

А. А. Коробкин

АКУСТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ ЗАТУПЛЕННОГО КОНТУРА В ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ

Значительный интерес с точки зрения как теоретической, так и прикладной гидродинамики представляет проблема описания неустановившегося движения жидкости, занимающей изменяющуюся со временем область, граница которой состоит из свободной поверхности, твердой стенки и линии контакта между ними. Закон движения твердой стенки задан, вся граница жидкости в начальный момент является свободной. В начальный момент меняется топология течения, появляется твердый участок границы, отсутствовавший ранее. Специфика проблемы заключается в том, что необходимо одновременно определять в каждый момент времени как движение жидкости, так и положение линии контакта. Даже после значительных упрощений задача остается сложной, точные результаты практически отсутствуют.

Особое внимание привлекает начальная стадия процесса. Подробный обзор работ, посвященных ее исследованию, приведен в [1, 2]. Новый подход к анализу начальной стадии движения жидкости предложен в [3]. Подход основан на введении лагранжевых координат, в которых область течения фиксирована. В настоящей работе этот подход используется для анализа плоской задачи о симметричном погружении твердого параболического контура в идеальную слабо сжимаемую жидкость.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское неустановившееся движение идеальной слабо сжимаемой жидкости, заполняющей в момент $t' = 0$ полуплоскость $y' < 0$ и покоящейся (здесь штрихом снабжаются размерные переменные). Линия $y' = 0$ в начальный момент — свободная граница.

Пусть R, V — положительные постоянные. При фиксированном t' уравнение

$$(1.1) \quad y' = x'^2/(2R) - Vt'$$

определяет параболу на плоскости x', y' , которую будем отождествлять с твердым недеформируемым контуром. При $t' = 0$ он касается свободной границы в точке $x' = 0$. Соотношение (1.1) задает движение контура вдоль оси y' с постоянной скоростью V . Требуется найти возникающее при этом движение жидкости, считая, что часть ее границы, не являющаяся частью твердого контура, остается свободной. Сделанное предположение, в частности, означает, что на плоскости лагранжевых координат ξ', η' область, занятая жидкостью, заранее известна, это — полуплоскость $\eta' < 0$. В переменных Лагранжа ξ', η' искомыми функциями являются давление p' , плотность ρ' , а также координаты x', y' жидкой частицы, которая при $t' = 0$ занимала положение ξ', η' . Вектор перемещения жидкой частицы X' находится по формуле $X' = x' - \xi'$, где $x' = (x', y')$, $\xi' = (\xi', \eta')$, $X' = (X', Y')$.

Прежде чем сформулировать начально-краевую задачу в безразмерных переменных, рассмотрим вопрос о выборе масштабов длины, времени и искомым функций. Из уравнения (1.1) находим, что закон движения точки пересечения контура с невозмущенной поверхностью жидкости ($y' = 0$) дается формулой $x'_i(t') = \sqrt{2RVt'}$. Следовательно, непосредственно после начала погружения контура точка движется со скоростью, заведомо превышающей местную скорость звука, свободная граница остается невозмущенной. Этот этап называется сверхзвуковым, при малых скоростях погружения его длительность T_c можно оценить, приравняв скорость движения точки x'_i скорости звука в покоящейся жид-

кости c_0 , отсюда $T_c \approx RV/(2c_0^2)$. Соответственно за масштаб времени удобно выбрать величину $M^2(R/V)$ ($M = V/c_0$ — число Маха), а за масштаб длины — величину RM , которая имеет тот же порядок, что и расстояние, пройденное точкой x_i в течение сверхзвукового этапа. Вследствие симметрии задачи вектор перемещений жидкой частицы с координатами $\xi' = 0, \eta' = 0$ заранее известен ($\mathbf{X}' = (0, -Vt')$), поэтому за масштаб перемещений выбирается M^2R . За масштаб плотности выбирается плотность покоящейся жидкости ρ_0 . Из закона сохранения импульса следует, что за масштаб давления необходимо взять давление одномерного удара $\rho_0 c_0 V$. Переходим к базразмерным переменным, обозначение которых отличается отсутствием штриха.

