

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ДИФФУЗИОННОГО МИКРОПЛАМЕНИ

Р. В. Фурсенко^{1,2}, С. С. Минаев¹, К. С. Чанг², Е. С. Чао²

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск
minaev@itam.nsc.ru

²Департамент авиации и астронавтики, Национальный университет Ченг-Кунг, Тайнань, Тайвань,
Китайская Республика

Предложена математическая модель сферического диффузионного пламени с теплотерями, учитывающая неполноту сгорания. Теоретически исследовано влияние теплотер и массового расхода горючего на величину недогорания реагентов, радиус и температуру пламени. Выполнено численное моделирование диффузионного микропламени с одностадийным механизмом химической реакции. В отличие от предыдущих работ, в предлагаемой модели не используется предположение о малой величине теплотер. Сравнение полученных результатов с данными, имеющимися в литературе, показывает, что рассматриваемая модель удовлетворительно описывает основные особенности горения диффузионного микропламени.

Ключевые слова: теория горения, диффузионное пламя, микропламена.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие кремниевых технологий и появление новых материалов сделало возможным создание высокоэффективных малоразмерных термо- и фотоэлектрических устройств, преобразующих тепло сгорания углеводородного топлива в электрическую энергию. Малоразмерные устройства могли бы обладать большей эффективностью по сравнению с крупномасштабными аналогами из-за увеличенного отношения площади к объему камеры сгорания. В малоразмерных устройствах возрастает доля тепла, переносимого радиационным потоком или теплопроводностью по стенкам камеры, что повышает эффективность всего устройства с прямыми методами преобразования. В то же время увеличение теплотер из зоны горения приводит к неустойчивости пламени. В связи с этим актуальной задачей является изучение процессов стабилизации горения в микросистемах. Настоящая работа посвящена теоретическим исследованиям процессов горения сферического диффузионного микропламени. Сферическая форма выбра-

на по той причине, что в безграничном пространстве стационарное диффузионное пламя может существовать только как сферический очаг горения [1]. Такие пламена можно наблюдать в условиях микрогравитации при горении газа вблизи пористой сферы, служащей источником горючего. Ранее одномерные диффузионные пламена изучались экспериментально [2–4] и теоретически [1, 5–7]. В работе [1] предложена диффузионно-тепловая модель сферического пламени с одностадийной реакцией. Нелинейные уравнения для температуры и концентраций горючего и окислителя сложны для аналитического решения в рамках этой модели. Поэтому для приближенного решения стационарной задачи о сферическом диффузионном пламени в работах [1, 5, 6] использовался метод сращиваемых асимптотических разложений [8]. Другим, более универсальным способом получения приближенного решения является использование предположения о бесконечно узкой зоне химической реакции [9, 10]. Такая аппроксимация позволяет свести исходную задачу к кусочно-линейной задаче с нелинейными граничными условиями на фронте пламени. Решение приближенной задачи может быть найдено аналитически, а в некоторых случаях, как, например, в работе [11], можно получить оценку различия между решениями точной и приближенной задач. В данной работе сделана попытка применить асимптотические методы,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-02-16408, № 05-08-50278), а также интеграционного проекта ИТПМ СО РАН — NCKU № 2.16.

К. С. Chang, Y. C. Chao.
Department of Aeronautics and Astronautics, National Cheng-Kung University, Tainan, Taiwan, ROC.

предполагающие существование фронта химических реакций, для описания диффузионного горения газов.

В недавних экспериментальных и численных исследованиях диффузионного микропламени, выполненных группой исследователей из Национального университета Ченг-Кунг (Тайвань) [12], было обнаружено, что теплопотери из зоны горения могут приводить к неполному сгоранию горючего и окислителя. Существующие теоретические подходы наталкиваются на значительные трудности при описании диффузионного пламени в случае больших теплопотерь и вблизи пределов существования пламени. Поэтому основной целью данного исследования было создание модели, учитывающей неполноту сгорания. Кроме аналитических результатов в работе представлены также результаты численного моделирования диффузионного сферического микропламени в рамках модели с одностадийной объемной химической реакцией. Проведено сравнение теоретических и численных результатов с полученными ранее в работах [1, 7].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Схема сферического диффузионного пламени приведена на рис. 1. Горючее поступает из сферического источника радиуса r_0 с массовой скоростью \dot{m} . В окружающей среде присутствует только окислитель. Предполагается, что горение поддерживается одноступенчатой необратимой реакцией

