УДК 519.6 : 621.391.8 + 004.932

АЛГОРИТМ МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ ВЫЧИСЛЕНИЯ МУЛЬТИВЕЙВЛЕТОВ НЕЧЁТНОЙ СТЕПЕНИ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАМ

Б. М. Шумилов

Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2
E-mail: sbm@tsuab.ru

Исследуются полиномиальные мультивейвлеты нечётной степени с носителями из двух шагов сетки, ортогональные многочленам той же степени, на конечном отрезке. Обосновывается новый подход к вычислению мультивейвлет-преобразования на базе алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений с блочно-трёхдиагональной матрицей методом матричной прогонки (блочным методом Гаусса). Представлены результаты численных экспериментов для мультивейвлетов пятой степени.

Ключевые слова: эрмитовы сплайны, мультивейвлеты, ортогональность многочленам, матричная прогонка, анализ и синтез сигналов.

Введение. Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция (всплеск), множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1, 2]. Основой для построения вейвлетов является наличие набора аппроксимирующих пространств $\ldots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \ldots$ таких, что каждая базисная функция в V_{L-1} может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L. В частности, этим свойством обладают сплайны — гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени m, на вложенной последовательности сеток. Если порядок склейки равен $m-1$, то классические полуортогональные вейвлеты (элементы пространства V_L, ортогональные пространству V_{L-1}) имеют довольно большие носители из $2m+1$ шагов сетки каждый. Это и отсутствие явных выражений по краям отрезка аппроксимации препятствуют широкому использованию сплайн-вейвлетов высокой степени для разработки многомасштабных методов анализа и синтеза сигналов и изображений [3, 4]. Эрмитовы сплайны нечётной степени $m = 2r+1$ (соответствующие склейке порядка r) приводят к полуортогональным всплескам с носителями из трёх шагов каждый, что, несомненно, предпочтительнее. Поскольку в базисе таких функций несколько, они называются мультивейвлетами [5].

В работе [6] был представлен метод построения сплайн-вейвлетов, ортогональных многочленам, с уменьшенными по сравнению с полуортогональными вейвлетами носителями. Несмотря на то что предложенный метод для случая мультивейвлетов неприменим, так как приводит к чрезмерному расползанию носителей, идея уменьшения носителей мультивейвлетов за счёт замены свойства ортогональности пространству сплайнов на прореженной сетке ортогональностью многочленам представляется привлекательной. Действительно, с точки зрения скорости приближения гладких функций данные типы мультивейвлетов эквивалентны [7], а ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальную «похожесть» на наилучшее среднеквадратическое приближение.

В публикациях [8, 9] эта задача решена для эрмитовых сплайнов третьей и пятой степеней соответственно. Данная работа фактически воспроизводит ход рассуждений [8, 9] с тем отличием, что ссылка на прямые вычисления заменена матричными выкладками, пригодными для общего случая. Выявленная при этом блочно-трёхдиагональная структура полученного решения позволяет применить к нему метод матричной прогонки [10], что существенно облегчает численную реализацию.

Построение системы базисных мультивейвлетов произвольной нечётной степени на конечном отрезке. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана вложенная последовательность равномерных сеток Δ^L: $x_i = a + hi$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, $h = (b - a)/2^L$, $L \geq 0$. Если базисные функции $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1, \ldots, r \, \forall \, i$, где $v = (x - a)/h$, с центрами в узлах сетки Δ^L порождены сжатиями и сдвигами $r + 1$ функций вида [11, с. 82]

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} (-1)^k \omega_k(-t) & \text{при } -1 \leq t \leq 0, \\ \omega_k(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\omega_k(t) = (1 - t)^{r+1} \sum_{\beta=0}^{r-k} \frac{(r + \beta)!}{k!\beta!r!} t^{k+\beta}, \quad k = 0, 1, \ldots, r,$$

то при условии отсечения выступающих за концы отрезка половинок функций $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_r(t)$ полученное пространство V_L является пространством эрмитовых сплайнов степени $2r + 1$ гладкости C^r.