Уравнения Эйлера, записанные в лагранжевых координатах, имеют вид

$$(1.2) \quad \rho J^* \mathbf{X}_{tt} + \nabla_{\xi} p = 0, \quad \rho |J| = 1 \quad (\eta < 0).$$

Первое из них — уравнение импульса, а второе — уравнение неразрывности. К (1.2) следует присоединить уравнение состояния, которое для слабо сжимаемой жидкости при относительно небольших давлениях можно представить как [2]

$$(1.3) \quad p = (\rho^n - 1)/(nM)$$

(для воды $n \approx 7,15$). В (1.2) $J = \partial(\mathbf{x})/\partial(\xi)$ — матрица Якоби; J^* — матрица, сопряженная к J .

Требуется найти решение (1.2), (1.3) в области $\eta < 0, t > 0$ при начальных условиях

$$(1.4) \quad \mathbf{X} = 0, \mathbf{X}_t = 0 \quad (t = 0, \eta \leq 0),$$

которые выполняются везде, кроме, может быть, начала координат, и при краевых условиях

$$(1.5) \quad p = 0 \quad (\eta = 0, |\xi| > a(t));$$

$$(1.6) \quad Y = (1/2)(\xi + MX)^2 - t \quad (\eta = 0, |\xi| < a(t))$$

($a(t)$ — прообраз в лагранжевых координатах точки контакта свободной границы жидкости с поверхностью твердого тела). Условие (1.6) означает, что, попав на твердый участок границы, жидкая частица может перемещаться только вдоль него.

Дополнительно потребуем, чтобы кинетическая энергия жидкости T , определяемая выражением

$$T = (\rho_0 V^2 / 2) \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_t|^2 d\xi d\eta,$$

была конечной во все время движения

$$(1.7) \quad T < +\infty \quad (t > 0).$$

Кроме того, нас интересуют только те решения задачи (1.2)—(1.7), которые удовлетворяют одностороннему неравенству

$$(1.8) \quad M^{-1}\eta + Y \leq (1/2)(\xi + MX)^2 - t \quad (\eta \leq 0, -\infty < \xi < +\infty, t > 0).$$

Оно означает, что частицы жидкости не попадают в «запретную» область, ограниченную контуром (1.1). Дополнительные условия (1.7), (1.8) применительно к задачам погружения впервые использованы для однозначного выделения решения в [3].

Приближенное решение задачи (1.2)—(1.8) будем искать при малых M . Если в (1.2)—(1.8) формально перейти к пределу $M \rightarrow 0$ с учетом равенства $J = I + M\partial(\mathbf{X})/\partial(\xi)$ (I — единичная матрица), то решение предельной задачи даст главный член асимптотики искомых функций при $M \ll 1$. Сохраняя для предельных при $M \rightarrow 0$ значений искомых функ-

ций прежние обозначения, из уравнений (1.2) и (1.3) находим

$$(1.9) \quad X_{tt} + \nabla_{\xi} p = 0;$$

$$(1.10) \quad p = -\operatorname{div}_{\xi} X.$$

Уравнение импульса (1.9) и начальные условия (1.4) показывают, что существует потенциал перемещений $\Phi(\xi, \eta, t)$ такой, что $X = \nabla_{\xi} \Phi$. Подставляя (1.10) в (1.9) и учитывая, что потенциал Φ определен с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от времени, получаем, что функция Φ должна удовлетворять волновому уравнению

$$(1.11) \quad \Phi_{tt} = \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} \quad (\eta < 0).$$

Условие непротекания (1.6) при $M = 0$ имеет вид

$$(1.12) \quad \Phi_{\eta} = (1/2)\xi^2 - t \quad (\eta = 0, |\xi| < a(t)).$$

Равенство (1.10) с учетом (1.11) дает $p = -\Phi_{tt}$. После двойного интегрирования по t условие на свободной границе (1.5) представим как

$$(1.13) \quad \Phi = 0 \quad (\eta = 0, |\xi| > a(t)).$$

Условие (1.7) дает

$$(1.14) \quad \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla_{\xi} \Phi_t|^2 d\xi d\eta < +\infty \quad (t > 0),$$