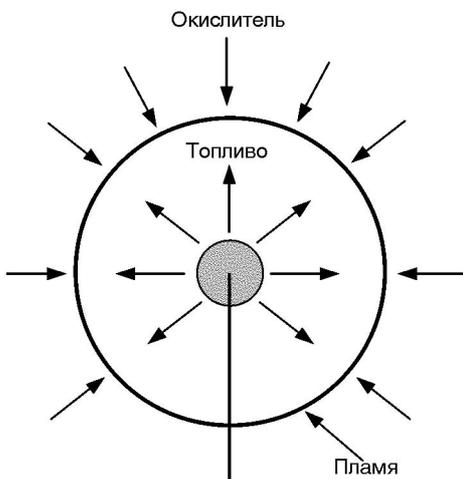
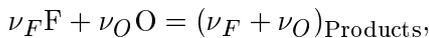


Рис. 1. Схема сферической горелки

где ν_F , ν_O — стехиометрические коэффициенты, индексы F и O относятся к горючему и окислителю соответственно. Предполагается, что скорость химической реакции подчиняется закону Аррениуса с энергией активации E и предэкспонентом B .

Одномерные безразмерные уравнения, описывающие распределения температуры газа, концентраций окислителя и горючего, имеют вид [1]:

$$\rho r^2 V = M, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{M}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = qW(Y_F, Y_O, T), \quad (2)$$

$$\frac{\partial Y_F}{\partial t} + \frac{M}{r^2} \frac{\partial Y_F}{\partial r} - \frac{1}{\text{Le}_F r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Y_F}{\partial r} \right) = -W(Y_F, Y_O, T), \quad (3)$$

$$\frac{\partial Y_O}{\partial t} + \frac{M}{r^2} \frac{\partial Y_O}{\partial r} - \frac{1}{\text{Le}_O r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Y_O}{\partial r} \right) = -\nu W(Y_F, Y_O, T). \quad (4)$$

Уравнение состояния взято в виде

$$\rho T = 1. \quad (5)$$

Здесь $W(Y_F, Y_O, T) = \rho^2 D Y_F Y_O \exp(-\theta/T)$ — скорость химической реакции, Y_O , Y_F — массовые концентрации окислителя и горючего, ρ , T — плотность и температура смеси в единицах плотности и температуры окружающей среды ρ_∞ и T_∞ соответственно. В качестве единицы длины используется радиус источника горючего r_0 , безразмерная скорость V измеряется в единицах $\lambda/\rho_\infty c_p r_0$, где λ — теплопроводность газа, c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении. Отношение массовых стехиометрических коэффициентов обозначено через $\nu = \nu_O W_O / \nu_F W_F$, где W_O и W_F — молекулярные массы окислителя и горючего. Параметры $\theta = E/RT_\infty$ и $q = Q/c_p T_\infty$ — безразмерные энергия активации и теплота реакции. Числа Льюиса окислителя ($\text{Le}_F = \lambda/\rho c_p D_F$) и горючего ($\text{Le}_O = \lambda/\rho c_p D_O$) характеризуют отношение температуропроводности к коэффициенту молекулярной диффузии горючего D_F или окислителя D_O соответственно. Наконец, $M =$

$\frac{\dot{m}/4\pi\rho_\infty}{(\lambda/\rho c_p)r_0}$ — безразмерный массовый расход,
 $D = \frac{\rho_\infty(c_p/\lambda)r_0^2}{(\nu_F\rho_\infty B/W_O)-1}$ — число Дамкеллера.

Граничные условия для массовой концентрации горючего и окислителя на поверхности источника горючего $r = 1$ имеют вид [1]

$$\frac{1}{Le_F} \frac{dY_F}{dr} = M(Y_F - 1), \quad (6)$$

$$\frac{1}{Le_O} \frac{dY_O}{dr} = MY_O. \quad (7)$$

Для температуры газа рассматривалось два типа граничных условий при $r = 1$:

$$\frac{dT}{dr} = M(T - 1), \quad (8a)$$

$$T = T_0. \quad (8b)$$

Условие (8a) соответствует адиабатическому случаю, т. е. предполагается, что источник горючего не содержит стоков и источников тепла и весь тепловой поток, приходящий в горелку, идет на увеличение температуры газа от 1 до T . Граничное условие (8b) соответствует случаю, когда температура газа на выходе из источника поддерживается постоянной и равной $T_0 \geq 1$.

