

УДК 53.072

## Применение нового численного алгоритма решения уравнений Навье–Стокса для моделирования работы вискозиметра типа физического маятника

В.Я. Рудяк<sup>1,2</sup>, А.В. Минаков<sup>3</sup>, А.А. Гаврилов<sup>4</sup>, А.А. Дектерев<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Бейкер Атлас, Российский научный центр, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>3</sup>Политехнический институт Сибирского федерального университета (СФУ), Красноярск

<sup>4</sup>Красноярский филиал Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН

Предложена модель, описывающая работу сенсора вискозиметра типа физического маятника. Модель позволяет получать данные о вязкости жидкости непосредственно по измерению устанавливаемой в ней частоты колебаний сенсора или амплитуды этих колебаний. Для описания работы сенсора разработан численный алгоритм расчета. Данный метод позволяет решать широкий класс трехмерных ламинарных задач течения жидкости с подвижными твердыми телами произвольной геометрии. Представлены результаты тестирования предложенной численной методики.

### ВВЕДЕНИЕ

На практике в ряде технологических приложений и в исследовательских целях для измерения вязкости газа, жидкости или флюида нередко используются вискозиметры, принцип работы которых основан на использовании эффекта взаимодействия сенсора с жидкостью. Примером такого прибора является так называемый вискозиметр типа “осциллирующее тело” (oscillating-body) (см. [1–3] и цитируемую там литературу). Теория интерпретации экспериментальных данных таких вискозиметров основана на классическом гидродинамическом решении о колебательном движении бесконечной пластины [4] (см., например, [1–3, 5]). При этом, конечно, трудно учесть форму сенсора, его конечные размеры и т. п. Есть и еще одна проблема. Вязкость  $\mu$  жидкости при такой интерпретации фактически не определяется непосредственно. Она ищется по глубине проникновения  $\delta = \sqrt{2\mu / \rho\omega}$ , которая зависит не только от вязкости, но и от плотности жидкости  $\rho$  (здесь  $\omega$  — частота колебаний). Обычно способ определения вязкости состоит в измерении добротности осциллятора, однако обратная величина добротности также пропорциональна корню квадратному из произведения вязкости на плотность. Поэтому чтобы определить вязкость, необходимо независимо измерить две

какие-либо величины, зависящие и от вязкости, и от плотности. Вместе с тем реально существуют сенсоры, представляющие собой фактически некоторый физический маятник, колеблющийся в жидкости. Рассматривая динамику такого осциллятора в жидкости, можно попытаться создать более простую методологию интерпретации производимых измерений. Для этого, однако, необходимо построить, во-первых, достаточно простую физическую модель процесса, а во-вторых, научиться численно моделировать динамику такого осциллятора в жидкости, что позволило бы исследовать различные режимы его движения. Сложность численного моделирования подобной задачи состоит в том, что приходится решать трехмерную задачу с подвижной границей погруженного в жидкость твердого тела.

Цель настоящей работы и состоит в разработке достаточно простой физико-математической модели работы сенсора вискозиметра указанного типа и метода численного моделирования его поведения в различных режимах течения.

### 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СЕНСОРА ВИСКОЗИМЕТРА ТИПА “ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЕ ТЕЛО”

Рассмотрим произвольный физический маятник, совершающий колебания в поле тяжести относительно некоторой неподвижной точки  $O$ . Система имеет одну степень свободы, маятник движется в вертикальной плоскости и его движение проще всего описать углом отклонения  $\varphi$  центра тяжести маятника от вертикальной оси. Уравнение движения тогда имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z, \quad (1)$$

где  $I_z$  — момент инерции физического маятника относительно оси его вращения  $OZ$ , проходящей через точку  $O$ , а  $M_z$  — главный момент внешних сил относительно оси  $OZ$ , приложенных к маятнику.

На маятник действует две силы: тяжести  $mg$  и сопротивления жидкости  $F_f$ . В результате уравнение (1) сводится к следующему:

$$I_z \ddot{\varphi} = -F_f L \cos \varphi - mgL \sin \varphi, \quad (1a)$$

где  $L$  — расстояние от точки  $O$  до центра тяжести маятника. Для малых колебаний это уравнение существенно упрощается:

$$I_z \ddot{\varphi} = -F_f L - mgL \varphi. \quad (1б)$$

Чтобы замкнуть уравнения (1a) или (1б), необходимо задать еще силу  $F_f$ . При малых числах Рейнольдса она описывается следующим выражением:  $F_{fi} = 4\pi\mu d P_{ij} V_j$  [6], где  $d$  — характерный линейный размер тела,  $\mathbf{V}$  — скорость центра масс тела, а тензорный коэффициент  $P_{ij}$  зависит только от формы тела. Для целей настоящей работы было изучено несколько типов физических маятников: тяжелая сфера радиуса  $R$  на невесомом стержне длиной  $l$ ; тяжелая сфера радиуса  $R$  на однородном весомерном стержне длиной  $l$  и радиусом  $r$ ; весомерный цилиндр длиной  $l$  и радиусом  $r$ .