Поскольку сетка Δ^{L-1}, $L \geq 1$, построена из Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями $N_{i,k}^{L-1}$ с носителями в 2 раза бóльшими по ширине и центрами в чётных узлах сетки Δ^L вложено в V_L. Остаток W_{L-1} от разности пространств V_L и V_{L-1} размером $(r+1) \times (2^L + 1 - 2^{L-1} - 1) = (r+1)2^{L-1}$ называется пространством мультивейвлетов. Будем искать базисные мультивейвлеты $M_{i,k}^L(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r \, \forall \, i$, как линейные комбинации базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1}, удовлетворяющие условиям ортогональности многочленам $(2r + 1)$-го порядка, т. е.

$$\int_a^b M_{i,k}^L(x) x^m dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r \, \forall \, i, \; m = 0, 1, \ldots, 2r + 1, \tag{1}$$

и имеющие минимальные из возможных носители.

Теорема. Пусть заданы отрезок $[0, 2^L]$, $L \geq 0$, с сеткой Δ^L: $x_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, с единичным шагом и три матрицы размером $(2r + 2) \times (r + 1)$ с элементами

$$R_{m,l}^j = \int_{j-1}^{j+1} \varphi_l(2t - j) t^m dt, \quad j = 0, 1, 2, \; l = 0, 1, \ldots, r, \; m = 0, 1, \ldots, 2r + 1.$$

Тогда при условии, что коэффициенты разложений

$$M_{i,k}^L(x) = \sum_{l=0}^{r} \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^l \varphi_l(2t - j), \quad t = (x - x_{2i}), \; -1 \leq t \leq p + 1, \; \alpha_1^l = \{1, \, l = k; \, 0, \, l \neq k\}, \tag{2}$$

каждый из $r + 1$ столбцов блочной матрицы $[A_0^{\text{inner}} / A_2^{\text{inner}}] = -[R^0 \mid R^2]^{-1} R^1$ даёт значения коэффициентов α_j^l, $j = 0, 2$, $l = 0, 1, \ldots, r$, соответствующего k-го базисного мультивейвлета, полностью лежащего внутри отрезка $[0, 2^L]$. На левом конце отрезка элементы матрицы R^0 вычисляются по укороченному слева интервалу:

$$R^0_{m,\,l} = \int\limits_0^1 \varphi_l(2t)t^m dt, \quad l = 0, 1, \ldots, r, \;\; m = 0, 1, \ldots, 2r+1,$$

а коэффициенты разложения (2) α^l_j, $j = 1, 2$, $l = 0, 1, \ldots, r$, соответствующего k-го базисного мультивейвлета даются значениями столбцов матрицы $[A^{\mathrm{left}}_1 / A^{\mathrm{left}}_2] = -[R^1 \,|\, R^2]^{-1} R^0$ при условии, что коэффициенты $\alpha^l_0 = \{1,\, l = k;\, 0,\, l \ne k\}$. Аналогично на правом конце отрезка элементы матрицы R^2 вычисляются по укороченному справа интервалу:

$$R^2_{m,\,l} = \int\limits_1^2 \varphi_l(2t-2)t^m dt, \quad l = 0, 1, \ldots, r, \;\; m = 0, 1, \ldots, 2r+1,$$

а коэффициенты разложения (2) α^l_j, $j = 0, 1$, $l = 0, 1, \ldots, r$, соответствующего k-го базисного мультивейвлета даются значениями столбцов матрицы $[A^{\mathrm{right}}_0 / A^{\mathrm{right}}_1] = -[R^0 \,|\, R^1]^{-1} R^2$ при условии, что коэффициенты $\alpha^l_2 = \{1,\, l = k;\, 0,\, l \ne k\}$. При $L = 0$ все интегралы вычисляются по интервалу $[0,\ 2]$, а по краям отрезка мультивейвлеты не возникают: $[A^{\mathrm{center}}_0 / A^{\mathrm{center}}_2] = -[R^0 \,|\, R^2]^{-1} R^1$ при условии, что $\alpha^l_1 = \{1,\, l = k;\, 0,\, l \ne k\}$.

Система функций $M^L_{i,\,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r$, $i = 1, 2, \ldots, 2^L$, удовлетворяет условиям (1) с носителями не более чем из двух шагов сетки и образует базис в пространстве W_L, $L \ge 0$.

Доказательство теоремы дано в приложении.