Граничные условия при $r \rightarrow \infty$ имеют вид

$$T = 1, \quad Y_F = 0, \quad Y_O = Y_{O\infty}, \quad (9)$$

где $Y_{O\infty}$ — концентрация окислителя в окружающем пространстве.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГОРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ДИФфуЗИОННОГО ПЛАМЕНИ

Стационарные решения системы уравнений (1)–(4) с граничными условиями (6)–(9) рассчитывались методом установления. При численном моделировании использовалась неявная разностная схема на неравномерной сетке со вторым порядком аппроксимации по пространству и первым по времени. Расчетная область представляла собой конечный отрезок $[1, L]$, где значение L выбиралось достаточно большим. Поскольку L достаточно велико, то в окрестности точки $r = L$ скорость реакции

и скорость потока газа M/r малы и ими можно пренебречь. В этом случае асимптотическое решение в области $r \geq L$, удовлетворяющее граничным условиям при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\tilde{T} = 1 + C_1 \frac{e^{-\sqrt{H}r}}{r}, \quad \tilde{Y}_F = \frac{C_2}{r},$$

$$\tilde{Y}_O = Y_{O\infty} + \frac{C_3}{r},$$

где C_i — произвольные постоянные. Принимая во внимание последние соотношения, граничные условия на краях расчетной области ($r = L$) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= -(T - 1) \left(\sqrt{H} + \frac{1}{L} \right), & \frac{\partial Y_F}{\partial r} &= -Y_F \frac{1}{L}, \\ \frac{\partial Y_O}{\partial r} &= -(Y_O - Y_{O\infty}) \frac{1}{L}. \end{aligned} \quad (10)$$

При численном моделировании размер расчетной области L выбирался так, чтобы для областей $[1, L]$ и $[1, L^*]$, где $L^* > L \gg 1$, численное решение (Y_F, Y_O, T) , соответствующее расчетной области $[1, L]$, было близко к численному решению (Y_F^*, Y_O^*, T^*) для области $[1, L^*]$.

Результаты численного моделирования стационарных решений уравнений (1)–(4) с граничными условиями (6), (7), (8a), (10) и (6), (7), (8b), (10) приведены на рис. 2. Положение фронта пламени r_f определялось как точка, в которой скорость химической реакции достигает максимума. На рис. 2, а, б приведены также аналитические зависимости $r_f(M)$, рассчитанные в рамках модели Бурке — Шумана [7]. В этой модели предполагается, что горючее и окислитель полностью выгорают на фронте пламени. Из рис. 2, а видно, что в адиабатическом случае (8a) модель Бурке — Шумана хорошо описывает стационарные решения задачи о сферическом диффузионном пламени. Численные расчеты показывают, что в этом случае и окислитель, и горючее полностью сгорают в зоне реакции. В случае граничного условия (8b) радиус пламени линейно зависит от расхода почти всюду, что соответствует теории Бурке — Шумана, и эта зависимость $r_f(M)$ нарушается в области малых значений M . Последнее может быть объяснено тем, что с уменьшением радиуса пламени увеличивается поток тепла из зоны реакции в горелку. Поэтому при малых значениях M пламя удаляется от источника, уменьшая тем

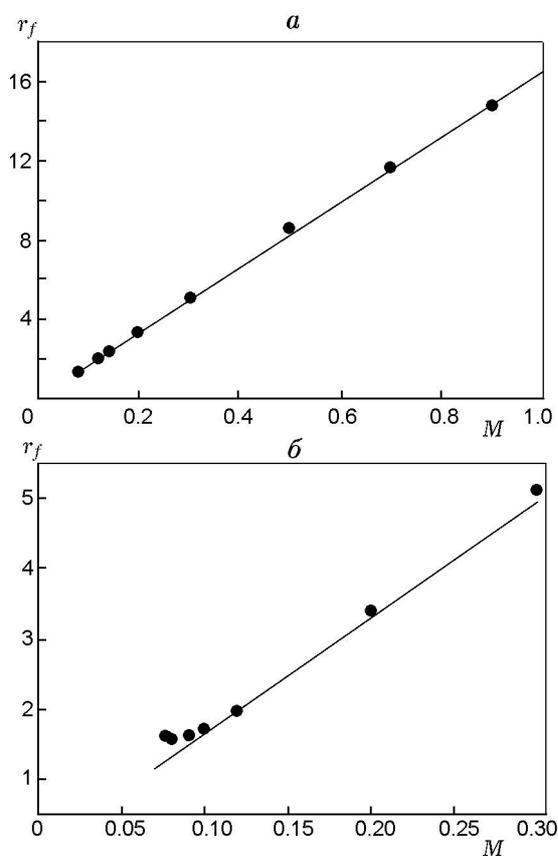


Рис. 2. Безразмерные зависимости положения фронта пламени r_f от массового расхода M , рассчитанные при $Le_F = Le_O = 1$, $D = 6.5 \cdot 10^8$, $\theta = 40$, $\nu = 4$, $Y_{O\infty} = 0.25$:

a — граничные условия (6), (7), (8а), (10), *б* — (6), (7), (8б), (10); сплошные линии — результаты, полученные по модели Бурке — Шумана, кружки — результаты численного моделирования

