УДК 533

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ПОЛНЫМ ДАВЛЕНИЕМ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ИДЕАЛЬНОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ

С. В. Головин[*,**], М. Н. Дудник[**]

[*] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
[**] Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: golovin@hydro.nsc.ru, mariyadudnik@mail.ru

Построены точные решения уравнений идеальной магнитогидродинамики, описывающие класс нестационарных движений электропроводной жидкости с постоянным полным давлением. Решения записаны в лагранжевой системе координат, произвол в выборе которой использован для параметризации магнитных силовых линий. Широкий функциональный произвол в решениях позволяет существенно варьировать картину описываемых движений жидкости. Приведен пример нестационарного течения идеальной электропроводной жидкости в цилиндрическом канале с фиксированными магнитными трубками.

Ключевые слова: магнитогидродинамика, точные решения, постоянное полное давление.

В настоящей работе рассматриваются точные решения, описывающие класс нестационарных струйных течений идеальной несжимаемой бесконечно проводящей жидкости в приближении магнитогидродинамики (МГД). Точные решения выделяются наличием требования постоянства полного давления $P = p + B^2/2$. Решения такого вида исследовались в работах [1–3]. Основной идеей, позволяющей конструктивно описать данный класс решений, является использование специальной криволинейной системы координат, в которой магнитные линии и траектории частиц играют роль координатных линий. Данную систему координат можно также трактовать как лагранжевы координаты, в которых произвол в нумерации частиц в начальном состоянии использован для специальной параметризации магнитных линий, "вмороженных" в течение жидкости. В криволинейных координатах уравнения МГД частично интегрируются и сводятся к нелинейному векторному закону изменения импульса и скалярному интегралу Коши, выражающему несжимаемость жидкости и магнитного поля. При построении решений с постоянным полным давлением закон изменения импульса линеаризуется, и общее решение уравнения задается двумя произвольными векторными функциями, зависящими от разных аргументов. Основной сложностью, возникающей при нахождении решений полной системы, является удовлетворение скалярному интегралу Коши. В этой системе необходимо разделить

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-0026-а), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2133.2014.1), а также Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 2012-1.5-8503).

переменные и проинтегрировать полученные системы переопределенных уравнений. В работе [3] проведено исследование аналогичной задачи для стационарных решений. Исследование решений с постоянным полным давлением в нестационарном случае не выполнено вследствие сложности задачи.

В данной работе предложена классификация точных решений некоторого специального вида. Получены точные решения, обладающие значительным произволом, содержащим две функции двух аргументов и две функции одного аргумента. Большую роль в проведенном анализе играют преобразования эквивалентности получаемых систем уравнений, позволяющие избавиться от несущественных произвольных функций и констант. Рассмотрен вопрос о точных решениях скалярного уравнения, выражающего условия несжимаемости сплошной среды и магнитного поля. По аналогии с плоскими течениями несжимаемой жидкости построено решение, описывающее нестационарное течение жидкости с фиксированными магнитными трубками.

1. Предварительные сведения. В безразмерных переменных уравнения идеальной магнитной гидродинамики имеют вид [1]

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \qquad \rho(\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{B}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \nabla p = 0, \\ \boldsymbol{B}_t = \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости частицы; $\boldsymbol{B}$ — напряженность магнитного поля; ρ — плотность жидкости; p — давление; нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной. Плотность жидкости предполагается постоянной: $\rho = \mathrm{const}$. Далее целесообразно использовать функцию $P = p + |\boldsymbol{B}|^2/2$, называемую полным давлением.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4(t,\boldsymbol{x})$ введем криволинейную систему координат $(t,\boldsymbol{\xi})$, определяемую для каждого фиксированного t диффеоморфизмом $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}(t,\boldsymbol{\xi})$. Потребуем, чтобы t- и ξ^1-координатные кривые совпадали с траекториями частиц и магнитными силовыми линиями:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial t}, \qquad \frac{\boldsymbol{B}}{\rho} = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^1}. \tag{1.2}$$

Совместность системы (1.2) с неизвестным вектором $\boldsymbol{\gamma}$ при заданных $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{B}$ гарантируется уравнением индукции (третье уравнение в (1.1)). Координаты ξ^2 и ξ^3 не фиксируются и могут выбираться произвольно с учетом невырожденности криволинейной системы координат. Указанный произвол в выборе координат ξ^2, ξ^3 является преобразованием эквивалентности для полученной ниже системы уравнений. Построенная криволинейная система координат является частным случаем лагранжевой системы координат, в которой произвол в нумерации частиц в начальном состоянии использован для специальной параметризации магнитных линий (подробнее об этом см. [2]).

Представление течения в выбранных координатах позволяет явно описать геометрию течения для заданной функции $\boldsymbol{\gamma}$. Действительно, траектория частицы, находящейся в момент времени $t = 0$ в положении $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}(0,\boldsymbol{\xi}_0)$, задается явно параметрической формулой $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t,\boldsymbol{\xi}_0)$. Магнитные линии параметризуются координатой ξ^1. В произвольный момент времени t_0 уравнение для магнитной линии имеет вид $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{\gamma}(t_0,s,\xi_2,\xi_3)$.

В силу системы уравнений (1.1), учитывая ограничения (1.2) и используя преобразования эквивалентности, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial^2\xi^1} + \frac{\partial P}{\partial\xi^1}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^2}\times\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^3}\Big) + \frac{\partial P}{\partial\xi^2}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^3}\times\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^1}\Big) + \frac{\partial P}{\partial\xi^3}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^1}\times\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^2}\Big) = 0; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^1}\cdot\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^2}\times\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}}{\partial\xi^3}\Big) = 1. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.3) представляет собой нелинейный закон изменения импульса, а уравнение (1.4) является интегралом Коши и эквивалентно условию несжимаемости векторных полей $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{B}$. Предварительное исследование нелинейной системы уравнений (1.3), (1.4) для неизвестных $\boldsymbol{\gamma}(t,\boldsymbol{\xi})$, $P(t,\boldsymbol{\xi})$ проведено в [2]. Там же показано, что данная система обладает классом решений, в котором полное давление сохраняет постоянное значение во всей области течения: $P = \text{const}$. В этом случае система уравнений (1.3), (1.4) сводится к следующей:

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}}{\xi^{1\,2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma}(t-\xi^1,\xi^2,\xi^3) + \boldsymbol{\tau}(t+\xi^1,\xi^2,\xi^3); \tag{1.5}$$

$$(-\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\tau}_1)\cdot((\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\tau}_2)\times(\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\tau}_3)) = 1. \tag{1.6}$$

Здесь нижние индексы i у функций $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ означают производные по i-му аргументу. Явное решение уравнения (1.5) содержит две произвольные векторные функции $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$, зависящие от разных наборов аргументов. Ограничение на них задается нелинейным скалярным уравнением (1.6), в котором необходимо выполнить разделение переменных и проинтегрировать полученные переопределенные системы дифференциальных уравнений.