одностороннее неравенство (1.8) запишется в форме

$$(1.15) \quad \Phi_{\eta} \leq (1/2)\xi^2 - t \quad (\eta = 0, -\infty < \xi < +\infty).$$

К соотношениям (1.11)–(1.15) следует присоединить начальные условия

$$(1.16) \quad \Phi = 0, \Phi_t = 0 \quad (\eta \leq 0, t = 0).$$

Система (1.11)–(1.16) представляет собой акустическое приближение в задаче о погружении параболического контура в идеальную слабо сжимаемую жидкость. В задачах о погружении твердого тела акустическое приближение обычно записывается в эйлеровых переменных [4]. Чтобы перейти от предлагаемой постановки задачи к обычной, надо формально проинтегрировать соотношения (1.11)–(1.13) по t , определить потенциал скоростей $\varphi = \Phi_t$ и иметь в виду, что эйлеровы x и лагранжевы ξ переменные на рассматриваемом интервале времени отличаются друг от друга на величину порядка $O(M^2)$ при $M \rightarrow 0$, что позволяет эти переменные отождествить.

Заметим, что, хотя все соотношения в (1.11)–(1.16) линеаризованы, задача остается нелинейной, так как необходимо найти не только потенциал перемещений, но и функцию $a(t)$, задающую положение точек контакта. Это обстоятельство делает постановку задачи в виде (1.11)–(1.16) более предпочтительной. Напомним [5], что в эйлеровых переменных положение точек контакта определяется из так называемого условия Вагнера

$$\int_0^t \varphi_y(a(t), 0, \tau) d\tau = \frac{1}{2} a^2(t) - t \quad (t > 0),$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно функции $a(t)$. Автору не удалось сколько-нибудь упростить это уравнение. В предлагаемой постановке $a(t)$ есть корень алгебраического уравнения в простых случаях и корень трансцендентного уравнения в сложных. Для некоторых примеров функция $a(t)$ находится в явном виде. С другой стороны, если функция $a(t)$ известна, то распределение давления по смоченной части контура и поле скоростей удобно рассчитывать, исходя из постановки задачи в эйлеровых переменных.

2. Вспомогательная задача. Рассматривается начально-краевая задача со смешанными граничными условиями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi_{tt} &= \psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} \quad (\eta < 0), \quad \psi = 0 \quad (\eta = 0, |\xi| > a(t)), \\ \psi_\eta &= f(\xi, t) \quad (\eta = 0, |\xi| < a(t)), \quad \psi = \psi_t = 0 \quad (\eta \leq 0, |\xi| > 0, t = 0), \\ |\nabla_\xi \psi| &\rightarrow 0 \quad (\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

при следующих ограничениях: а) $f(-\xi, t) = f(\xi, t)$, $a(0) = 0$; б) $a'(t_*) = 1$, $a'(t) > 1$ при $0 < t < t_*$, $0 < a'(t) < 1$ при $t > t_*$; в) $a(t)$ — кусочно-гладкая функция, $f(\xi, t)$ — гладкая функция своих аргументов. Требуется определить $\psi(\xi, 0, t)$ при $|\xi| < a(t)$ и $\psi_\eta(\xi, 0, t)$ при $|\xi| > a(t)$, считая функции $f(\xi, t)$, $a(t)$ заданными.

Решение такой задачи основано на использовании интегрального соотношения, связывающего граничные значения $\psi(\xi, 0, t)$ и $\psi_\eta(\xi, 0, t)$ [6]:

$$(2.2) \quad \psi(\xi, 0, t) = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(\xi, t)} \frac{\psi_\eta(\xi_1, 0, t_1) d\xi_1 dt_1}{\sqrt{(t-t_1)^2 - (\xi - \xi_1)^2}}.$$

Здесь $\sigma(\xi, t)$ — равнобедренный прямоугольный треугольник на полуплоскости ξ_1, t_1 ($t_1 > 0$) с вершиной в точке (ξ, t) и основанием на оси $O \xi_1$ (рис. 1). При $0 < t < t_*$ расширение области возмущений ($\eta = 0$, $|\xi| < a(t)$) происходит со скоростью, превышающей скорость распространения возмущений (для задачи (2.1) эта скорость равна единице) в среде. Поэтому правее кривой OAC сохраняются начальные условия, т. е. там $\psi_\eta(\xi, 0, t) = 0$. В области $|\xi| < a(t)$ функция $\psi_\eta(\xi, 0, t)$ известна, поэтому если удастся найти ее в области BAC , то задача будет решена.