самым теплотерией из зоны реакции. В этом случае окислитель в зоне реакции расходуется не полностью. Типичные распределения температуры газа, концентраций окислителя и горючего при малых значениях массового расхода приведены на рис. 3.

В общем случае можно предположить, что неполное сгорание горючего или/и окислителя происходит в случае больших теплотерь из зоны реакции вблизи пределов существования пламени. Расчет величины этого недогорания, температуры пламени, его радиуса и других параметров является крайне сложной аналитической задачей в рамках существующих теорий. В следующем параграфе предлагается простая модель, позволяющая качественно описывать процессы диффузионного горения

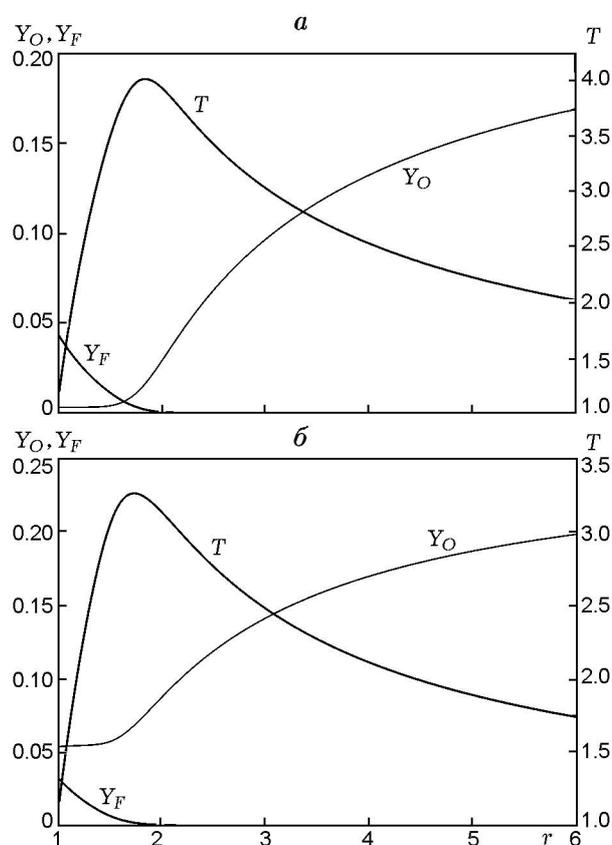


Рис. 3. Безразмерные профили температуры газа и концентраций горючего и окислителя в случае граничного условия (8б), рассчитанные численно при $Le_F = Le_O = 1$, $D = 6.5 \cdot 10^8$, $\theta = 40$, $\nu = 4$, $Y_{O\infty} = 0.25$, $T_0 = 1$ и $M = 0.1$ (*a*), $M = 0.08$ (*б*)

с неполным расходом горючего и окислителя.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГОРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ДИФФУЗИОННОГО ПЛАМЕНИ

Экспериментальные и численные данные свидетельствуют о том, что при диффузионном горении реакция идет только в узком слое — зоне реакции. Как правило, в задачах горения параметр θ , имеющий смысл безразмерной энергии активации химической реакции, много больше единицы. Из-за сильной температурной зависимости скорости химической реакции процесс в основном происходит в узком слое, который много меньше тепловой толщины пламени. Скорость химической реакции вне этого узкого слоя будем считать пренебрежимо малой. В зоне реакции нелинейную функ-

цию $W(Y_F, Y_O, T)$, описывающую скорость реакции в уравнениях (2)–(4), заменим ступенчатой функцией вида

$$\tilde{W}(r) = \begin{cases} A, & r_f - a < r < r_f, \\ 0, & r < r_f - a, r > r_f, \end{cases} \quad (11)$$