С учетом явного вида силы сопротивления  $F_f$  уравнение (1б) свободных колебаний физического маятника принимает вид

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \quad (2)$$

$$2\beta = \frac{4\pi\mu d P}{I_z}, \quad \omega^2 = \sqrt{\frac{mgL}{I_z}}, \quad P_{ij} = P\delta_{ij},$$

где  $P$  — некоторая константа, зависящая от формы тела.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\varphi(t) = Ae^{-\beta t} \sin(kt + \alpha), \quad (3)$$

где постоянные  $A$  и  $\alpha$  определяются начальными условиями, а частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}. \quad (4)$$

Таким образом, характерная частота колебаний зависит только от вязкости жидкости и может измеряться непосредственно.

В случае, если возбуждаются вынужденные колебания физического маятника, уравнение движения содержит в правой части соответствующую гармоническую силу

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = h \sin(pt + \delta). \quad (5)$$

Решение этого уравнения описывается функцией

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) + \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}} \sin(pt + \gamma), \quad (6)$$

постоянные снова определяются из начальных условий. В условиях резонанса  $p = k$  и амплитуда вынужденных колебаний равна  $A = h/(2\beta k)$ . Поскольку  $\beta \sim \mu$ , то резонанс наблюдается на частоте  $k = \sqrt{\omega^2 - a^2 \mu^2}$ , а его амплитуда  $A = h / (2a\mu \sqrt{\omega^2 - a^2 \mu^2})$ , где  $a$  — новая очевидная постоянная.

## 2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Модель, описанная в предыдущем разделе, достаточно проста и легко реализуема, однако имеет вполне определенную область применения. Прежде всего, это малые числа Рейнольдса. Далее, течение должно быть по крайней мере квазистационарным. Наконец, частоты колебаний сенсора должны быть не слишком высокими. Чтобы не зависеть от указанных ограничений, необходимо иметь альтернативный способ описания динамики сенсора. Поскольку выражение для силы, действующей на сенсор, в общем случае не известно, то аналитически соответствующее описание не построить, и следует использовать тот или иной метод численного решения задачи. Описанию такого метода и посвящен настоящий раздел.

Известно достаточно много методов, которые принципиально можно было бы применить для решения такой задачи. Это, прежде всего, методы, в которых граница поверхности твердого тела отслеживается узлами расчетной сетки (см., например, [7, 8]). Естественно, при таком подходе расчет перемещения или деформации тела в пространстве требует пересчета расчетной сетки на каждом временном шаге, что весьма затратно. Кроме того, поскольку форма тела и траектория его движения часто очень сложны, то использование таких методов обычно сопровождается существенным искривлением расчетных ячеек, что приводит к дополнительной погрешности в результатах расчета. Использование же адаптивной сетки существенно усложняет алгоритм, а часто делает его и неустойчивым.

Другой класс алгоритмов составляют методы, связанные с фиксированной декартовой сеткой. Здесь наиболее известен метод отслеживания поверхностей [8, 9]. Основная идея метода состоит в том, что граница поверхности тела отсле-

живается маркерами, которые перемещаются вместе с телом. В расчетной ячейке, в которую такой маркер попал, специальным образом интерполируется значение скорости жидкости с учетом информации о геометрии и скорости тела в ближайших узлах. Данный подход лишен описанных выше проблем с расчетной сеткой. Основным его недостатком является погрешность, связанная с интерполяцией скорости на границах. Стоит, однако, отметить, что метод продолжает непрерывно развиваться и широко используется в приложениях.

В последнее время в связи с возросшей вычислительной мощностью для решения задач взаимодействия жидкости и твердого тела стали активно использоваться так называемые бессеточные методы или методы частиц [8]. Основная идея этих методов состоит в том, что жидкость представляется конечным числом взаимодействующих частиц, движение которых подчиняется уравнениям движения. Хотя идеология этих методов продолжает интенсивно развиваться, реальное их применение для решения сложных пространственных задач все еще весьма ограничено.

Еще одним распространенным способом совместного решения задач вихревой гидродинамики и динамики движения твердого тела в жидкой среде является подход, связанный с рассмотрением подвижных многоблочных скользящих сеток. Данный метод и результаты его применения достаточно хорошо изложены в монографии [10].

В настоящей работе для определения силы, действующей в потоке на тело произвольной формы, и, тем самым, для моделирования эволюции сенсора вискозиметра используется разрабатываемый авторами метод переноса доли твердой фазы, идеология которого восходит к классическому алгоритму Хирта и Николса [11] (метод VOF, Volume of Fluid). Суть предлагаемого метода состоит в том, что жидкость и твердое тело рассматриваются как единая двухкомпонентная среда. Для описания движения каждой компоненты совместно решается соответствующая система уравнений движения. Для организации взаимодействия между твердой и жидкой фазами в расчетных ячейках, занятых телом, в уравнение закона сохранения импульса жидкой среды вносится сила сопротивления, обеспечивающая равенство скорости потока и скорости тела в данных ячейках.