Найти общее решение уравнения (1.6) не удается вследствие сложности задачи: в развернутом виде скалярное уравнение (1.6) содержит 48 слагаемых, каждое из которых является произведением двух множителей, зависящих от разных переменных: $t-\xi^1$ и $t+\xi^1$, а также ξ^2 и ξ^3. В настоящей работе приведено описание некоторого специального класса решений уравнения (1.6).

2. Специальный класс решений. Рассмотрим случай, в котором функция $\boldsymbol{\sigma}$ зависит только от переменных $t-\xi^1$ и ξ^2, а функция $\boldsymbol{\tau}$ — от переменных $t+\xi^1$ и ξ^3:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t-\xi^1,\xi^2), \qquad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t+\xi^1,\xi^3).$$

Подставляя функции такого вида в уравнения (1.6), получаем

$$-\boldsymbol{\tau}_3\cdot(\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2) + \boldsymbol{\sigma}_2\cdot(\boldsymbol{\tau}_3\times\boldsymbol{\tau}_1) = 1. \tag{2.1}$$

В этом случае уравнение (1.6) значительно упрощается: в его левой части содержится только 12 слагаемых. Будем искать решения с точностью до преобразований эквивалентности, которые позволяют избавиться от несущественного произвола входящих в решение произвольных функций:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} + 2t\boldsymbol{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + (t-\xi^1)\boldsymbol{\alpha}, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} + (t+\xi^1)\boldsymbol{\alpha}; \tag{2.2}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}, \qquad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\beta}. \tag{2.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — некоторые постоянные векторы. Отметим, что преобразование (2.2) соответствует преобразованию Галилея, допускаемому системами уравнений (1.1) и (1.3), (1.4). Преобразование (2.3) является следствием представления решения (1.5).

3. Лемма Овсянникова о разделении переменных. Заметим, что уравнение (2.1) можно записать в виде равенства единице скалярного произведения двух векторов в $\mathbb{R}^6$, зависящих от разных наборов аргументов:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 1. \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t-\xi^1,\xi^2)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t+\xi^1,\xi^3)$ — шестимерные векторы:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_2)^{\text{т}}, \qquad \boldsymbol{B} = (-\boldsymbol{\tau}_3, \boldsymbol{\tau}_3\times\boldsymbol{\tau}_1)^{\text{т}}, \tag{3.2}$$

индекс т обозначает транспонирование матрицы или вектора. Для разделения переменных в уравнении (3.1) используем лемму, справедливую для n-мерных векторов $\boldsymbol{A}(x)$, $\boldsymbol{B}(y)$ общего вида, зависящих от независимых переменных x и y соответственно. Доказательство этой леммы имеется в [4], однако впервые она была использована в [5] при разделении переменных в уравнении, возникающем при групповой классификации уравнений газовой динамики.

Лемма (лемма Овсянникова). *Соотношение* (3.1) *выполняется для векторов*

$$\boldsymbol{A} = (a^1(x), \dots, a^n(x))^{\text{т}}, \qquad \boldsymbol{B} = (b^1(y), \dots, b^n(y))^{\text{т}}$$

тождественно по переменным x, y, только если существуют число s $(0 \leqslant s \leqslant n-1)$, постоянная $(n{\times}s)$-матрица C ранга s, постоянный вектор $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ и набор s непостоянных линейно независимых функций, образующих вектор $\boldsymbol{u}(x)$, для которых справедливы уравнения

$$\boldsymbol{A} = C\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{B}^{\text{т}}C = 0, \qquad \boldsymbol{B}^{\text{т}}\boldsymbol{d} = 1. \tag{3.3}$$

Применим лемму Овсянникова к уравнению (3.1) с векторами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, определенными равенствами (3.2). В этом случае роль переменных x и y играют наборы переменных $(t-\xi^1, \xi^2)$ и $(t+\xi^1, \xi^3)$, а матрица C и вектор $\boldsymbol{d}$ считаются постоянными. В силу симметрии уравнения (3.1) относительно замены $(t-\xi^1, \xi^2) \leftrightarrow (t+\xi^1, \xi^3)$, $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\tau}$ достаточно рассмотреть случаи $s = 0, 1, 2$.

4. Разделение переменных. Рассмотрим общий случай разделения переменных в уравнении (2.1). Справедлива

Теорема 1. *Уравнение* (2.1) *с точностью до преобразований эквивалентности* (2.2), (2.3) *выполняется только в одном из перечисленных ниже случаев*:

1) *при* $s = 0$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\mu}^1, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\nu}^1, \quad -\boldsymbol{\mu}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3 + \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 1; \tag{4.1}$$

2) *при* $s = 1$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = u(t-\xi^1, \xi^2)\boldsymbol{\mu}^1 + \boldsymbol{\mu}^2, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = u(t-\xi^1, \xi^2)\boldsymbol{\nu}^1 + \boldsymbol{\nu}^2; \tag{4.2}$$

$$-\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\mu}^1 + \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 0, \qquad -\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 1; \tag{4.3}$$

3) *при* $s = 2$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = u^1(t-\xi^1, \xi^2)\boldsymbol{\mu}^1 + u^2(t-\xi^1, \xi^2)\boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\mu}^3, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 = u^1(t-\xi^1, \xi^2)\boldsymbol{\nu}^1 + u^2(t-\xi^1, \xi^2)\boldsymbol{\nu}^2 + \boldsymbol{\nu}^3; \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} -\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\mu}^1 + \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 0, \qquad -\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 0, \\ -\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\mu}^3 + \boldsymbol{\nu}^3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 1. \end{gathered} \tag{4.5}$$

В уравнениях (4.1)–(4.5) *искомыми являются векторы $\boldsymbol{\sigma}(t-\xi^1, \xi^2)$ и $\boldsymbol{\tau}(t+\xi^1, \xi^3)$. Остальные векторы являются произвольными и постоянными. Произвольные функции u, u^1, u^2, 1 линейно независимы как функции первого аргумента (при составлении линейных комбинаций можно выбирать коэффициенты, зависящие от ξ^2).*

Доказательство. Используем лемму Овсянникова при разделении переменных в уравнении (3.1). В случае $s = 0$ матрица C отсутствует. Представим шестимерный вектор $\boldsymbol{d}$ в виде объединения двух трехмерных векторов: $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{\mu}^1, \boldsymbol{\nu}^1)^{\text{т}}$. Из формул (3.2) и представлений (3.3) следует система (4.1).