где положение фронта пламени r_f , ширина a и высота A ступеньки подлежат определению. Упрощенная система уравнений (1)–(4) со скоростью химической реакции, записанной в виде (11), допускает аналитическое решение вида

$$\tilde{Y}_F(r) = C_1^{(F)} + C_2^{(F)} \exp(-MLe_F/r) + \Phi(r, Le_F), \quad (12)$$

$$\tilde{Y}_O(r) = C_1^{(O)} + C_2^{(O)} \exp(-MLe_O/r) + \nu\Phi(r, Le_O), \quad (13)$$

$$\tilde{T}(r) = C_1^{(T)} + C_2^{(T)} \exp(-M/r) - q\Phi(r, 1), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(r, Le) = \\ = \frac{1}{M} \int_1^r \tilde{W}(\xi) \xi^2 \left[\exp\left(MLe\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{r}\right)\right) - 1 \right] d\xi, \end{aligned}$$

а постоянные $C_i^{(F,O,T)}$ определяются из граничных условий (6)–(9). Кроме того, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$0 \leq W(\tilde{Y}_F(r_f), \tilde{Y}_O(r_f), \tilde{T}(r_f)) \leq \frac{1}{\theta}, \quad (15)$$

$$0 \leq W(\tilde{Y}_F(r_f - a), \tilde{Y}_O(r_f - a), \tilde{T}(r_f - a)) \leq \frac{1}{\theta}, \quad (16)$$

$$\int_{r_f - a}^{r_f} W(\tilde{Y}_F(r), \tilde{Y}_O(r), \tilde{T}(r)) dr = Aa. \quad (17)$$

Условия (15), (16) обеспечивают выполнение предположения о малости скорости химической реакции вне зоны реакции. Условие (17) означает равенство суммарного тепловыделения от распределенной скорости химической реакции тепловыделению от приближенной скорости реакции (11). Решения (12)–(14) с условиями (15)–(17) составляют три неявных уравнения

для определения неизвестных величин r_f , a и A .

Подставляя приближенное решение $(\tilde{Y}_F, \tilde{Y}_O, \tilde{T})$ в исходные уравнения (2)–(4), получим, что они удовлетворяются с точностью до $R(r) = W(\tilde{Y}_F, \tilde{Y}_O, \tilde{T}) - W(r)$, и этот остаток может быть оценен как

$$\|R(r)\|_{L_1} = \int_1^\infty |R(r)| dx = O\left(\frac{1}{\theta}\right). \quad (18)$$

Эта оценка следует из того, что в правой части равенства

$$\begin{aligned} \int_1^\infty R(r) dr = \int_1^{r_f} W(r) dr + \\ + \int_{r_f}^{r_f+a} |W(r) - \tilde{W}(r)| dr + \int_{r_f+a}^\infty W(r) dr \end{aligned}$$

второй интеграл равен нулю в силу условия (17), а первый и третий интегралы имеют порядок малости $O(1/\theta)$. Их оценки могут быть получены с помощью асимптотического метода Лапласа [13] и условий (15), (16). Малость остатка $R(r)$ является необходимым условием близости решения $(\tilde{Y}_F(r), \tilde{Y}_O(r), \tilde{T}(r))$ приближенной задачи к решению исходной задачи (1)–(4). В случае плоского адиабатического пламени предварительно перемешанной смеси газов в работе [11] показано, что если $\|R(r)\|_{L_1} = O(1/\theta)$, то решение приближенной задачи стремится к решению точной задачи при $\theta \rightarrow \infty$ и разность между ними порядка $O(1/\theta)$. В данной работе мы ограничимся сравнением результатов, полученных в рамках приближенной модели, с результатами численного моделирования точной задачи (1)–(4).

При бесконечно больших значениях безразмерной энергии активации θ ширина зоны химической реакции a стремится к нулю, и в этом случае формулировка приближенной задачи допускает дальнейшее упрощение. Переходя в соотношениях (12)–(14) к пределу при $a \rightarrow 0$, получим, что функции $\tilde{Y}_F(r)$, $\tilde{Y}_O(r)$, $\tilde{T}(r)$ непрерывны при $1 \leq r < \infty$ и непрерывно дифференцируемы при $r \in [1, r_f) \cup (r_f, \infty)$. В точке $r = r_f$ их производные терпят разрыв и, например, скачок потока температуры имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \left[\frac{d\tilde{T}}{dr} \right] \Big|_{r_f-a}^{r_f} &= Aa = \\ &= \int_{r_f-a}^{r_f} W(\tilde{Y}_F(r), \tilde{Y}_O(r), \tilde{T}(r)) dr. \end{aligned} \quad (19)$$