Пространственное распределение твердой фазы в расчетной области описывается функцией объемной доли твердой фазы в расчетной ячейке  $F(x, y, z, t)$ , которая определяется так:

$$F(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & \text{если в ячейке нет твердого тела,} \\ 1, & \text{если ячейка полностью заполнена твердым телом,} \end{cases}$$

и  $0 < F < 1$ , если через ячейку проходит граница тела. Ее эволюция определяется уравнением

$$(\partial F / \partial t) + \mathbf{v}_s \cdot \nabla F = 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{v}_s$  — скорость движения твердого тела в точке с координатами  $\mathbf{r}$ , которая складывается из скорости перемещения центра масс и угловой скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс  $r_{CM}$ :  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{CM})$ . Скорость движения центра масс  $\mathbf{v}_{CM}$  и угловая скорости его вращения  $\boldsymbol{\omega}$  находятся из уравнений движения тела

$$m\dot{\mathbf{v}}_{CM} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i \mathbf{M}_i, \quad (8)$$

где  $m$  — масса тела,  $\mathbf{I}$  — тензор моментов инерции тела относительно его центра масс,  $\mathbf{F}_i$  — силы, действующие на тело, в том числе и сила сопротивления со стороны жидкости,  $\mathbf{M}_i$  — моменты этих сил.

Для нахождения сил и моментов сил сопротивления, действующих на тело со стороны потока, решается система уравнений гидродинамики. Для целей настоящей работы достаточно рассмотреть изотермические течения, которые описываются системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_s, \quad (9)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial r_k} \delta_{ij},$$

а  $\mathbf{F}_s$  — сила, обусловленная наличием твердого тела. Она определяется соотношением  $\mathbf{F}_s = -k(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)F$ . Входящий сюда коэффициент  $k$  задается из условия равенства скорости потока и твердого тела в ячейках, занятых телом.

В отсутствие массовых сил и пар сил в правых частях уравнений (8) будет присутствовать лишь сила сопротивления  $\mathbf{F}_f$  действующая на тело со стороны жидкости, и соответствующий момент. Эта сила в свою очередь складывается из сил давления  $\mathbf{F}_p$  и сил трения  $\mathbf{F}_\tau$ :  $\mathbf{F}_f = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$ , где

$$\mathbf{F}_p = -\int_S p \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{F}_\tau = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} dS. \quad (10)$$

Здесь  $S$  — поверхность твердого тела, а  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{t}$  — единичные векторы, направленные, соответственно, по нормали к поверхности в данной точке и по касательной к ней.

Моменты этих сил вычисляются очевидным образом:

$$\mathbf{M}_p = -\int_S p (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{M}_\tau = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{CM}) \times (\boldsymbol{\tau} \mathbf{t}) dS. \quad (11)$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

Реализация решения задачи сводится, таким образом, к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных (7), (9) и обыкновенных дифференциальных уравнений (8). Решение последней системы уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты второго порядка.

Разностный аналог конвективно-диффузионных уравнений находится с помощью метода конечного объема для структурированных многоблочных сеток [12], при применении которого автоматически выполняется консервативность полученной схемы. Для аппроксимации конвективных членов использовались следующие схемы: гибридная схема первого порядка аппроксимации [12], противопоточная схема второго порядка QUICK [10], TVD (Total Variation Diminishing) схема второго порядка [13]. Диффузионные потоки и источниковые члены аппроксимировались со вторым порядком точности. Связь между полями скорости и давления реализуется при помощи SIMPLEC процедуры на совмещенных сетках. Для устранения осцилляций поля давления используется подход Рхи–Чоу [14]. Полученная система

разностных уравнений решается итерационным способом с применением явного метода Булеева, ускоренного методом сопряженных невязок [15].

Ключевым пунктом данного алгоритма является решение уравнения (1). Для его интегрирования использовалось несколько различных методов: две явных и две неявных схемы, описанных ниже.

Первая использовавшаяся явная схема описывается соотношением

$$F^{n+1} = F^n - \frac{\tau}{h_x} (v_{xR} F_R - v_{xL} F_L)^n - \frac{\tau}{h_y} (v_{yD} F_D - v_{yG} F_G)^n - \frac{\tau}{h_z} (v_{zT} F_T - v_{zB} F_B)^n + \tau F^n \nabla \cdot \mathbf{v}_s,$$

где  $v_{xK}, v_{yK}, v_{zK}$  — компоненты вектора скорости твердого тела на  $K$ -й грани контрольного объема,  $h$  — шаг расчетной сетки,  $\tau$  — временной шаг, найденный из условия Куранта,  $n$  — номер временного слоя,  $F_K$  — значение доли твердой фазы на соответствующей грани контрольного объема.

Применялась также явная схема с локально одномерным расщеплением по пространству [16]:

$$F^{n+1} = \tilde{F} - \frac{\tau}{h_z} (v_{zT} \tilde{F}_T - v_{zB} \tilde{F}_B)^n + \tau F^n \nabla \cdot \mathbf{v}_s,$$

$$\tilde{F} = \hat{F} - \frac{\tau}{h_y} (v_{yD} \hat{F}_D - v_{yG} \hat{F}_G), \quad \hat{F} = F^n - \frac{\tau}{h_x} (v_{xR} F_R^n - v_{xL} F_L^n).$$

Величина доли твердой фазы на грани контрольного объема определяется противопоточным способом. Например, для правой грани имеем

$$F_R = \begin{cases} F_{i,j,k} + \partial F_R^+, & \text{если } u_R > 0, \\ F_{i+1,j,k} + \partial F_R^-, & \text{если } u_R < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Первое слагаемое этого выражения соответствует схеме первого порядка UDS, обеспечивающей устойчивость расчета, второе слагаемое — корректирующая добавка, повышающая порядок аппроксимации. Величина этой добавки находится по формуле [13]

$$\partial F_R^+ = \frac{1}{2} \Psi \left( \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k}}{F_{i,j,k} - F_{i-1,j,k}} \right) (F_{i,j,k} - F_{i-1,j,k}), \quad (13)$$

где  $\Psi(r)$  — функция ограничитель. Выбор функции ограничителя задает конкретную схему аппроксимации конвективного потока соответствующего порядка точности. В работе использовались следующие схемы аппроксимации: противопоточная схема первого порядка UDS —  $\Psi(r) = 0$ ; противопоточная схема второго порядка QUICK —  $\Psi(r) = (3+r)/4$ ; схема TVD Superbee [10] —  $\Psi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$ .