Построение блока фильтров. Если упорядочить базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки

$$\varphi^L = [N^L_{0,\,0}, N^L_{0,\,1}, \ldots, N^L_{0,\,r}, N^L_{1,\,0}, N^L_{1,\,1}, \ldots, N^L_{2^L,\,r}],$$

то можно записать φ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L: $\varphi^{L-1} = \varphi^L P^L$. Здесь блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов масштабных соотношений (для единичного шага) [5]

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{2} H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \vdots \\ \varphi_r(2t-k) \end{bmatrix},$$

где $H_2 = U^{-1} \Lambda U$, $H_1 = \mathrm{diag}(1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-r})$, $H_0 = S H_2 S^{-1}$, матрица U размера $(r\ +\ 1) \times$ $\times (r+1)$ задана элементами

$$U_{k,\,j} = (-1)^{r+1+k-j} \frac{(r+1+k)!}{(r+1+k-j)!}, \quad k, j = 0, 1, \ldots, r,$$

а $\Lambda = \mathrm{diag}(2^{-r-1}, \ldots, 2^{-2r-1})$, $S = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, (-1)^{-r})$.

Аналогично запишем базисные мультивейвлет-функции $(2r+1)$-й степени на уровне разрешения L в виде матрицы-строки

$$\psi^L = [M^L_{1,\,0}, M^L_{1,\,1}, \ldots, M^L_{1,\,r}, \ldots, M^L_{2^L,\,r}].$$

Тогда для уровня разрешения $L-1$ можно выразить функции ψ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L: $\psi^{L-1} = \varphi^L Q^L$, где блоки матрицы Q^L составлены из коэффициентов разложений (2). Соответствующие коэффициенты сплайна будем собирать в вектор

$$C^L = [C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, \ldots, C_0^{L,r}, C_1^{L,0}, \ldots, C_{2^L}^{L,r}]^T$$

и соответствующие мультивейвлет-коэффициенты — в вектор

$$D^L = [D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \ldots, D_1^{L,r}, \ldots, D_{2^L}^{L,r}]^T.$$

С использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [12]

$$C^L = [P^L \,|\, Q^L]\Big[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\Big]. \tag{3}$$

Далее представлены примеры матриц $[P^L \,|\, Q^L]$, соответствующих $L = 1, 2, 3$:

$$[P^1 \,|\, Q^1] = \begin{bmatrix} H_1 & O & A_0^{\text{center}} \\ H_2^T & H_0^T & I \\ O & H_1 & A_2^{\text{center}} \end{bmatrix}, \qquad [P^2 \,|\, Q^2] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & I & O \\ H_2^T & H_0^T & O & A_1^{\text{left}} & O \\ O & H_1 & O & A_2^{\text{left}} & A_0^{\text{right}} \\ O & H_2^T & H_0^T & O & A_1^{\text{right}} \\ O & O & H_1 & O & I \end{bmatrix},$$

$$[P^3 \,|\, Q^3] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & O & O & I & O & O & O \\ H_2^T & H_0^T & O & O & O & A_1^{\text{left}} & O & O & O \\ O & H_1 & O & O & O & A_2^{\text{left}} & A_0^{\text{inner}} & O & O \\ O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O & O \\ O & O & H_1 & O & O & O & A_2^{\text{inner}} & A_0^{\text{inner}} & O \\ O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O \\ O & O & O & H_1 & O & O & O & A_2^{\text{inner}} & A_0^{\text{right}} \\ O & O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & A_1^{\text{right}} \\ O & O & O & O & H_1 & O & O & O & I \end{bmatrix}.$$

Здесь O обозначает матрицу $(r+1)$-го порядка с нулевыми коэффициентами, тогда как I — единичная матрица $(r+1)$-го порядка. Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (3). При этом в целях компенсации единичного шага сетки в уравнениях (3) в качестве исходных нужно использовать значения функции и производных, домноженные на h в соответствующей степени: $\{f^{(k)}(ih)h^k,\ k = 0, 1, \ldots, r,\ i = 0, 1, \ldots, 2^L\}$, всего $(r+1)(2^L+1)$ чисел.