В случае $s = 1$ матрица C имеет один столбец и шесть строк: $C = (\boldsymbol{\mu}^1, \boldsymbol{\nu}^1)^{\text{т}}$. Вектор $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{\mu}^2, \boldsymbol{\nu}^2)^{\text{т}}$ составлен из двух постоянных трехмерных векторов $\boldsymbol{\mu}^i$, $\boldsymbol{\nu}^i$, $u(t-\xi^1, \xi^2)$ — произвольная скалярная функция. Подставляя эти величины в уравнения (3.3), получаем системы (4.2), (4.3).

В случае $s = 2$ матрица C имеет размерность 6×2:

$$C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^1 & \boldsymbol{\mu}^2 \\ \boldsymbol{\nu}^1 & \boldsymbol{\nu}^2 \end{pmatrix}.$$

Справедливы представления для векторов $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{\mu}^3, \boldsymbol{\nu}^3)^{\mathrm{т}}$ и $\boldsymbol{u} = (u^1(t-\xi^1, \xi^2), u^2(t-\xi^1, \xi^2))^{\mathrm{т}}$. Как и в рассмотренных выше случаях, $\boldsymbol{\mu}^i$, $\boldsymbol{\nu}^i$ — трехмерные векторы, $u^i(t - \xi^1, \xi^2)$ — некоторые вспомогательные линейно независимые по первому аргументу функции. В силу леммы Овсянникова получаем системы (4.4), (4.5).

Каждая из систем уравнений (4.1)–(4.5) представляет собой переопределенную систему уравнений для компонент векторов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$. Эти системы содержат произвольные элементы — векторы $\boldsymbol{\mu}^i$, $\boldsymbol{\nu}^i$, а также функции u^i. Ниже проводится исследование совместности систем уравнений (4.1)–(4.5) и выполняется интегрирование каждой из них.

5. Интегрирование уравнений в случае $s = 0$. Рассмотрим систему уравнений (4.1). Умножая второе уравнение этой системы на первое, получаем

$$\boldsymbol{\nu}^1 \cdot \boldsymbol{\mu}^1 = 0.$$

Интегрирование второго уравнения (4.1) по переменной ξ^2 дает представление для функции $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \xi^2 \boldsymbol{\nu}^1 + \boldsymbol{\eta}(t - \xi^1), \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\eta}(t-\xi^1)$ — произвольная функция $t-\xi^1$. Подставляя (5.1) в первое из уравнений (4.1), имеем

$$\boldsymbol{\eta}'(t - \xi^1) \times \boldsymbol{\nu}^1 = \boldsymbol{\mu}^1 \tag{5.2}$$

(штрих означает производную функции по единственному аргументу). Представим производную функции $\boldsymbol{\eta}(t - \xi^1)$ в виде

$$\boldsymbol{\eta}'(t - \xi^1) = f'(t - \xi^1)\boldsymbol{\nu}^1 - \boldsymbol{\nu}^2,$$

где $f(t - \xi^1)$ — произвольная функция; $\boldsymbol{\nu}^2$ — постоянный вектор, ортогональный $\boldsymbol{\nu}^1$. Проинтегрируем это уравнение, подставим результат в (5.1) и подействуем на $\boldsymbol{\sigma}$ преобразованием эквивалентности (2.2):

$$\boldsymbol{\sigma} = (\xi^2 + f(t - \xi^1))\boldsymbol{\nu}^1.$$

В последнее из уравнений (4.1) подставим выражение (5.2) и применим преобразование (2.2):

$$\boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{\tau}_1) = 1. \tag{5.3}$$

Пусть векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$, $\boldsymbol{\mu}^1$ образуют ортонормированный базис, в котором вектор $\boldsymbol{\tau}$ имеет компоненты $\boldsymbol{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)^{\mathrm{т}}$. Тогда уравнение (5.3) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \tau_3^2 & \tau_3^3 \\ \tau_1^2 & \tau_1^3 \end{vmatrix} = 1. \tag{5.4}$$

Итак, получено решение системы уравнений (4.1)

$$\boldsymbol{x} = (\xi^2 + f(t - \xi^1) + \tau^1(t + \xi^1, \xi^3))\boldsymbol{\nu}^1 + \tau^2(t + \xi^1, \xi^3)\boldsymbol{\nu}^2 + \tau^3(t + \xi^1, \xi^3)\boldsymbol{\mu}^1, \tag{5.5}$$

где функции $\tau^2(t+\xi^1, \xi^3)$, $\tau^3(t+\xi^1, \xi^3)$ удовлетворяют условию (5.4); $\tau^1(t+\xi^1, \xi^3)$, $f(t-\xi^1)$ — произвольные функции.

6. Интегрирование уравнений в случае $s = 1$**.** Исследуем систему (4.2). По аналогии со случаем $s = 0$ имеем

$$\boldsymbol{\mu}^i \cdot \boldsymbol{\nu}^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu}^i = \boldsymbol{a}^i \times \boldsymbol{\nu}^i,$$

$$\boldsymbol{\nu}^1 \cdot \boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \boldsymbol{\mu}^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a} - k\boldsymbol{\nu}^2, \quad \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} + l\boldsymbol{\nu}^1.$$

Здесь $\boldsymbol{a}^i$ — некоторые произвольные постоянные векторы; k, l — произвольные скалярные постоянные. Из этих равенств следуют выражения для векторов $\boldsymbol{\mu}^i$

$$\boldsymbol{\mu}^1 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}^1 + k\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2, \quad \boldsymbol{\mu}^2 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}^2 + l\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2. \tag{6.1}$$

Подставляя данные соотношения в первое из уравнений (4.2):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{a} \times (u(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^1 + \boldsymbol{\nu}^2) + (l + ku(t-\xi^1,\xi^2))\,\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2 = \\ = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\sigma}_2 + l\boldsymbol{\nu}^1 \times (\boldsymbol{\nu}^2 + u(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^1) + ku(t-\xi^1,\xi^2)\,\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2 = \\ = (\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{\nu}^1) \times \boldsymbol{\sigma}_2 + ku(t-\xi^1,\xi^2)\,\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2\end{aligned}$$

и действуя на $\boldsymbol{\sigma}$ преобразованием эквивалентности (2.2), получаем

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = ku(t-\xi^1,\xi^2)\,\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = u(t-\xi^1,\xi^2)\,\boldsymbol{\nu}^1 + \boldsymbol{\nu}^2. \tag{6.2}$$

Подставим в систему (4.3) соотношения (6.1). Действуя на $\boldsymbol{\tau}$ преобразованием эквивалентности (2.2), имеем

$$\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\tau}_3) = k\boldsymbol{\tau}_3(\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2), \qquad \boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\nu}^2 \times \boldsymbol{\tau}_3) = 1. \tag{6.3}$$

Итак, вместо систем (4.2), (4.3) получены системы (6.2), (6.3). Рассмотрим два возможных случая:

1) векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$ пропорциональны;

2) векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$ линейно независимы.