Использовались также две неявные схемы: первого порядка

$$\tau^{-1} (F^{n+1} - F^n) + \mathbf{v}_s^n \nabla F^{n+1} = 0$$

(причем последнее уравнение решалось итерационным способом при помощи метода неполной факторизации [15]) и неявная схема второго порядка

$$(3F^{n+1} - 4F^n + F^{n-1}) / (2\tau) + \mathbf{v}_s^n \nabla F^{n+1} = 0.$$

Для компьютерной реализации математической модели использовался, разрабатываемый авторами программный комплекс “σFlow”. Пакет программ включает в себя: модуль построения геометрии и расчетных сеток, систему визуального анализа пространственных полей и постпроцессинга, модуль решения уравнений гидродинамики.

#### 4. ТЕСТИРОВАНИЕ РАСЧЕТНОГО АЛГОРИТМА

##### 4.1. Тестирование методов решения уравнения (7)

Верификация схем аппроксимации уравнения конвективного переноса проводилась на большом числе как одномерных, так и пространственных задач. Здесь приводятся три наиболее характерных примера, на которых хорошо проявляются различия рассмотренных методов.

**Перенос кольца.** Твердое кольцо, в начальный момент времени расположенное в левом нижнем углу расчетной области, переносится однородным потоком жидкости, направленным по диагонали расчетной области (см. рис. 1). Кольцо не воздействует на жидкость. Скорость потока 1 м/с. Естественно, что в такой постановке решением задачи будет сдвиг кольца вверх по диагонали на расстояние, пропорциональное времени расчета. Размеры расчетной области 1×1 м. Внешний радиус кольца 0,15 м, внутренний — 0,1 м. Для расчета использовалась сетка, состоящая из 80×80 узлов. Число Куранта  $\tau U / h$  задавалось равным 0,8, где  $\tau, h$  — разностные шаги соответственно по времени и по пространству, а  $U$  — максимальное значение поля скорости. Результаты расчетов с помощью различных схем представлены на рис. 1. Здесь время расчета равно 0,5 с, рис. 1 получен с использованием: *a* — неявной схемы QUICK, *b* — явной TVD схемы Superbee с локально одномерным расщеплением, *c* — явной TVD схемы Superbee, *d* — явной схемы первого порядка UDS.

**Перенос квадрата.** Здесь постановка задачи такая же, что и в предыдущем примере. Сторона квадрата равна 0,2 м, сетка — 70×70 узлов. Результаты расчета приведены на рис. 2. Время расчета 0,6 с, рис. 2 получен с использованием: *a* — неявной схемы TVD схемы Superbee, *b* — явной TVD схемы Superbee с локально одномерным расщеплением, *c* — явной TVD схемы Superbee, *d* — явной схемы QUICK.

**Вращение квадрата.** В данной задаче твердый квадрат со стороной 0,3 м, расположенный в центре расчетной области, равномерно вращается относительно оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью 2 рад/с. Использовалась

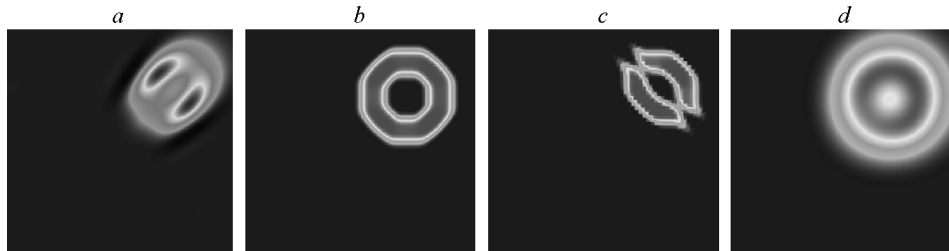


Рис. 1. Конвективный перенос кольца.

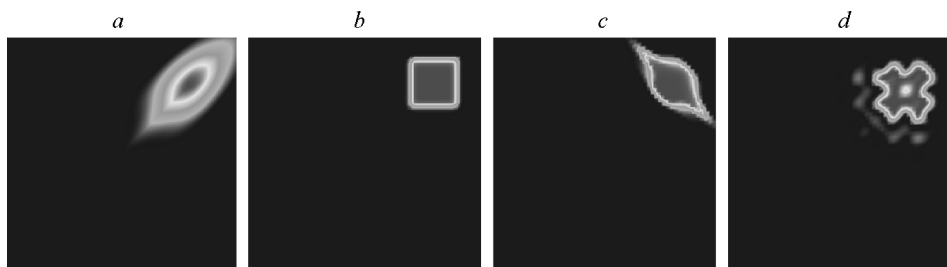


Рис. 2. Конвективный перенос квадрата.