Интеграл в выражении (19) может быть вычислен с помощью асимптотического метода Лапласа [13]:

$$\begin{aligned} \int_{r_f-a}^{r_f} W(\tilde{Y}_F(r), \tilde{Y}_O(r), \tilde{T}(r)) dr &= \\ &= D \frac{\exp(-\theta/T_f)}{\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! b_n}{\theta^n}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $T_f = \tilde{T}(r_f)$ — максимальное значение функции $\tilde{T}(r)$ на отрезке $[r_f - a, r_f]$, b_n — коэффициенты разложения

$$\left[\frac{\tilde{Y}_F(\psi(\tau)) \cdot \tilde{Y}_O(\psi(\tau))}{\tilde{T}^2(\psi(\tau))} \right] \frac{d\psi}{d\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n$$

в окрестности точки $\tau = 0$. Функция $\psi(\tau)$ определяется в окрестности точки $\tau = 0$ из уравнения $\frac{1}{\tilde{T}(\psi)} - \frac{1}{T_f} = \tau$.

Вычислим первый член в асимптотическом разложении (20). Функция $\psi(\tau)$ имеет вид $\psi(\tau) = P\left(\frac{T_f}{\tau T_f + 1}\right)$ и $\psi(0) = P(T_f) = r_f$, $\frac{d\psi}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = -T_f^2 \left(\frac{d\tilde{T}(r_f)}{dr}\right)^{-1}$. Здесь $P(r)$ — функция, обратная функции $T_f(r)$. Нулевой член разложения определяется соотношением

$$b_0 = \alpha\beta \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{T}}{dr} \Big|_{r_f+0} + \frac{d\tilde{T}}{dr} \Big|_{r_f-0} \right)^{-1},$$

где $\alpha = \tilde{Y}_F(r_f)$, $\beta = \tilde{Y}_O(r_f)$. Разложение (20) с учетом членов второго порядка малости по $1/\theta$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \left[\left(\frac{d\tilde{T}}{dr} \right)^2 \right] \Big|_{r_f-0}^{r_f+0} &= \frac{2D}{\theta} \times \\ &\times \left(\alpha\beta + \frac{T_f^2}{\theta q} (\text{Le}_F \beta + \nu \text{Le}_F \alpha) \right) \exp\left(-\frac{\theta}{T_f}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом уравнений (2)–(4) потоки окислителя и горючего могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{q}{\text{Le}_O} \left[\frac{d}{dr} \tilde{Y}_O \right] \Big|_{r_f-0}^{r_f+0} = \nu \left[\frac{d}{dr} \tilde{T} \right] \Big|_{r_f-0}^{r_f+0}, \quad (22)$$

$$-\frac{q}{\text{Le}_F} \left[\frac{d}{dr} \tilde{Y}_F \right] \Big|_{r_f-0}^{r_f+0} = \left[\frac{d}{dr} \tilde{T} \right] \Big|_{r_f-0}^{r_f+0}. \quad (23)$$

Условия (15), (16) при $\theta \gg 1$ приобретают вид

$$0 \leq W(\tilde{Y}_F(r_f), \tilde{Y}_O(r_f), \tilde{T}(r_f)) \leq 1/\theta. \quad (24)$$

Таким образом, при $\theta \rightarrow \infty$ приближенная модель (1)–(5) может быть записана в виде кусочно-линейной задачи. На фронте пламени (при $r = r_f$) выполняются условия непрерывности температуры и концентрации:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_F(r_f + 0) &= \tilde{Y}_F(r_f - 0) = \alpha, \\ \tilde{Y}_O(r_f + 0) &= \tilde{Y}_O(r_f - 0) = \beta, \\ \tilde{T}(r_f + 0) &= \tilde{T}(r_f - 0) = T_f, \end{aligned} \quad (25)$$

и условия (21)–(23) на скачках температуры газа и концентраций горючего и окислителя. Кроме того, эта задача дополняется неравенством (24). Численные расчеты показали, что в рамках предложенной аналитической модели все решения, удовлетворяющие неравенству (24), отличаются друг от друга не больше чем на величину $O(1/\theta)$.

Отметим, что для адиабатического пламени предварительно перемешанной смеси газов и пламени с теплопотерями описанный выше метод кусочно-линейной аппроксимации скорости реакции соответствует классическому приближению узкой зоны химической реакции [9, 10].