В случае 1 $\boldsymbol{\nu}^2 = m\boldsymbol{\nu}^1$. Подставляя это соотношение в систему (6.3), получаем противоречивую систему

$$\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\tau}_3) = 0, \qquad m\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\tau}_3) = 1.$$

Рассмотрим случай 2. Интегрируя второе из уравнений (6.2):

$$\boldsymbol{\sigma} = U\boldsymbol{\nu}^1 + (\xi^2 + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^2, \tag{6.4}$$

где

$$U = U(t-\xi^1,\xi^2) = \int\limits_0^{\xi^2} u(t-\xi^1,s)\,ds + g(t-\xi^1),$$

$f(t-\xi^1)$, $g(t-\xi^1)$ — произвольные функции, и подставляя (6.4) в первое уравнение системы (6.2), находим следующее условие для функции U:

$$U_1 = (k + f')U_2.$$

Таким образом, окончательно для функции $\boldsymbol{\sigma}$ имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = U(\xi^2 + k(t-\xi^1) + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^1 + (\xi^2 + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^2.$$

Если векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$ и $\boldsymbol{\nu}^3 = \boldsymbol{\nu}^1 \times \boldsymbol{\nu}^2$ образуют ортонормированный базис, то условия (6.3) записываются следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^3 \\ \tau_3^1 & \tau_3^3 \end{vmatrix} = 1, \qquad k\tau_3^3 = \begin{vmatrix} \tau_3^2 & \tau_3^3 \\ \tau_1^2 & \tau_1^3 \end{vmatrix}. \tag{6.5}$$

Итак, получено решение систем уравнений (4.2), (4.3)

$$\boldsymbol{x} = (U(\xi^2 + k(t-\xi^1) + f(t-\xi^1)) + \tau^1(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{\nu}^1 + \\ + (\xi^2 + f(t-\xi^1) + \tau^2(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{\nu}^2 + \tau^3(t+\xi^1,\xi^3)\boldsymbol{\nu}^3, \quad (6.6)$$

где компоненты функции $\boldsymbol{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ удовлетворяют условиям (6.5).

7. Интегрирование уравнений в случае $s = 2$**.** Рассмотрим систему уравнений (4.4). Умножая скалярно второе уравнение этой системы на первое, получаем следующие соотношения для векторов $\boldsymbol{\mu}^i$ и $\boldsymbol{\nu}^i$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\mu}^i \cdot \boldsymbol{\nu}^i = 0, \qquad \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \boldsymbol{\mu}^1 = 0, \\ \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \boldsymbol{\mu}^3 + \boldsymbol{\nu}^3 \cdot \boldsymbol{\mu}^1 = 0, \qquad \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \boldsymbol{\mu}^3 + \boldsymbol{\nu}^3 \cdot \boldsymbol{\mu}^2 = 0. \end{gathered} \quad (7.1)$$

Первое уравнение системы (7.1) позволяет представить векторы $\boldsymbol{\mu}^i$ в виде

$$\boldsymbol{\mu}^i = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^i \times \boldsymbol{\nu}^i.$$

Подставляя данное выражение в последние три уравнения (7.1), получаем

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^1 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 + a^1\boldsymbol{\nu}^1 + b^1\boldsymbol{\nu}^2, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 + a^2\boldsymbol{\nu}^2 + b^2\boldsymbol{\nu}^3, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}^3 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 + a^3\boldsymbol{\nu}^3 + b^3\boldsymbol{\nu}^1, \quad (7.2)$$

где a^i, b^i — постоянные, такие что

$$(a^1 + b^3)\boldsymbol{\nu}^1 + (a^2 + b^1)\boldsymbol{\nu}^2 + (a^3 + b^2)\boldsymbol{\nu}^3 = 0. \quad (7.3)$$

Таким образом, система (4.4) принимает вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = u^1(t-\xi^1,\xi^2)\tilde{\boldsymbol{\mu}}^1 \times \boldsymbol{\nu}^1 + u^2(t-\xi^1,\xi^2)\tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 \times \boldsymbol{\nu}^2 + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^3 \times \boldsymbol{\nu}^3, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 = u^1(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^1 + u^2(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^2 + \boldsymbol{\nu}^3. \end{gathered} \quad (7.4)$$

Рассмотрим три возможных случая:

1) векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$, $\boldsymbol{\nu}^3$ линейно независимы;
2) один из векторов $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$, $\boldsymbol{\nu}^3$ является линейной комбинацией двух других;
3) векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$, $\boldsymbol{\nu}^3$ пропорциональны.

В случае 1, используя (7.3), для системы (7.2) получаем

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^1 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 + a^1\boldsymbol{\nu}^1 - a^2\boldsymbol{\nu}^2, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^3 + a^2\boldsymbol{\nu}^2 - a^3\boldsymbol{\nu}^3, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}^3 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^1 + a^3\boldsymbol{\nu}^3 - a^1\boldsymbol{\nu}^1.$$

Следовательно,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^1 - a^1\boldsymbol{\nu}^1 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 - a^2\boldsymbol{\nu}^2 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^3 - a^3\boldsymbol{\nu}^3 = \boldsymbol{\mu},$$

поэтому

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\mu} \times (u^1(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^1 + u^2(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^2 + \boldsymbol{\nu}^3) = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\sigma}_2.$$

С учетом преобразования эквивалентности (2.2) имеем

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = 0. \quad (7.5)$$

Проинтегрируем уравнение для $\boldsymbol{\sigma}_2$ из (7.4) по ξ^2:

$$\boldsymbol{\sigma} = U^1(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^1 + U^1(t-\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{\nu}^2 + (\xi^2 + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^3.$$

Здесь

$$U^i(t-\xi^1,\xi^2) = \int\limits_0^{\xi^2} u^i(t-\xi^1,s)\,ds + f^i(t-\xi^1),$$