сетка, состоящая из  $70 \times 70$  узлов. Результаты расчетов с помощью различных схем представлены на рис. 3. Здесь время расчета равно 100 с, рис. 3 получен с использованием: *a* — неявной схемы QUICK, *b* — явной TVD схемы Superbee с локально одномерным расщеплением, *c* — явной TVD схемы Superbee, *d* — неявной TVD схемы Superbee со вторым порядком аппроксимации по времени.

Во всех рассмотренных примерах нас интересует адекватность моделирования динамики твердого тела и его формы. Анализ представленных рисунков показывает, что применение схемы первого порядка аппроксимации приводит к существенному размыванию численного решения. Так, например, для задачи с кольцом (см. рис. 1, *d*) амплитуда решения в течении 50 временных шагов уменьшается примерно в два раза. Естественно, что использование такого рода схем для решения рассматриваемого класса задач нецелесообразно. Использование для решения уравнения (7) немонокотных противопоточных схем высокого порядка, таких как QUICK, приводит к возникновению осцилляций решения (см. рис. 1, *a*), погасить которую удается только уменьшением временного шага или сгущением расчетной сетки. Поэтому применение данного типа схем для решения поставленной задачи также нежелательно. Локально одномерное расщепление пространственного оператора позволяет существенно улучшить качество решения многомерной задачи. Этот факт становится очевиден, если сравнить рисунки “*b*” и “*c*” для всех рассмотренных тестовых задач. Наконец, стоит отметить интересные различия в поведении явной и неявной реализации рассмотренных схем аппроксимации. При решении уравнения переноса неявная схема “размазывает” решение в направлении вектора скорости (см. рис. 2, *a*), явная схема “растягивает” его в перпендикулярном направлении (см. рис. 2, *c*). Кроме того, неявная схема оказалась существенно более диссипативной, чем явная, поэтому для решения уравнения (7) предпочтительнее использовать явную схему, несмотря на то, что временной шаг при этом должен быть ограничен условием Куранта. По итогам тестовых расчетов лучшей для решения уравнения (7) оказалась явная TVD схема Superbee с использованием локально одномерного расщепления. Все представленные ниже результаты расчетов получены с помощью данной схемы.

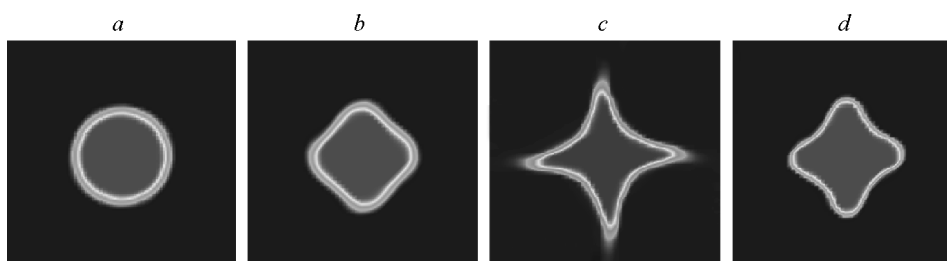


Рис. 3. Твердотельное вращение квадрата.



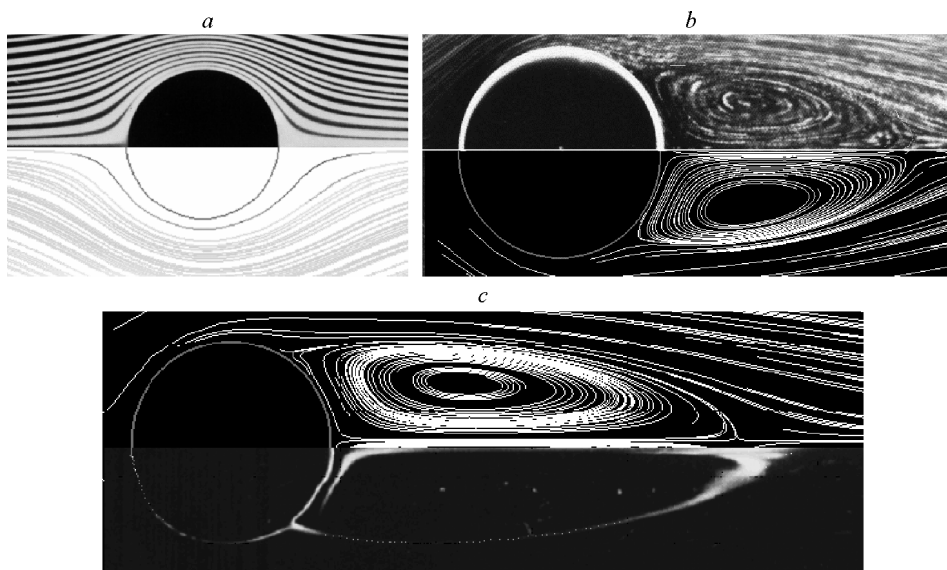


Рис. 4. Обтекание цилиндра. Линии тока при разных числах Рейнольдса.  $Re = 0,5$  (a), 26 (b), 41 (c).

## 4.2. Тестирование решения гидродинамической задачи

Тестирование алгоритма в целом проводилось на решении типичных гидродинамических задач: обтекание цилиндра и шара.