Запишем (2.2) для точки P , лежащей строго внутри области BAC , но ниже прямой $t_1 = \xi_1 + t_* + a(t_*)$. Тогда интегрирование в (2.2) осуществляется по двум областям: $\sigma_1 = KAO D$, где $\psi_\eta(\xi_1, 0, t_1) = f(\xi_1, t_1)$, и $\sigma_2 = PKAN$, в которой $\psi_\eta(\xi_1, 0, t_1)$ следует определить. Из условия $\psi(\xi, 0, t) = 0$ при $|\xi| > a(t)$ и (2.2) получаем интегральное уравнение

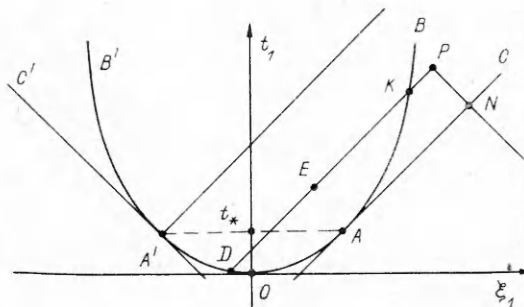
$$\iint_{\sigma_2} \frac{\psi_\eta(\xi_1, 0, t_1) d\xi_1 dt_1}{\sqrt{(t-t_1)^2 - (\xi - \xi_1)^2}} = - \iint_{\sigma_1} \frac{f(\xi_1, t_1) d\xi_1 dt_1}{\sqrt{(t-t_1)^2 - (\xi - \xi_1)^2}},$$

решение которого построено в [6] и имеет вид

$$(2.3) \quad \psi_\eta(\xi, 0, t) = - \frac{1}{\pi \sqrt{|PK|}} \int_0^{|DK|} \frac{\sqrt{\mu} f(E)}{|PK| + \mu} d\mu,$$

где $|PK|$, $|DK|$ — длины отрезков PK и DK соответственно; $f(E)$ — значение функции $f(\xi, t)$ в точке E , лежащей на отрезке \overline{DK} , причем $|EK| = \mu$ (см. рис. 1). Формула (2.3) справедлива и в том случае, когда точка P лежит немного выше прямой $t_1 = \xi_1 + t_* + a(t_*)$. При этом точка D лежит на прямой $A'C'$ и в (2.3) входит интеграл по отрезку, лежащему в области $B'A'C'$ ниже прямой $t_1 = -\xi_1 + t_* + a(t_*)$, на котором $f(E) = \psi_\eta(\xi_1, 0, t_1)$, где правая часть вследствие симметрии задачи вычисляется по (2.3). Последовательное использование (2.3) позволяет построить $\psi_\eta(\xi, 0, t)$ во всей области BAC , что и завершает решение вспомогательной задачи.

3. Закон движения точек контакта. Если в (2.1) положить $\psi = \Phi(\xi, \eta, t)$, $f(\xi, t) = \xi^2/2 - t$, то приходим к акустическому приближению в



Р и с. 1

задаче проникания (1.11)–(1.16), записанному в лагранжевых переменных. Соответственно при $\psi = \varphi(x, y, t)$, $\xi = x$, $\eta = y$, $f(x, y) = -1$ имеем это же приближение, но в эйлеровых координатах.