Обращение блока фильтров. Разрешимость системы (3) гарантирована линейной независимостью базисных функций. Для вычислений матрицу $[P^L \,|\, Q^L]$ предлагается сделать блочной трёхдиагональной, изменив порядок неизвестных так, чтобы блоки матриц P^L и Q^L перемежались:

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} H_1 & A_0^{\text{center}} & O \\ H_2^T & I & H_0^T \\ O & A_2^{\text{center}} & H_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^L = \begin{bmatrix} H_1 & I & 0 & \cdots & 0 \\ H_2^T & A_1^{\text{left}} & H_0^T & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2^{\text{left}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1^{\text{right}} & H_0^T \\ 0 & \cdots & 0 & I & H_1 \end{bmatrix}, \quad L > 1.$$

Одним из методов решения полученных систем алгебраических уравнений является метод Гаусса [13]. Если матрица системы разбита на блоки, то можно построить блочное LU-разложение, которое представим в виде

$$\mathbf{K}^L = (\mathbf{L} + \mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{T}), \tag{4}$$

где для $L > 1$ имеем

$$\mathbf{L} = \text{blocktridiag}\{H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{left}}, 0, 0; H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{inner}}, 0, 0; \ldots; I, 0, 0\};$$

$$\mathbf{U} = \text{blocktridiag}\{0, 0, I; 0, 0, H_0^T; 0, 0, A_0^{\text{inner}}; \ldots; 0, 0, A_0^{\text{right}}; 0, 0, H_0^T\};$$

$$\mathbf{T} = \text{blockdiag}\{T_i, i = 0, 1, \ldots, 2^L\}.$$

Приравнивая соответствующие блоки в левой и правой частях (4), получим выражения для блоков LU-разложения T_i [14]:

$$T_1 = H_1; \quad T_2 = A_1^{\text{left}} - H_2^T T_1^{-1}; \quad T_3 = H_1 - A_2^{\text{left}} T_2^{-1} H_0^T;$$

$$T_i = I - H_2^T T_{i-1}^{-1} A_0^{\text{inner}}; \quad T_{i+1} = H_1 - A_2^{\text{inner}} T_i^{-1} H_0^T \quad (i = 4, 6, \ldots, 2^L - 2); \tag{5}$$

$$T_{2^L} = A_1^{\text{right}} - H_2^T T_{2^L-1}^{-1} A_0^{\text{right}}; \quad T_{2^L+1} = H_1 - T_{2^L}^{-1} H_0^T.$$

Аналогично для $L = 1$ получаем

$$T_1 = H_1; \quad T_2 = I - H_2^T T_1^{-1} A_0^{\text{center}}; \quad T_3 = H_1 - A_2^{\text{center}} T_2^{-1} H_0^T.$$

Если ввести обозначение $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{T})u = z$, то процесс решения системы $\mathbf{K}^L u = f$ разбивается на два этапа: $(\mathbf{L} + \mathbf{T})z = f$; $(\mathbf{I} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})u = z$.

Покомпонентно каждый из них можно записать в следующем виде.

Для решения $(\mathbf{L} + \mathbf{T})z = f$ последовательно выполняются действия:

$$z_1 = T_1^{-1} f_1; \quad z_2 = T_2^{-1}(f_2 - H_2^T z_1); \quad z_3 = T_3^{-1}(f_3 - A_2^{\text{left}} z_2);$$

$$z_i = T_i^{-1}(f_i - H_2^T z_{i-1}); \quad z_{i+1} = T_{i+1}^{-1}(f_{i+1} - A_2^{\text{inner}} z_i) \quad (i = 4, 6, \ldots, 2^L - 2); \tag{6}$$

$$z_{2^L} = T_{2^L}^{-1}(f_{2^L} - H_2^T z_{2^L-1}); \quad z_{2^L+1} = T_{2^L+1}^{-1}(f_{2^L+1} - z_{2^L}),$$

а для вычисления $(\mathbf{I}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})u = z$ можно воспользоваться рекуррентными формулами:

$$u_{2L+1} = z_{2L+1}; \quad u_{2L} = z_{2L} - T_{2L}^{-1} H_0^T u_{2L+1}; \quad u_{2L-1} = z_{2L-1} - T_{2L-1}^{-1} A_0^{\text{right}} u_{2L};$$

$$u_i = z_i - T_i^{-1} H_0^T u_{i+1}; \quad u_{i-1} = z_{i-1} - T_{i-1}^{-1} A_0^{\text{inner}} u_i \quad (i = 2^L-2, 2^L-4, \ldots, 4); \tag{7}$$

$$u_2 = z_2 - T_2^{-1} H_0^T u_3; \quad u_1 = z_1 - T_1^{-1} u_2.$$

Здесь u_i, z_i и f_i суть подвекторы порядка $r+1$.