### 4.2.1. Ламинарное обтекание цилиндра

Цилиндр радиуса  $R = 0,25$  м обтекается вязкой жидкостью. Скорость набегающего потока  $U = 1$  м/с. Вязкость жидкости определяется числом Рейнольдса  $Re = UD/\nu$  ( $D = 2R$ ). Размеры расчетной области —  $5 \times 5$  м. Для расчета использовалась равномерная, прямоугольная декартова сетка, состоящая из  $100 \times 100$  узлов. Тестовые расчеты проводились для стационарных течений в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,1 до 40, а для нестационарных — от 50 до 200.

На рис. 4 приведено сопоставление расчетных линий тока для разных чисел Рейнольдса с фотографиями из работы [17]. На рис. 4, a, b экспериментальным данным соответствует верхняя картинка, а расчетным — нижняя, а на рис. 4, c — наоборот. Приведенные данные свидетельствуют о хорошем качественном согласовании расчетных и экспериментальных данных. Полученные результаты хорошо согласуются и количественно как с экспериментальными, так и с расчетными данными других авторов. В качестве примера в таблице проведено сопоставление рассчитанных коэффициентов сопротивления трения  $C_{xf}$  и давления  $C_{xp}$  при различных числах Рейнольдса с данными работы [18]. Здесь  $C_x$  — полный коэффициент сопротивления. Во всех случаях согласие оказывается достаточно хорошим.

Таблица

Данные расчета коэффициента сопротивления

Re	$C_{xf}$	$C_{xp}$	$C_x$	$C_{xf}$ [18]	$C_{xp}$ [18]	$C_x$ [18]
5	1,921	2,182	4,103	1,917	2,199	4,116
10	1,267	1,61	2,877	1,246	1,60	2,846
40	1,002	0,518	1,52	0,998	0,524	1,522

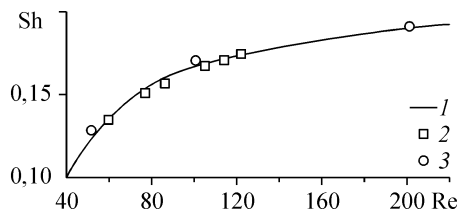


Рис. 5. Зависимость числа Струхалия от числа Рейнольдса при нестационарном обтекании цилиндра. Экспериментальные данные из работы [19] (1), расчет из работы [10] (2), наши данные, расчет (3).

На рис. 5 приведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных из [19] (1) по зависимости числа Струхалия  $Sh = D/UT$  от числа Рейнольдса при нестационарном обтекании цилиндра. Максимальное отклонение нашего расчета (3) от экспериментальных данных не превышает 3 % и находится в пределах точности эксперимента. Для сравнения здесь приведены также расчетные данные из монографии [10] (2), согласование с которыми также хорошее.

#### 4.2.2. Обтекание шара потоком вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса

Шар обтекается потоком вязкой жидкости со скоростью  $U$ . Как известно, при числах Рейнольдса меньших 0,5 такое обтекание можно описать законом Стокса. Сила сопротивления шара равна силе Стокса:  $F_s = 6\pi\mu RU$ . Коэффициент лобового сопротивления в этом случае определяется соотношением  $C_x = 24/Re$ . Сопоставление аналитических значений коэффициента лобового сопротивления с численными для разных чисел Рейнольдса представлено на рис. 6. Здесь аналитическому решению соответствует непрерывная кривая, а расчетным данным — кружки. Данные, полученные численно, и здесь хорошо согласуются с аналитическим решением.

#### 5. РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ СЕНСОРА ВИСКОЗИМЕТРА

Для практических целей было изучено движение нескольких видов сенсоров данного типа вискозиметра: тяжелый шарик на невесомом цилиндрическом стержне, тяжелый шарик на весоном цилиндрическом стержне, весоный цилиндрический стержень. Изучались как свободные, так и вынужденные колебания шарика и цилиндра. Число Рейнольдса варьировалось в диапазоне от 0 до 500. Во всех случаях при малых углах отклонения наблюдается хорошее согласование расчетных данных с аналитическими решениями (3) или (6). Стоит заметить, что, хотя указанные решения применимы лишь при малых углах отклонения сенсора, они хорошо описывают реальное поведение сенсора даже при достаточно больших амплитудах колебаний. В качестве иллюстрации на рис. 7, а представлено сопоставление расчетных данных с решением (3) (свободные колебания маятника в виде тяжелого шарика на невесомом цилиндрическом стержне) при  $\varphi_0 = 10^\circ$ . Соответствующая сила лобового сопротивления представлена на рис. 7, b.

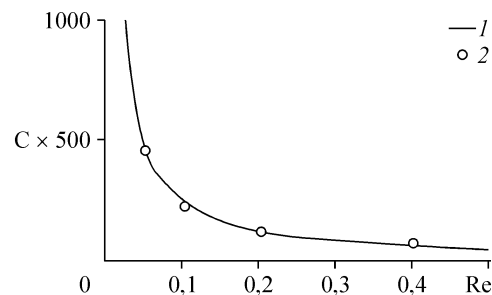


Рис. 6. Зависимость лобового коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса при стационарном обтекании шара. Аналитическое решение (1), расчетные данные (2).