$f(t-\xi^1)$, $f^i(t-\xi^1)$ — произвольные функции. Дифференцируя данное представление для $\boldsymbol{\sigma}$ по переменным $t-\xi^1$, ξ^2 и подставляя полученное выражение в равенство (7.5), имеем

$$U_1^1 U_2^2 - U_2^1 U_1^2 = 0, \quad U_1^1 - f' U_2^1 = 0, \quad U_1^2 - f' U_2^2 = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем $U^i = U^i(\xi^2 + f(t-\xi^1))$. Тогда функция $\boldsymbol{\sigma}$ принимает следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = U^1(\xi^2 + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^1 + U^2(\xi^2 + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^2 + (\xi^2 + f(t-\xi^1))\boldsymbol{\nu}^3.$$

Подставим полученные представления для векторов $\boldsymbol{\mu}^i$ в систему (4.5) и подействуем на нее преобразованием эквивалентности (2.2):

$$\boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^1) = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^2) = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^3) = 1. \tag{7.6}$$

Если векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$, $\boldsymbol{\nu}^3$ образуют ортонормированный базис, то уравнения (7.6) принимают вид

$$\begin{vmatrix} \tau_3^2 & \tau_1^2 \\ \tau_3^3 & \tau_1^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \tau_3^1 & \tau_1^1 \\ \tau_3^3 & \tau_1^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \tau_3^1 & \tau_1^1 \\ \tau_3^2 & \tau_1^2 \end{vmatrix} = 1.$$

Из первых двух определителей следует $\tau^3 = \mathrm{const}$. Таким образом, получаем решение системы (4.4), (4.5)

$$\boldsymbol{x} = (U^1(\xi^2 + f(t-\xi^1)) + \tau^1(t+\xi^1, \xi^3))\,\boldsymbol{\nu}^1 + \\ + (U^2(\xi^2 + f(t-\xi^1)) + \tau^2(t+\xi^1, \xi^3))\,\boldsymbol{\nu}^2 + (\xi^2 + f(t-\xi^1))\,\boldsymbol{\nu}^3, \tag{7.7}$$

где

$$\begin{vmatrix} \tau_3^1 & \tau_1^1 \\ \tau_3^2 & \tau_1^2 \end{vmatrix} = 1. \tag{7.8}$$

Рассмотрим случай 2. Для определенности будем считать, что $\boldsymbol{\nu}^3 = k\boldsymbol{\nu}^1 + l\boldsymbol{\nu}^2$, где k, l — некоторые постоянные. Соотношения (7.2) принимают следующий вид:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^1 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^2 = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^3 + a\boldsymbol{\nu}^2.$$

Подставим полученные выражения в (7.6) и применим преобразование эквивалентности (2.2):

$$\boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^1) = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^2) = 0, \quad ak\boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\nu}^2 \times \boldsymbol{\nu}^1) = 1. \tag{7.9}$$

Если векторы $\boldsymbol{\nu}^1$, $\boldsymbol{\nu}^2$, $\boldsymbol{\nu}^3$ образуют ортонормированный базис, то уравнения (7.9) записываются следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \tau_3^2 & \tau_1^2 \\ \tau_3^3 & \tau_1^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \tau_3^1 & \tau_1^1 \\ \tau_3^3 & \tau_1^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \tau_3^3 = c \tag{7.10}$$

(c — некоторая постоянная). Из первых двух уравнений данной системы следует, что $\tau^3 = \mathrm{const}$, но этот результат противоречит последнему уравнению системы (7.10).

В случае 3 $\boldsymbol{\nu}^1 = \boldsymbol{\nu}^2/k = \boldsymbol{\nu}^3/l$. Подставим данные соотношения для векторов $\boldsymbol{\nu}^i$ в систему (7.4). С учетом выражений для $\boldsymbol{\mu}^i$ (7.2) и преобразования эквивалентности (2.2) находим

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = (u^1(t-\xi^1, \xi^2) + ku^1(t-\xi^1, \xi^2) + l)\boldsymbol{\nu}^1.$$

Подставим найденные представления для векторов $\boldsymbol{\mu}^i$ в систему (4.5):

$$\boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^1) = 0, \qquad k\boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^1) = 0, \qquad l\boldsymbol{\tau}_3 \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\nu}^1) = 1.$$

В результате приходим к противоречию. Таким образом, в случае когда векторы $\boldsymbol{\nu}^i$ коллинеарны, решения не существует.

8. Полученные решения. В результате анализа систем уравнений (4.1)–(4.5) получены решения (5.5), (6.6) и (7.7). Используя циклическую перестановку базисных векторов $\boldsymbol{\nu}^i$, приведем решения к единообразному виду. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Решения уравнения* (2.1) *исчерпываются следующими неэквивалентными случаями:*

1) *при* $s=0$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}=\tau^1(t+\xi^1,\xi^3)\boldsymbol{e}^1+\tau^2(t+\xi^1,\xi^3)\boldsymbol{e}^2+(\xi^2+f(t-\xi^1)+\tau^3(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{e}^3,\\ \begin{vmatrix}\tau^1_3 & \tau^2_3\\ \tau^1_1 & \tau^2_1\end{vmatrix}=1;\end{gathered}\tag{8.1}$$

2) *при* $s=1$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}=\tau^1(t+\xi^1,\xi^3)\boldsymbol{e}^1+(U(\xi^2+k(t-\xi^1)+f(t-\xi^1))+\tau^2(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{e}^2+\\ +(\xi^2+f(t-\xi^1)+\tau^3(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{e}^3,\end{gathered}\tag{8.2}$$

$$\begin{vmatrix}\tau^1_3 & \tau^2_3\\ \tau^1_1 & \tau^2_1\end{vmatrix}=1,\qquad k\tau^1_3=\begin{vmatrix}\tau^3_3 & \tau^1_3\\ \tau^3_1 & \tau^1_1\end{vmatrix};$$

3) *при* $s=2$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}=(U^1(\xi^2+f(t-\xi^1))+\tau^1(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{e}^1+(U^2(\xi^2+f(t-\xi^1))+\tau^2(t+\xi^1,\xi^3))\boldsymbol{e}^2+\\ +(\xi^2+f(t-\xi^1))\boldsymbol{e}^3,\end{gathered}\tag{8.3}$$

$$\begin{vmatrix}\tau^1_3 & \tau^2_3\\ \tau^1_1 & \tau^2_1\end{vmatrix}=1.$$

В (8.1)–(8.3) $\boldsymbol{e}^i$ *— ортонормированный набор векторов;* f, U, U^1, U^2 *— произвольные функции своих аргументов; произвольные функции* τ^1, τ^2, τ^3 *удовлетворяют указанным для каждого решения уравнениям.*

Заметим, что во всех трех решениях имеется условие для функций τ^1, τ^2

$$\begin{vmatrix}\tau^1_3 & \tau^2_3\\ \tau^1_1 & \tau^2_1\end{vmatrix}=1,\tag{8.4}$$

которое следует из уравнения (1.4), характеризующего несжимаемость течения жидкости и соленоидальность магнитного поля. Далее уравнение (8.4) будем называть условием несжимаемости.