При лагранжевом описании левая часть в (2.3) равна возвышению жидкой частицы, лежащей в начальный момент на свободной границе на расстоянии ξ от начала координат, над невозмущенным уровнем жидкости. Но при приближении точки наблюдения P к точке контакта K , т. е. при $|PK| \rightarrow 0$, правая часть (2.3) стремится в общем случае к бесконечности и условие (1.15) заведомо не выполняется. Следовательно, необходимо потребовать, чтобы интеграл в (2.3) при $|PK| = 0$ был равен нулю:

$$(3.1) \quad \int_0^{|DK|} \mu^{-1/2} f(E) d\mu = 0.$$

Это основное уравнение служит для вычисления величины $|DK|$, знание которой достаточно для нахождения функции $a(t)$. Оказывается, что при выполнении (3.1) перемещения жидких частиц описываются вплоть до границы жидкого объема непрерывными функциями, причем условия (1.14), (1.15) выполняются.

Найдем функцию $a(t)$ непосредственно после выхода фронта волны возмущений на свободную границу ($t_* = 1/2$, $t > t_*$). Введем новую систему координат α, β , имеющую со старой системой ξ_1, t_1 общее начало, но повернутую относительно последней на угол $\pi/4$ против хода часовой стрелки. При этом $\xi_1 = (\alpha - \beta)/\sqrt{2}$, $t_1 = (\alpha + \beta)/\sqrt{2}$. Пусть в новой системе точка D имеет координаты (α_0, β_0) , которые считаются известными. Тогда точка E имеет координаты $(\alpha_0 + |DK| - \mu, \beta_0)$. После введения новой переменной интегрирования $\sigma = |DK| - \mu$ найдем

$$(3.2) \quad f(E) = (1/4)\sigma^2 + c\sigma, \quad c = (\alpha_0 - \beta_0)/2 - 1/\sqrt{2},$$

где использовано то обстоятельство, что $f(D) = 0$. Подставляя (3.2) в (3.1) и вычисляя интегралы, получаем формулу $|DK| = -5c$. Формулы перехода от одной системы координат к другой дают

$$(3.3) \quad a(t) = (\alpha_0 - \beta_0 + |DK|)/\sqrt{2}, \quad t = (\alpha_0 + \beta_0 + |DK|)/\sqrt{2}.$$

Эта система определяет функцию $a(t)$ в параметрическом виде. Выберем за параметр величину $k = \beta_0 + 2^{-3/2}$. Заметим, что k равно нулю, когда точка D совпадает с точкой A , увеличивается при удалении точки D от точки A по кривой AOA' . Максимальное значение, равное $\sqrt{2}$, параметр k принимает, когда точка D совпадает с A' .

Обозначим разность $\alpha_0 - \beta_0$ через ω и найдем зависимость $\omega = \omega(k)$ из равенства $f(D) = 0$. Несложные вычисления дают $\omega = \sqrt{2} - 2^{5/4}k^{1/2}$, отсюда $c = -2^{1/4}k^{1/2}$. Система (3.3) принимает вид

$$(3.4) \quad a(t) = 1 + 3 \cdot 2^{-1/4}k^{1/2}, \quad t = a(t) - 1/2 + \sqrt{2}k,$$

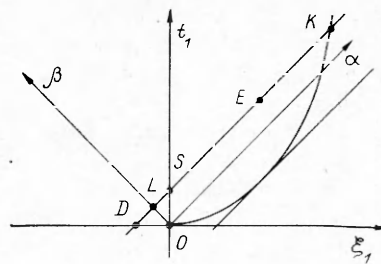
откуда следует $a^2(t) + (5/2)a(t) - 5/4 = (9/2)t$. Таким образом, в данном случае $a(t)$ дается в явном виде

$$(3.5) \quad a(t) = (3\sqrt{5 + 8t} - 5)/4.$$

Найдем момент t_s , в который волна разрежения, образованная в момент $t_* = 1/2$ с левой стороны контура, достигнет правой точки контакта. Для этого в системе (3.4) надо положить $k = \sqrt{2}$, тогда $a(t_s) = 4$, $t_s = 11/2$. Значит, при $1/2 < t < 11/2$ закон движения точек контакта дается формулой (3.5). При $t > 11/2$ функция $a(t)$ имеет более сложный вид, и в настоящее время неизвестно, можно ли записать ее в аналитической форме.