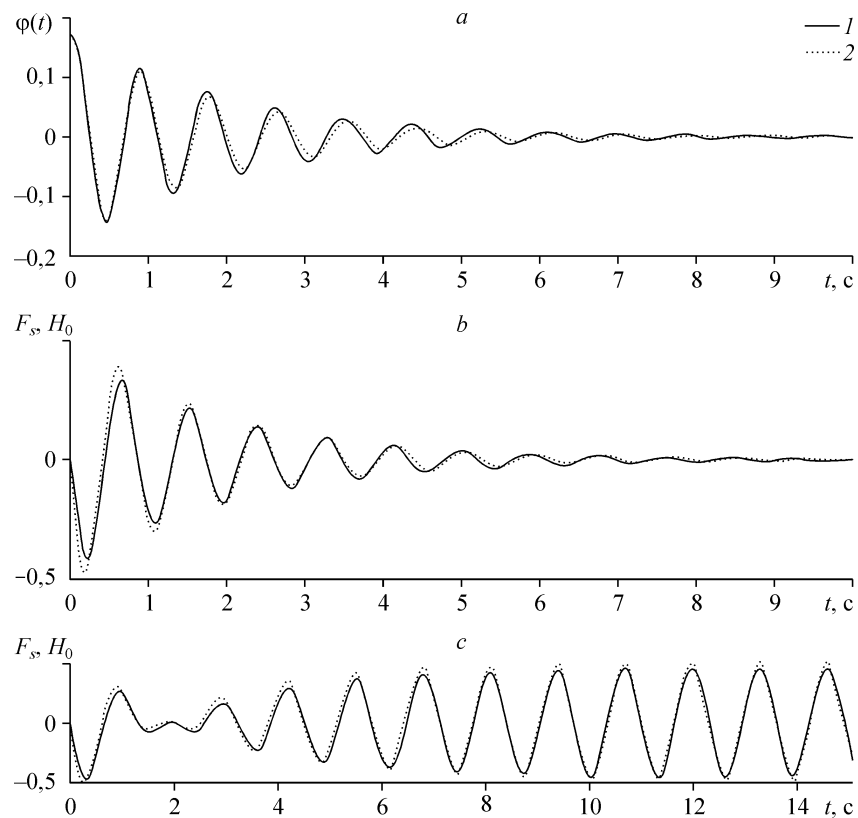


Рис. 7. Закон движения сенсора (а), суммарные силы лобового сопротивления: при свободных колебаниях маятника (b), в вынужденных колебаниях маятника (c). Аналитическое решение (1), численное (2).

Вынужденные колебания сенсора также хорошо описываются полученными численными решениями. На рис. 7, c в качестве примера приведено значение силы лобового сопротивления его вынужденных колебаний. Число Рейнольдса, как и раньше, являлось периодической функцией времени, но его значения не превышали 0,2.

На практике сенсоры вискозиметра работают нередко в достаточно ограниченных объемах. Чтобы смоделировать их работу в таких условиях, были проведены серии расчетов сенсоров различного типа в трубе заданного диаметра, сопоставимого с характерными размерами сенсора. При этом использовались расчетные сетки  $50 \times 50 \times 60$  узлов. Естественно, сила Стокса уже плохо описывает реальные силы, действующие на тело. Аналитическое решение (3) поэтому не описывает реально наблюдаемого течения. В качестве примера на рис. 8 аналитическое решение (1) сопоставлено с численным (2) для свободных колебаний сенсора

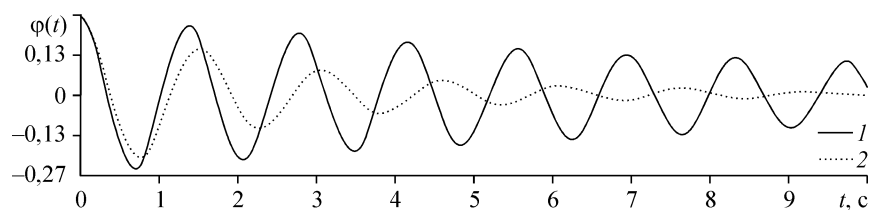


Рис. 8. Закон движения свободных колебаний физического маятника в трубе. Аналитическое решение (1), расчет (2).

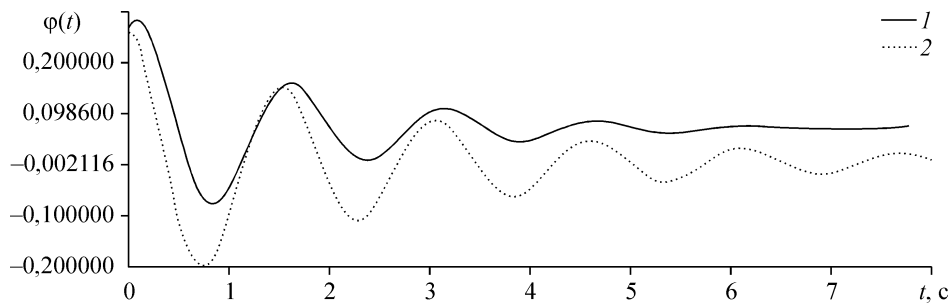


Рис. 9. Сравнение вариантов эволюции сенсора с различной скоростью потока;  $u = 1$  (1),  $0$  (2) м/с.