Для того чтобы представить физическую картину течения, необходимо описать траектории частиц жидкости и магнитных силовых линий. В соответствии с физическим смыслом отображения $\boldsymbol{\gamma}$ траектории частиц параметризуются переменной t при фиксированном векторе лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$. В момент времени t_0 магнитные линии параметризованы величиной ξ^1 для фиксированных ξ^2 и ξ^3. Из представления решений (8.1)–(8.3) следует, что при изменении t или ξ^1 меняется первый аргумент функций τ^1 и τ^2. Таким образом, для физической трактовки решений необходимо иметь представление о геометрии кривых на плоскости (τ^1,τ^2), параметризованных следующими соотношениями:

$$\tau^1=\tau^1(\alpha,\xi^3),\qquad \tau^2=\tau^2(\alpha,\xi^3),\qquad \alpha\in\mathbb{R}.\tag{8.5}$$

Ниже предложены различные способы построения решений уравнения (8.4) и описана геометрия кривых (8.5).

9. Точные решения уравнения несжимаемости. Рассмотрим отображение $(x, y) \to (u, v)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial(u, v)}{(x, y)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_x v_y - u_y v_x = 1, \tag{9.1}$$

где $\partial\,(u, v)/\partial\,(x, y)$ — матрица Якоби. Отметим, что преобразования $(x, y) \to (u, v)$, задаваемые уравнением (9.1), образуют бесконечную псевдогруппу Ли, поскольку композиция этих преобразований также является преобразованием данного вида.

Рассмотрим несколько возможных случаев представления функций u, v.

1. Заметим, что для любого отображения $(x, y) \to (r, \varphi)$, удовлетворяющего уравнению

$$r_x \varphi_y - r_y \varphi_x = 1, \tag{9.2}$$

соотношения

$$u = \sqrt{2r(x, y)}\, \cos\varphi(x, y), \qquad v = \sqrt{2r(x, y)}\, \sin\varphi(x, y)$$

задают решение уравнения (9.1). Предположим, что функция r зависит только от переменной y: $r = r(y)$. Тогда из уравнения (9.2) для функции φ получаем

$$\varphi(x, y) = -\frac{2x}{r'(y)} + \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — некоторая произвольная функция. Находим точное решение

$$u = \sqrt{2r(y)}\, \cos\Big(-\frac{2x}{r'(y)} + \psi(y)\Big), \qquad v = \sqrt{2r(y)}\, \sin\Big(-\frac{2x}{r'(y)} + \psi(y)\Big).$$

2. Рассмотрим случай разделения переменных в функциях u и v:

$$u = f_1(x)h(y), \qquad v = f_2(x)h(y). \tag{9.3}$$

Подставляя представление решения (9.3) в уравнение (9.1), получаем

$$hh'(f_1' f_2 - f_1 f_2') = 1.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, имеем

$$\begin{gathered} hh' = c_1 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{2c_1 y + c_2}, \\ f_1' f_2 - f_1 f_2' = 1/c_1. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Полагая $f_1(x) = c(x) f_2(x)$ и подставляя это выражение в (9.4), находим

$$c'(x) f_2^2 = \frac{1}{c_1} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \frac{1}{c_1} \int \frac{dx}{f_2^2(x)}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\int \frac{dx}{f_2^2(x)} = F(x).$$

Тогда $f_2 = 1/\sqrt{F'(x)}$.

Таким образом,

$$u = (c_3 + F(x)) \sqrt{\frac{2c_1 y + c_2}{F'(x)}}, \qquad v = \sqrt{\frac{2c_1 y + c_2}{F'(x)}}.$$

Ниже представлен общий подход к построению искомых отображений по аналогии с течением несжимаемой жидкости.

10. Трактовка условия несжимаемости для случая плоских течений жидкости. Решения уравнения (9.1) можно трактовать следующим образом. Пусть $(Q(u,v),P(u,v))$ — вектор скорости некоторого плоского течения несжимаемой жидкости. Линия тока частицы, начинающей движение из положения (x,y), в таком течении определяется следующими уравнениями:

$$\frac{du}{ds}=Q,\quad u\big|_{s=0}=x,\qquad \frac{dv}{ds}=P,\quad v\big|_{s=0}=y.$$

Условие несжимаемости отображения $(x,y)\to(u,v)$ выполнено автоматически, если

$$Q_u+P_v=0. \tag{10.1}$$

Уравнение (10.1) можно проинтегрировать, если ввести функцию тока $\Phi(u,v)$:

$$Q=\frac{\partial\Phi}{\partial v},\qquad P=-\frac{\partial\Phi}{\partial u}.$$

В этом случае для линий тока имеем гамильтонову систему

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial\Phi}{\partial v},\qquad \frac{dv}{ds}=-\frac{\partial\Phi}{\partial u}. \tag{10.2}$$

Начальные данные для системы (10.2) представим следующим образом:

$$u\big|_{s=0}=\sqrt{2\rho}\,\cos\alpha,\qquad v\big|_{s=0}=-\sqrt{2\rho}\,\sin\alpha. \tag{10.3}$$

В силу выполнения условия несжимаемости при отображении $(\rho,\alpha)\to(x,y)$ и теоремы Лиувилля [6] отображение $(\rho,\alpha)\to(u,v)$ сохраняет объем. Выбирая различные функции Φ и решая систему дифференциальных уравнений (10.2) с начальными условиями (10.3), при любом фиксированном s получаем требуемое отображение $(\rho,\alpha)\to(u,v)$.