Решение для $r = 2$ (случай мультивейвлетов пятой степени). Для уровня разрешения $L \geq 1$ (внутри отрезка аппроксимации):

$$A_0^{\text{inner}} = \begin{bmatrix} 0{,}558 & -0{,}013 & 4{,}808\cdot 10^{-3} \\ -3{,}942 & 0{,}463 & -0{,}058 \\ -63{,}462 & 5{,}15 & -0{,}788 \end{bmatrix}, \quad A_2^{\text{inner}} = \begin{bmatrix} 0{,}558 & 0{,}013 & 4{,}808\cdot 10^{-3} \\ 3{,}942 & 0{,}463 & 0{,}058 \\ -63{,}462 & -5{,}15 & -0{,}788 \end{bmatrix};$$

для $L \geq 1$ (на левом конце отрезка аппроксимации):

$$A_1^{\text{left}} = \begin{bmatrix} 6{,}165 & 0{,}655 & 0{,}036 \\ -32{,}056 & -2{,}687 & -0{,}113 \\ -712{,}994 & -74{,}935 & -4{,}12 \end{bmatrix}, \quad A_2^{\text{left}} = \begin{bmatrix} -0{,}415 & -0{,}028 & -9{,}259\cdot 10^{-4} \\ -31{,}744 & -2{,}981 & -0{,}148 \\ 337{,}994 & 31{,}296 & 1{,}537 \end{bmatrix};$$

для $L \geq 1$ (на правом конце отрезка аппроксимации):

$$A_0^{\text{right}} = \begin{bmatrix} -0{,}415 & 0{,}028 & -9{,}259\cdot 10^{-4} \\ 31{,}744 & -2{,}981 & 0{,}148 \\ 337{,}994 & -31{,}296 & 1{,}537 \end{bmatrix}, \quad A_1^{\text{right}} = \begin{bmatrix} 6{,}165 & -0{,}655 & 0{,}036 \\ 32{,}056 & -2{,}688 & 0{,}113 \\ -712{,}994 & 74{,}935 & -4{,}12 \end{bmatrix};$$

для $L = 0$ (в центре отрезка аппроксимации):

$$A_0^{\text{center}} = \begin{bmatrix} -4 & 0{,}229 & -0{,}029 \\ 84 & -5{,}714 & 0{,}657 \\ -828 & 65{,}143 & -7{,}171 \end{bmatrix}, \quad A_2^{\text{center}} = \begin{bmatrix} -4 & -0{,}229 & -0{,}029 \\ -84 & -5{,}714 & -0{,}657 \\ -828 & -65{,}143 & -7{,}171 \end{bmatrix}.$$

При этом

$$H_1 = \mathrm{diag}(4,2,1)/4, \quad H_0 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 32 & 60 & 0 \\ -10 & -14 & 24 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 32 & -60 & 0 \\ 10 & -14 & -24 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что при $L > 1$ условия даже слабого диагонального преобладания [10] нигде не выполняются кроме первой и последней строк. Тем не менее прямое вычисление матриц T_i позволяет утверждать, что для любого уровня разрешения L они являются невырожденными, что на практике означает корректность представленного выше монотонного варианта алгоритма матричной прогонки (5)–(7).

Численный пример с двумя разрывами первого рода и изломом. Положим

$$\psi_1^0(x) = 0{,}922 M_{1,\,0}^0(x);\quad \psi_2^0(x) = 13{,}125 M_{1,\,1}^0(x);\quad \psi_3^0(x) = 147{,}537 M_{1,\,2}^0(x);$$

$$\psi_{i\,-\,2}^L(x) = 0{,}236\cdot 2^{L/2} M_{i/3,\,0}^L(x);\quad \psi_{i\,-\,1}^L(x) = 2{,}476\cdot 2^{L/2} M_{i/3,\,1}^L(x);$$

$$\psi_i^L(x) = 49{,}321\cdot 2^{L/2} M_{i/3,\,2}^L(x),\quad i = 3{,}3\cdot 2^L,\ L \ge 1;$$

$$\psi_{i\,-\,2}^L(x) = 2{,}226\cdot 2^{L/2} M_{i/3,\,0}^L(x);\quad \psi_{i\,-\,1}^L(x) = 10{,}999\cdot 2^{L/2} M_{i/3,\,1}^L(x);$$

$$\psi_i^L(x) = 233{,}334\cdot 2^{L/2} M_{i/3,\,2}^L(x),\quad i = 6, 9, \ldots, 3\cdot 2^L - 3,\ L \ge 2.$$

Заметим, что $\psi_i^L(x)$ нормированы так, что $\|\psi_i^L(x)\|_{L_2(0,\,1)} = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, 3\cdot 2^L$.

