Numer. Math; V. 106).
11. Плотников П.И., Старовойтов В.Н. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 3. — С. 461—471.

г. Новосибирск

Поступила 1/X 1993 г.,  
в окончательном варианте — 11/1 1994 г.

УДК 532.526.4:532.526.3

С.И. Шпак

### МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДОТРЫВНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Среди большого количества методов расчета двумерных турбулентных пограничных слоев (см., например, [1—6]) предлагаемая в [7] модель турбулентной вязкости для расчета двумерных турбулентных пограничных слоев выделяется тем, что она протестирована на большом количестве экспериментальных данных. Большинство из этих экспериментов выбраны Стэнфордской конференцией [8] в качестве контрольных для сопоставления результатов численных исследований турбулентных пограничных слоев. Тестовые расчеты в [7] проведены для течений в широком диапазоне изменения положительных и отрицательных градиентов давления, параметров проницаемости (вдув и отсос), шероховатости, теплообмена, чисел Маха и Рейнольдса, включая зону перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному. Кроме того, данная модель весьма успешно применялась при расчетах отрывных течений в угловых конфигурациях в рамках задачи вязко-невязкого взаимодействия [9]. Все это позволяет сделать вывод, что эта модель турбулентной вязкости является одной из лучших в классе алгебраических моделей при расчетах двумерных течений. Трехмерные турбулентные пограничные слои — предмет многочисленных экспериментальных и расчетно-теоретических исследований. Анализ таких течений посвящен, например, симпозиум, проведенный в Западном Берлине в 1982 г. [5]. Особое внимание на нем уделялось экономичным методам расчета характеристик трехмерных пограничных слоев, успешно применяемым на практике. Отмечалось также, что имеется ограниченное количество экспериментальной информации, пригодной для тестирования численных исследований пространственных турбулентных течений. Расчет трехмерных течений требует для своей реализации максимально возможных ресурсов ЭВМ, и усложнение задачи использованием дифференциальных моделей турбулентности не всегда оправдано. Поэтому в данной работе проведена проверка работоспособности алгебраической модели турбулентной вязкости [7] в условиях пространственных пограничных слоев.

Система уравнений пространственного турбулентного пограничного слоя в ортогональной системе координат имеет вид

$$(1) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - j \frac{\rho w^2}{x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y};$$

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

© С.И. Шпак, 1994