в вязкой жидкости. Длина сенсора (весомого шара радиуса  $R$  на невесомом стержне длины  $L$ , на котором укреплен шар) составлял  $0,4$  от диаметра трубы. Здесь начальные числа Рейнольдса оказываются уже достаточно большими, около  $20$ . На характер получающегося решения теперь существенное влияние будет оказывать наличие или отсутствие потока жидкости в трубе. Рис. 9 иллюстрирует это обстоятельство. Здесь средняя скорость течения равна  $1$  м/с (1) и нулю (2).

В расчетах так же были рассмотрены свободные и вынужденные колебания цилиндрического сенсора в круглой трубе. В качестве иллюстрации на рис. 10 приведено распределение давления в различных сечениях трубы в некоторый момент времени.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, рассмотренную в настоящей работе модель действительно вполне можно использовать для моделирования работы реально существующих вискозиметров типа “осциллирующее тело” и интерпретации результатов измерений. Достоин-

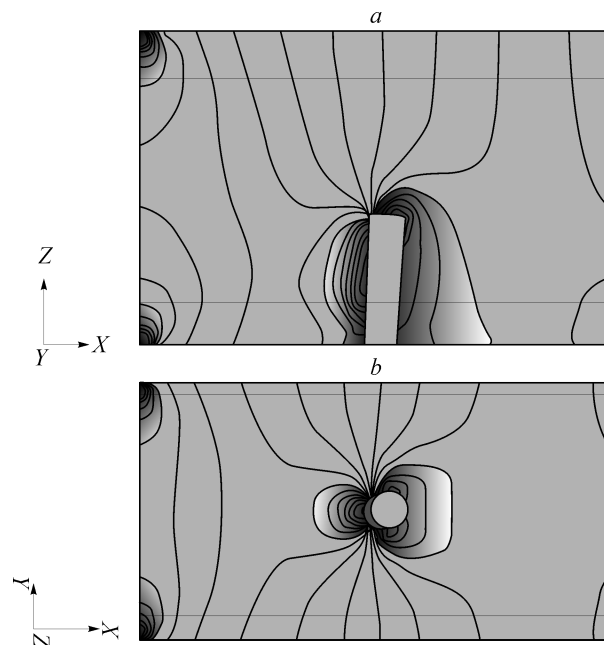


Рис. 10. Вынужденные колебания цилиндрического сенсора в круглой трубе (момент времени  $0,2$  с, максимальное число  $Re \approx 50$ ).

Изолинии давления в плоскости ZOZ (a), YOZ (b).

ством предлагаемой модели является простота интерпретации результатов, прямое измерение вязкости по сдвигу частоты или измерению амплитуды вынужденных колебаний.

На практике колебания сенсора вискозиметра практически всегда имеют достаточно малые амплитуды, так что вискозиметр вполне можно моделировать осциллятором (1б). Поэтому в широком диапазоне параметров течения для интерпретации данных вполне можно использовать решения (3) и (6). В необходимых случаях можно непосредственно решать и исходное нелинейное уравнение (1б). Вместе с тем аналитическое представление силы сопротивления в виде силы Стокса или близкой к ней, конечно, имеет достаточно ограниченную область применения. Особенно это важно при использовании вискозиметра для измерений в реальных нестационарных потоках. В этом случае для интерпретации данных вполне можно применять метод численного моделирования работы сенсора, разработанный в настоящей статье. Предложенный алгоритм учитывает нестационарность и трехмерность процесса движения сенсора и жидкости, легко адаптируется к реальной геометрии любого сложного объекта.

Авторы признательны А.Б. Каплуну за обсуждения работы и полезные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berg R.F. Hydrodynamic similarity in an oscillating-body viscometer // Inter. J. Thermophys. — 1995. — Vol. 16, № 5. — P. 1257–1266.
2. Соловьев А.Н., Каплун А.Б. Вибрационный метод измерения вязкости жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1970. — 140 с.
3. Крутин В.Н. Колебательные реометры. — М.: Машиностроение, 1985. — 160 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
5. Matsiev L.F. Application of flexural mechanical resonators to high throughput liquid characterization // Proc. of IEEE 2000 Inter. Ultrasonics Symposium. — 2000. — P. 427–434.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 758 с.
7. Swaminathan T.N., Mukundakrishnan K., Hu H. H. Sedimentation of an ellipsoid inside an infinitely long tube at low and intermediate Reynolds numbers // J. Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 551. — P. 357–385.
8. Оран Э., Бёрнс Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. — М.: Мир, 1990. — 661 с.
9. Peskin C. The immersed boundary method // Acta Numerica. — 2002. — Vol. 11. — P. 479–517.
10. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. — М.: Судостроение, 2005. — 389 с.
11. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. — 1981. — Vol. 39. — P. 201–225.
12. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
13. Segal G., Bijl H., Vuik K. ISNAS—incompressible flow solver. Version 2.1. 1998.
14. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. — Berlin: Springer Verlag, 2002. — 431 p.
15. Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. — М.: Наука, 1989. — 343 с.
16. Марчук Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 263 с.
17. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986. — 181 с.
18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970. — 840 с.
19. Кудинов П.И. Численное моделирование гидродинамики и теплообмена в задачах с конвективной неустойчивостью и неединственным решением // Дисс. кан. физ.-мат. наук. — Днепропетровск, 1999. — 229 с.

*Статья поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.*