Для $x \in [0, 1]$, полагая на верхнем уровне разрешения $L = 5$, находим длину шага сетки $h = 2^{-5} = 1/32$. Для функции Хартена [15]

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)\sin(3\pi x), & x \le 1/3,\\ |\sin(4\pi x)|, & 1/3 < x \le 2/3,\\ -(1/2)\sin(3\pi x), & x > 2/3 \end{cases}$$

коэффициенты нормированного вейвлет-базиса равны последовательно:

$$\begin{aligned} D^4 = [&4{,}515\cdot 10^{-5},\ -6{,}792\cdot 10^{-5},\ 2{,}457\cdot 10^{-5},\ 1{,}425\cdot 10^{-5},\ 8{,}733\cdot 10^{-6},\ -2{,}094\cdot 10^{-6},\\ &-8{,}071\cdot 10^{-5},\ -4{,}688\cdot 10^{-5},\ 1{,}187\cdot 10^{-5},\ 0{,}0004453,\ 0{,}0002572,\ -6{,}566\cdot 10^{-5},\\ &-0{,}002433,\ -0{,}00126,\ 0{,}0003901,\ 0{,}003661,\ -0{,}008702,\ 0{,}001194,\\ &-0{,}0007111,\ 0{,}00032,\ 9{,}509\cdot 10^{-5},\ 0{,}0007808,\ 0{,}001585,\ 0{,}0001964,\ 0{,}0007707,\\ &-0{,}001589,\ 0{,}0001978,\ -0{,}0006639,\ -0{,}0002969,\ 8{,}73\cdot 10^{-5},\ 0{,}0034,\\ &0{,}009346,\ 0{,}00146,\ -0{,}002521,\ 0{,}001301,\ 0{,}0004052,\ 0{,}0004615,\\ &-0{,}0002665,\ -6{,}806\cdot 10^{-5},\ -8{,}366\cdot 10^{-5},\ 4{,}859\cdot 10^{-5},\ 1{,}23\cdot 10^{-5},\ 1{,}476\cdot 10^{-5},\\ &-9{,}052\cdot 10^{-6},\ -2{,}169\cdot 10^{-6},\ 4{,}682\cdot 10^{-5},\ 7{,}044\cdot 10^{-5},\ 2{,}548\cdot 10^{-5}]^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^3 = [&0{,}009498,\ -0{,}01424,\ 0{,}005098,\ 0{,}002722,\ 0{,}002674,\ 0{,}0001801,\ -0{,}03149,\\ &-0{,}005056,\ 0{,}01908,\ -0{,}002432,\ -0{,}00113,\ 0{,}0003206,\ -0{,}002828,\ 0{,}001103,\\ &0{,}0004455,\ -0{,}03293,\ 0{,}002208,\ 0{,}02075,\ 0{,}002868,\ -0{,}002785,\ 0{,}0001764,\\ &0{,}01,\ 0{,}015,\ 0{,}005372]^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2 = [&-0{,}08872,\ 0{,}1423,\ -0{,}06243,\ 0{,}02528,\ -0{,}04265,\ -0{,}01368,\ 0{,}02009,\ 0{,}05193,\\ &-0{,}008241,\ -0{,}07657,\ -0{,}1239,\ -0{,}05608]^T; \end{aligned}$$

$$D^1 = [2{,}495,\ -3{,}678,\ 1{,}324,\ 2{,}313,\ 3{,}479,\ 1{,}273]^T;$$

$$D^0 = [-0{,}6133,\ 0{,}04802,\ 0{,}7592]^T.$$

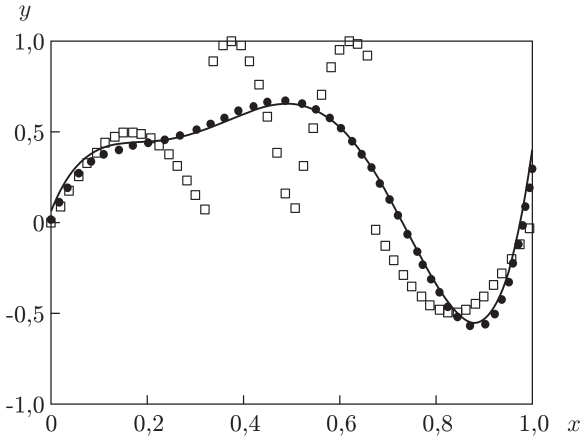

Рис. 1. Сравнение результатов вейвлет-синтеза значений сглаживающего многочлена пятой степени (сплошная кривая) и МНК-многочлена пятой степени (точки), построенного по значениям функции Хартена (квадраты)