11. Пример построения точного решения. Выберем функцию Φ в виде $\Phi=(1-u^2-v^2)uv$ (рис. 1). Построим с этой функцией решения системы (10.2) с начальными данными (10.3) для некоторого набора параметров (ρ,α). Для полученного отображения

$$u=u(\rho,\alpha,s),\qquad v=v(\rho,\alpha,s)$$

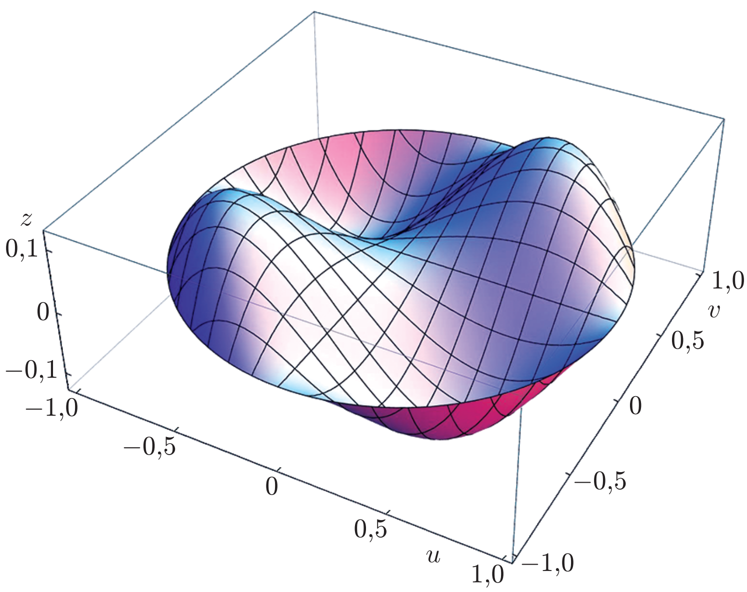

Рис. 1. Поверхность $z=(1-u^2-v^2)uv$

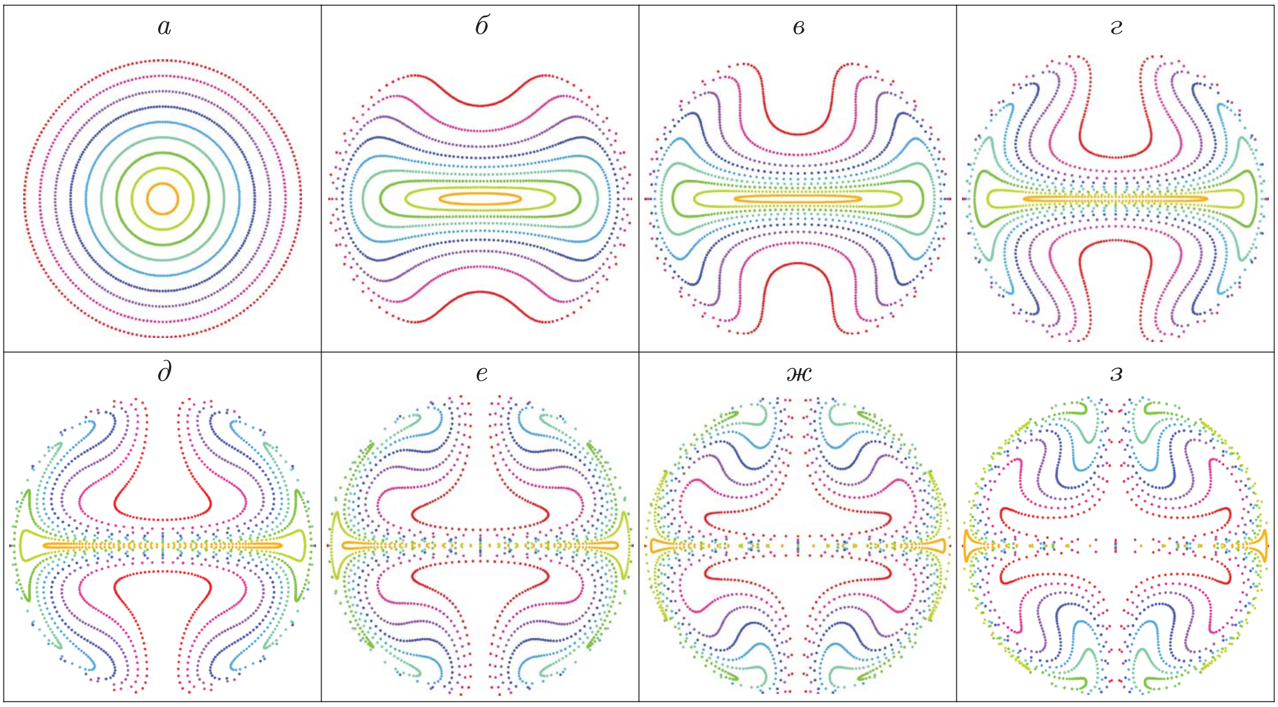

Рис. 2. Положения точек на траекториях динамической системы (10.2) при различных значениях параметра s:
а — $s = 0$, *б* — $s = 1$, *в* — $s = 1{,}5$, *г* — $s = 2$, *д* — $s = 2{,}5$, *е* — $s = 3$, *ж* — $s = 3{,}5$, *з* — $s = 4$

представим кривые (8.5), задаваемые для некоторого набора значений переменной ρ и фиксированного параметра $s = s_0$, в следующей параметрической форме:

$$\tau^1 = u(\rho, \alpha, s_0), \qquad \tau^2 = v(\rho, \alpha, s_0), \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

При $s_0 = 0$ данное семейство кривых является набором окружностей радиусом $\sqrt{2\rho}$. С увеличением s_0 эти окружности деформируются в некоторое семейство вложенных кривых.

В расчетах, результаты которых представлены на рис. 2, использовалось девять значений параметра $\rho = i/10$ ($i = 1, \dots, 9$). Для каждого ρ выбрано 200 значений параметра $\alpha_j = j\pi/100$ ($j = 1, \dots, 200$). Для каждой пары параметров (ρ_i, α_j) вычислены траектории системы (10.2). На каждой траектории отмечена точка, соответствующая значению $s = s_0$. Положения полученных таким образом точек при различных значениях s_0 приведены на рис. 2.

Для каждого фиксированного значения параметра s выполнена интерполяция дискретного набора точек для получения гладких кривых (11.1). Набор таких кривых, построенных при $s = 1{,}8$, приведен на рис. 3.