Стационарные решения приближенной кусочно-линейной задачи с граничными условиями (6), (7), (86), (9), (25) могут быть записаны в следующем виде:

$$\tilde{Y}_F(r) = \begin{cases} 1 - (1 - \alpha) \exp(M \text{Le}_F (1/r_f - 1/r)), & r < r_f, \\ \alpha \frac{1 - \exp(-M \text{Le}_F / r)}{1 - \exp(-M \text{Le}_F / r_f)}, & r > r_f, \end{cases} \quad (26)$$

$$\tilde{Y}_O(r) = \begin{cases} \beta \exp(M\text{Le}_O(1/r_f - 1/r)), & r < r_f, \\ Y_{O\infty} - (Y_{O\infty} - \beta) \times \\ \quad \times \frac{1 - \exp(-M\text{Le}_O/r)}{1 - \exp(-M\text{Le}_O/r_f)}, & r > r_f, \end{cases} \quad (27)$$

$$\tilde{T}(r) = \begin{cases} \frac{1}{\exp(-M/r_f) - \exp(-M)} \times \\ \quad \times [T_0(\exp(-M/r_f) - \exp(-M/r)) + \\ \quad + T_f(\exp(-M/r) - \exp(-M))], & r < r_f, \\ \frac{1}{\exp(-M/r_f) - 1} \times \\ \quad \times [(\exp(-M/r_f) - \exp(-M/r)) + \\ \quad + T_f(\exp(-M/r) - 1)], & r > r_f. \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{M^2 \exp(-2M/r_f)}{qr_f^4} \left(\left(\frac{T_f - T_0}{\exp(-M/r_f) - \exp(-M)} \right)^2 - \left(\frac{T_f - 1}{\exp(-M/r_f) - 1} \right)^2 \right) = \frac{2D}{\theta} \times$$

$$\times \left(\alpha\beta + \frac{T_f^2}{\theta q} (\text{Le}_F\beta + \nu\text{Le}_F\alpha) \right) \exp\left(-\frac{\theta}{T_f}\right), \quad (31)$$

$$0 \leq D\alpha\beta \exp(-\theta/T_f) \leq 1/\theta. \quad (32)$$

Условие (32) перепишем в виде

$$D\alpha\beta \exp(-\theta/T_f) = c, \quad (33)$$

где $0 \leq c \leq 1/\theta$.

Концентрацию окислителя и температуру на фронте пламени определим из условий (22), (23):

$$\beta(r_f, \alpha) = \nu \frac{1 - \exp(-M\text{Le}_O/r_f)}{1 - \exp(-M\text{Le}_F/r_f)} \times$$

$$\times \left(\alpha + \exp\left(-\frac{M\text{Le}_F}{r_f}\right) - 1 \right) +$$

$$+ Y_{O\infty} \exp\left(-\frac{M\text{Le}_O}{r_f}\right), \quad (29)$$

$$T_f(r_f, \alpha) = \left(\frac{1}{1 - \exp(-M/r_f)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\exp(-M/r_f) - \exp(-M)} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{q \exp(M/r_f)(\alpha + \exp(-M\text{Le}_F/r_f) - 1)}{1 - \exp(-M\text{Le}_F/r_f)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - \exp(-M/r_f)} + \frac{T_0}{\exp(-M/r_f) - \exp(-M)} \right). \quad (30)$$

Подставляя выражения (29), (30) в условия (21), (24), получим систему неявных уравнений для определения зависимостей положения фронта пламени и концентрации горючего на фронте от безразмерного массового расхода M :

Зависимости $\alpha(M)$, $r_f(M)$ определялись из уравнений (31), (33) численно. После этого концентрация окислителя и температура на фронте пламени рассчитывались из соотношений (29), (30). Как показали расчеты, разница между решениями, полученными при различных значениях постоянной c из интервала $0 \leq c \leq 1/\theta$, имеет порядок $O(1/\theta)$.

В отличие от предыдущих теоретических исследований [1, 5, 6], где использовался численный расчет нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, решение задачи в рамках данной модели сводится к решению системы неявных алгебраических уравнений (31), (33).

На рис. 4 приведены типичные зависимости $r_f(M)$, $T_f(M)$, $V_f(M)$ и $\beta(M)$. Скорость потока газа на фронте пламени определяется формулой $V_f = M/r_f^2$. Из рис. 4, а видно, что при одних и тех же значениях массового расхода возможны два стационарных положения фронта пламени. Для одного из этих решений скорость потока газа на фронте пламени больше (эта ветвь кривой обозначена сплошной линией), а для другого меньше (штриховая линия). Ответ на вопрос о том, какое из этих двух положений фронта пламени устойчиво, может быть получен из линейного анализа устойчивости стационарных решений. Такой анализ выходит за рамки настоящей работы. На основании физических соображений и результатов численного моделирования можно предположить, что из двух возможных стационарных решений устойчивым является решение, соответствующее большему значению скорости на фронте пламени.