На последнем этапе алгоритма вейвлет-анализа находим значения сплайна $S^0(x)$ и двух производных в концах отрезка:

$$C^0 = [0{,}061,\ 6{,}768,\ -92{,}789,\ 0{,}402,\ 18{,}937,\ 241{,}383]^T.$$

Самые большие числа обусловленности равны $2{,}7 \cdot 10^4$, $3{,}6 \cdot 10^5$, $2{,}9 \cdot 10^4$ соответственно для матриц T_2, T_{2L}, T_{2L+1}, $L = 3, 4, 5$.

Если аннулировать все вейвлет-коэффициенты, то получится некоторый сглаживающий многочлен пятой степени $S^0(x)$, весьма незначительно отличающийся от МНК-решения (рис. 1), представленного сплайн-коэффициентами

$$C^0 = [0{,}017,\ 6{,}448,\ -83{,}458,\ 0{,}313,\ 18{,}022,\ 231{,}555]^T.$$

Результаты синтеза коэффициентов эрмитового сплайна пятой степени $S^5(x)$ при условии обнуления вейвлет-коэффициентов по модулю меньших величин $0{,}61h^{L/2}$, $0 \leq L \leq$ ≤ 4, представлены на рис. 2 (здесь сплошной линией обозначаются исходная функция и её производная). При этом достигается коэффициент сжатия [16] $K = 99/45 \approx 2$.

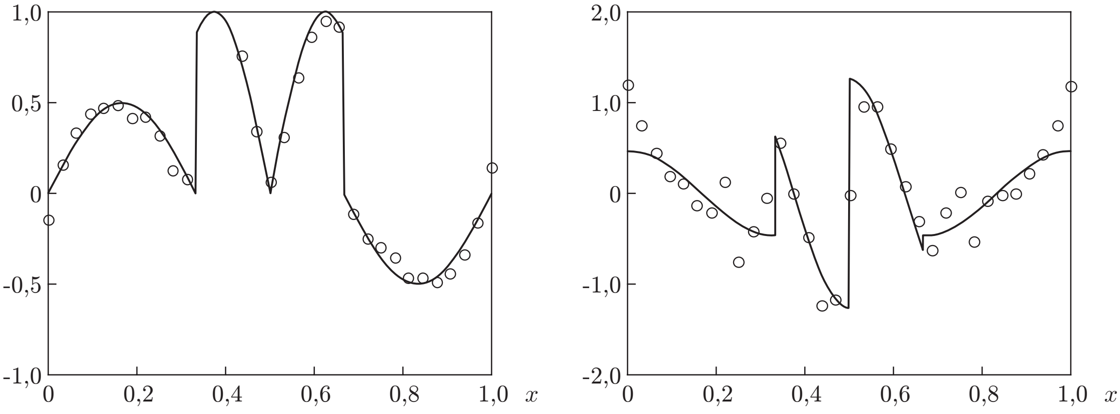

Рис. 2. Сравнение результатов синтеза узловых значений (кружки): сплайна пятой степени (a) и первой производной (b) для случая функции Хартена

Заключение. В данной работе представлена общая схема построения эрмитовых сплайн-мультивейвлетов, ортогональных многочленам, основанная на решении систем линейных алгебраических уравнений с блочно-трёхдиагональной матрицей методом матричной прогонки. Полученные результаты предоставляют широкие возможности для оптимизации методов анализа и синтеза сигналов и изображений [17, 18].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы.