Опишем геометрию течения идеальной бесконечно проводящей жидкости, определяемой простейшим решением вида (8.1)–(8.3):

$$\boldsymbol{x} = \tau^1(t + \xi^1, \xi^3)\boldsymbol{e}^1 + \tau^2(t + \xi^1, \xi^3)\boldsymbol{e}^2 + (\xi^2 + t - \xi^1)\boldsymbol{e}^3, \tag{11.2}$$

где в качестве функций τ^1 и τ^2 выбраны построенные выше функции u и v. Магнитными поверхностями называются поверхности, в каждой своей точке касающиеся магнитного поля. Эти поверхности получаются при фиксированных значениях параметра ξ^3 и времени t и при произвольных значениях параметров ξ^1 и ξ^2. На рис. 4 показаны такие поверхности при $\xi^3 = 0{,}2$; $0{,}7$; $0{,}9$; $1{,}0$. На рис. 5 представлена одна из таких поверхностей ($\xi^3 = 0{,}9$)

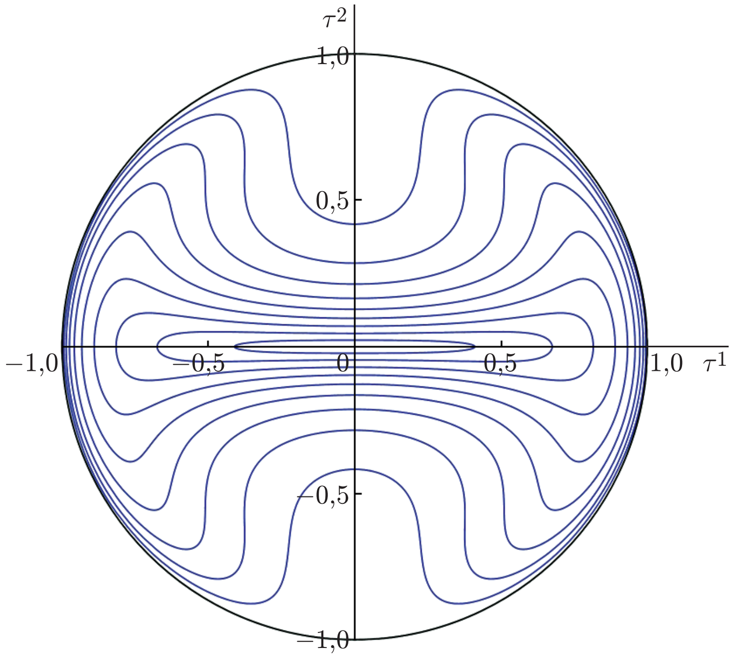

Рис. 3. Кривые (11.1) при $\rho = 0{,}1; \ldots ; 0{,}9$, $s = 1{,}8$

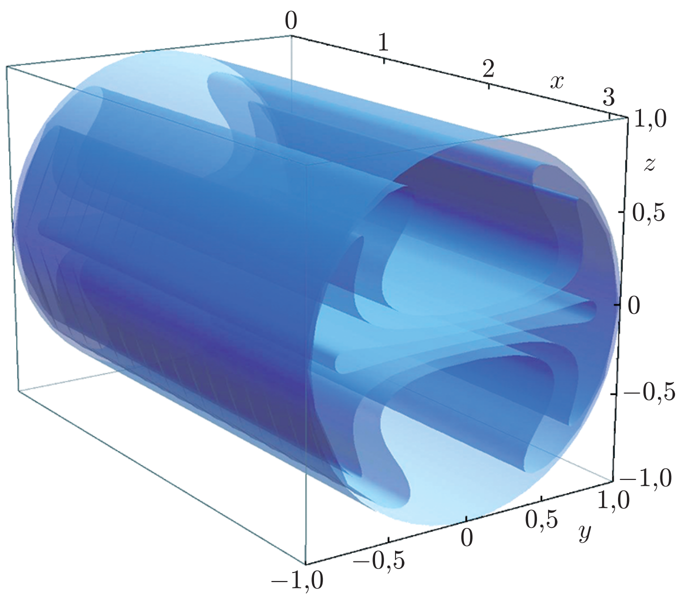

Рис. 4. Магнитные поверхности на решении (11.2)

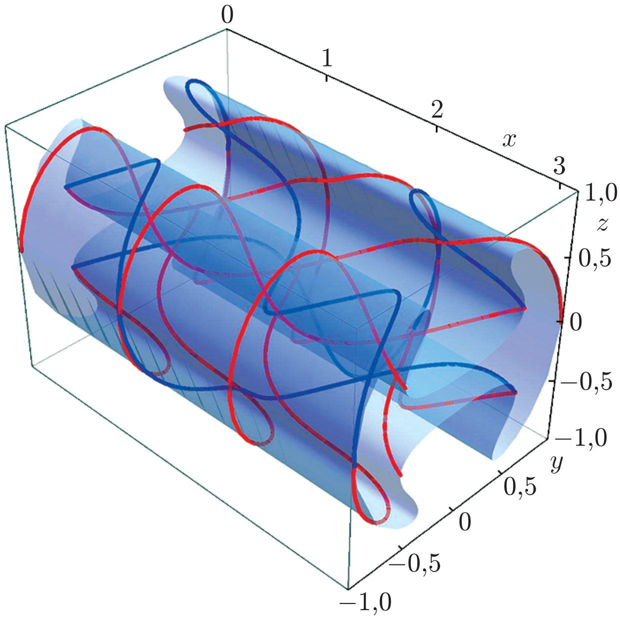

Рис. 5. Магнитная поверхность с магнитными силовыми линиями и траекториями частиц

с магнитными линиями и траекториями частиц. Следует отметить, что несмотря на нестационарный характер течения, магнитные поверхности в рассматриваемом классе решений не меняются во времени.

Заключение. В работе построен специальный класс решений уравнений идеальной МГД с постоянным полным давлением в нестационарном случае. Описан выделенный класс решений, в котором $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t - \xi^1, \xi^2)$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t + \xi^1, \xi^3)$. Для построения таких решений использовалась специальная криволинейная система координат, в которой линии тока и магнитные линии течения задают два семейства координатных кривых. Проведенный анализ показал, что решения такого вида исчерпываются случаями (8.1)–(8.3). Решения найдены со значительным функциональным произволом: в решениях (8.1) и (8.3) — одна функция двух аргументов и четыре функции одного аргумента, в решении (8.2) — две функции двух аргументов и две функции одного аргумента.

Во всех трех решениях имеется условие (8.4), обеспечивающее несжимаемость течения и соленоидальность магнитного поля. В работе изложены некоторые способы построения решения уравнения (8.4). Наибольший произвол возможен при трактовке условия несжимаемости для случая плоских течений несжимаемой жидкости. Построение требуемого отображения сводится к решению гамильтоновой системы (10.2) с функцией тока $\Phi(u, v)$, удовлетворяющей начальным данным (10.3). Для простейшего точного решения представлены магнитные трубки, траектории частиц и магнитные силовые линии течения в цилиндрическом канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Golovin S. V.** Analytical description of stationary ideal MHD flows with constant total pressure // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 901–905.

2. **Golovin S. V.** Natural curvilinear coordinates for ideal MHD equations. Non-stationary flows with constant total pressure // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 283–290.

3. **Golovin S. V., Krutikov M. K.** Complete classification of stationary flows with constant total pressure of ideal incompressible infinitely conducting fluid // J. Phys. A. Math. Theor. 2012. V. 45. 235501.
4. **Головин С. В.** Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 3–14.
5. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 30/IX 2013 г.