Исходя из (3.5), можно проанализировать, как меняется закон движения точки контакта в момент выхода фронта волны возмущений на

свободную границу. Несложно получить следующие соотношения: $a(1/2 + 0) = a(1/2 - 0) = 1$, $a'(1/2 + 0) = a'(1/2 - 0) = 1$, $a''(1/2 + 0) = -4/9$, $a''(1/2 - 0) = -1$. Таким образом, на интервале $0 < t < 1/2$ функция $a(t)$ непрерывно дифференцируемая, а ее вторая производная изменяется скачком при $t = 1/2$, причем $a''(1/2 + 0) - a''(1/2 - 0) = 5/9$, т. е. в этот момент точка контакта ускоряется.



Р и с. 2

4. Модельная задача. Рассмотрим плоскую задачу о погружении полубесконечной пластины с закругленным краем в акустическом приближении. Начально-краевая задача для потенциала перемещений $\Phi(\xi, \eta, t)$ имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Phi_{tt} &= \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} \quad (\eta < 0, -\infty < \xi < +\infty), \\ \Phi_{\eta} &= (1/2)\xi^2 - t \quad (\eta = 0, 0 < \xi < a(t)), \\ \Phi_{\eta} &= -t \quad (\eta = 0, \xi < 0), \\ \Phi &= 0 \quad (\eta = 0, \xi > a(t)), \\ \Phi = \Phi_t &= 0 \quad (\eta \leq 0, t = 0), \quad |\nabla_{\xi}\Phi| \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow +\infty, \eta \leq 0), \\ \Phi_{\eta} &\leq (1/2)\xi^2 - t \quad (\eta = 0, \xi > 0). \end{aligned}$$

В постановку задачи (4.1) не включено условие конечности кинетической энергии жидкости (1.14), которое в этой модельной задаче заведомо не выполняется.

В сформулированной задаче точка контакта одна, поэтому ее закон движения проще, чем в задаче о погружении параболического контура (1.11)–(1.16), и может быть дан в явном виде. Так же как и ранее, до момента $t = 1/2$ свободная граница жидкости остается невозмущенной, и, следовательно, $a(t) = \sqrt{2t}$ при $0 < t < 1/2$. Далее до некоторого момента t_1 закон движения точки контакта будет тем же, что и в задаче о симметричном погружении параболического контура. При $1/2 < t < t_1$ функция $a(t)$ дается формулой (3.5). Значение t_1 определяется из условия $t_1 = a(t_1)$ (рис. 2) и равно $5/2$.

Найдем закон движения точки контакта при $t > 5/2$. Для этого будем исходить из условия (3.1) и пользоваться рис. 2. Введем, как и в п. 3, новую переменную интегрирования $\sigma = |DK| - \mu$. Видно, что $\sigma = |DE|$. Когда точка E лежит внутри интервала DS , то $f(E) = -t$, но $t = \sigma/\sqrt{2}$. Отсюда $f(E) = -\sigma/\sqrt{2}$ при $0 < \sigma < 2\beta_0$, $\beta_0 = |OL|$, β_0 принимается за параметр. Когда точка E лежит внутри интервала SK , то $f(E) = \xi^2/2 - t$. Здесь $t = \sigma/\sqrt{2}$, $\xi = \sigma/\sqrt{2} - |DO|$, $|DO| = \sqrt{2}\beta_0$, отсюда $f(E) = (\sigma/\sqrt{2} - \sqrt{2}\beta_0)^2/2 - \sigma/\sqrt{2}$ при $2\beta_0 < \sigma < |DK|$. Условие (3.1) дает

$$(4.2) \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\beta_0} \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{|DK| - \sigma}} + \int_{2\beta_0}^{|DK|} \frac{\sigma^{2/4} - \sigma(\beta_0 + 2^{-1/2}) + \beta_0^2}{\sqrt{|DK| - \sigma}} d\sigma = 0.$$

Уравнение (4.2) служит для определения $|DK|$ как функции от β_0 ($\beta_0 > 0$). Если $|DK|$ известно, то координаты точки K такие:

$$(4.3) \quad \xi_K = |DK|/\sqrt{2} - \sqrt{2}\beta_0, \quad t_K = |DK|/\sqrt{2}.$$

Система (4.3) задает функцию $a(t)$ ($\xi_K = a(t_K)$) при $t > 5/2$ в параметрическом виде.