1. Пусть $L \geq 1$ и носители мультивейвлетов $[x_{2i-1}, x_{2i+p+1}]$, $p \geq 1$, полностью располагаются внутри отрезка $[0, 2^L]$. При $p \geq 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1 - [p/2]$ имеет место разложение (2). Подставим его в (1) и вычислим все необходимые интегралы, учитывая при этом, что подынтегральные выражения обращаются в нуль вне носителей вейвлетов. Условия ортогональности (1) определяют однородную систему $2r+2$ уравнений относительно коэффициентов мультивейвлета $M_{i,k}^L(x)$. В силу линейной независимости на интервалах $[x_{2i-1}, x_{2i+p+1}]$ базисных функций $N_{2i+l,k}^{L+1}(x)$, $l = 0, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, p$, и поверочных функций [1] x^m, $m = 0, 1, \ldots, 2r+1$, ранг полученной системы равняется $\min[2r+2, (r+1)(p+1)]$. Если предположить, что носитель мультивейвлета равен трём шагам сетки Δ^{L+1}, т. е. $p = 1$, то однородная система становится квадратной и, будучи невырожденной, может иметь только тривиальное решение. Поэтому будем далее считать, что носитель мультивейвлета равен четырём шагам сетки Δ^{L+1}, т. е. мультивейвлет построен из $3r+3$ базисных сплайнов. Здесь ранг матрицы $2r+2$. Тогда однородная система $2r+2$ уравнений с $3r+3$ неизвестными имеет $r+1$ линейно независимых частных решений. При этом количество полученных для каждого номера i мультивейвлетов, полностью лежащих внутри отрезка $[0, 2^L]$, равно $(r+1)(2^L - 2) = (r+1)2^L - 2(r+1)$, что на $2(r+1)$ меньше разности между размерностями пространств V_{L+1} и V_L: $(r+1)(2^{L+1}+1) - (r+1)(2^L+1) = (r+1)2^L$.

Вблизи концов отрезка интервалы интегрирования не выходят за его пределы. Поэтому с учётом того что по краям отрезка от выступающих за его концы функций $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_r(t)$ остаётся по половинке, граничные мультивейвлеты отличаются от мультивейвлетов, предложенных в данной работе, при условии ортогональности многочленам $(2r+1)$-й степени. Аналогичные рассуждения приводят к двум системам линейно независимых функций $M_{i,k}^L(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r$, отдельно на левом и на правом концах, дополняющих до базиса построенную выше мультивейвлет-систему.

2. Пусть $L = 0$. Вычисления снова дают $r+1$ линейно независимых частных решений, которые образуют базис в пространстве $V_1 - V_0$ размерностью $(r+1)3 - (r+1)2 = (r+1)$.

3. Окончательно в соответствии с правилами линейной алгебры выписываются матричные формулы для вычисления коэффициентов эрмитовых мультивейвлетов нечётной степени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
2. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. **Малла С.** Вейвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 2005. 671 с.
4. **Переберин А. В.** О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. С. 133–158.

5. **Strela V., Heller P. N., Strang G. et al.** The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Process. 1999. **8**, N 4. P. 548–563.
6. **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Eng. Analys. Boundary Elements. 2001. **25**, N 3. P. 149–164.
7. **Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.** Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.
8. **Шумилов Б. М.** Мультивейвлеты эрмитовых сплайнов третьей степени, ортогональные кубическим многочленам // Математическое моделирование. 2013. № 4. С. 17–28.
9. **Шумилов Б. М., Кудуев А. Ж.** Новый тип мультивейвлетов пятой степени, ортогональных многочленам пятой степени // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4. С. 108–116.
10. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
11. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
12. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
13. **Ортега Дж.** Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 376 с.
14. **Васильева Е. А.** Достаточные условия корректности метода матричной прогонки // Изв. КГТУ. 2011. № 20. URL: http://www.klgtu.ru/science/magazine/2011_20/14.doc (дата обращения: 4.02.2014).
15. **Arandiga F., Baeza A., Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2004. **9**, N 2. P. 263–273.
16. **Воскобойников Ю. Е.** Оптимизация алгоритмов вейвлет-фильтрации с многопараметрическими пороговыми функциями // Автометрия. 2014. **50**, № 6. С. 69–79.
17. **Шумилов Б. М., Бекмуратов А. Т., Кудуев А. Ж. и др.** Вейвлет-преобразование и сжатие данных лазерного сканирования автомобильных дорог // Вестн. ТГАСУ. 2011. № 4. С. 228–238.
18. **Шумилов Б. М., Байгулов А. Н., Абдыкалык кызы Ж.** Алгоритм и программа вейвлет-моделирования поверхностей автомобильных дорог // Вестн. ТГАСУ. 2014. № 1. С. 142–152.

Поступила в редакцию 4 февраля 2014 г.