В (4.2) сделаем замену $\sigma = |DK|v$ и обозначим $\beta_0/|DK|$ через ω , а $\sqrt{1 - 2\omega}$ — через b . После вычисления интегралов в (4.2) найдем $|DK| = 5/(2\sqrt{2}b^3)$, $\beta_0 = 5/(2\sqrt{2}b^3) - 5/(2\sqrt{2}b^3)$. Подставляя эти фор-

мулы в (4.3), окончательно получим $a(t) = (5/2)^{2/5} t^{3/5}$ ($t > 5/2$). Можно показать, что в окрестности точки $t = 5/2$ функция $a(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, а ее третья производная в этот момент меняется скачком ($a''(5/2 + 0) - a''(5/2 - 0) = 166/3125$).

Таким образом, после определения функции $a(t)$ плоская задача о погружении твердого контура в идеальную слабо сжимаемую жидкость полностью эквивалентна задаче об обтекании слабо изогнутого тонкого крыла сверхзвуковым потоком газа. Последняя задача подробно исследована в [6], полученные результаты и методы анализа без труда переносятся на нашу задачу. В частности, получены простые формулы для вычисления распределения давления по смоченному участку контура. Так, в задаче (1.11)—(1.16) при $0 < t < 11/2$ распределение давления выражается через нормальные эллиптические интегралы Лагранжа первого рода.

Поле скоростей жидких частиц, вычисленное в акустическом приближении, имеет интегрируемые особенности в окрестности точек контакта. Согласно методу сращиваемых асимптотических разложений, эти окрестности следует выделять и строить в них «внутреннее» разложение искомых функций, рассматривая решение, полученное в акустическом приближении, как главный член внешнего асимптотического разложения решения исходной задачи. Предварительно можно сообщить, что в системе координат, движущейся вместе с точкой контакта, течение жидкости в малой окрестности этой точки будет существенно нелинейным и квазистационарным. Последнее обстоятельство позволяет использовать результаты теории дозвуковых струй газа. Построенное таким способом «внутреннее» квазистационарное решение теряет силу в момент выхода ударной волны на свободную границу. Этот этап процесса рассмотрен в [7]. Показано, что движение жидкости описывается сложной начально-краевой задачей для уравнения околосвукового движения газа. Однако при $M \rightarrow 0$ продолжительность этапа стремится к нулю, что и позволяет рассматривать акустическое приближение без выделения околосвукового этапа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lesser M. B., Field J. E. The impact of compressible liquids // Annual Rev. Fluid Mechanics.— 1983.— V. 15.— P. 97.
2. Korobkin A. A., Pukhnachov V. V. Initial stage of water impact // Annual Rev. Fluid Mechanics.— 1988.— V. 20.— P. 159.
3. Пухначев В. В. Линейное приближение в задаче о входе затупленного тела в воду // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1979.— Вып. 38.
4. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость.— Киев: Наук. думка, 1981.
5. Коробкин А. А. Проникание затупленного тела в слабо сжимаемую жидкость // ПМТФ.— 1984.— № 5.
6. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке.— М.: Наука, 1986.
7. Korobkin A. A., Pukhnachov V. V. Initial asymptotics in contact hydrodynamics problems // 4th Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics, Wash., 1985: Proc.— S. 1., s. a.

г. Новосибирск

Поступила 11/VI 1991 г.

УДК 532.529.5

С. Л. Гаврилюк

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛА В ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ С НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПУЗЫРЬКОВ ПО РАЗМЕРАМ

Теория распространения волн в жидкости с пузырьками газа, основанная на уравнениях [1—3], развита главным образом для монодисперсных пузырьковых жидкостей (в каждой точке пространства имеются пу-