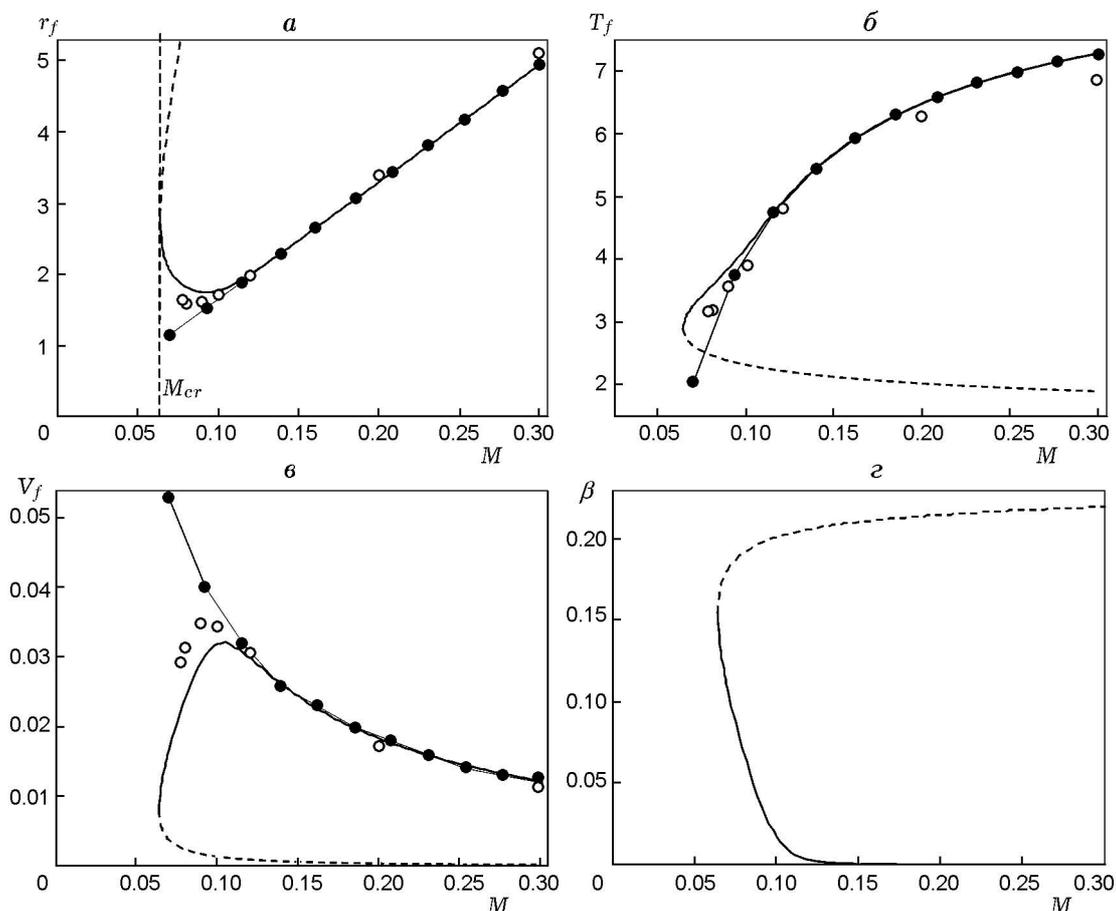


Рис. 4. Положение фронта пламени (а), температуры (б), скорости (в) и концентрации окислителя β (г) на фронте пламени при $Le_F = Le_O = 1$, $D = 6.5 \cdot 10^8$, $\theta = 40$, $\nu = 4$, $Y_{O\infty} = 0.25$, $T_0 = 1$:

сплошные и штриховые линии — теоретические результаты, линия с темными точками — теория Бурке — Шумана, светлые кружки — результаты численного моделирования

При больших значениях M решение, соответствующее большой скорости газа на фронте, совпадает с решением модели Бурке — Шумана. В этой области значений M окислитель и горючее на фронте пламени полностью расходуются (см. рис. 4, г). Стационарные решения существуют только при значениях массового расхода горючего, превышающих некоторое критическое значение M_{cr} . С приближением параметра M к критическому значению M_{cr} радиус пламени уменьшается и теплотери из зоны реакции в источник горючего возрастают. При $M \approx M_{cr}$ пламя стабилизируется при большем радиусе r_f , чем предсказываемый теорией Бурке — Шумана. Такое увеличение радиуса пламени приводит к неполному расходованию окислителя в зоне реакции за счет неоднородности скорости потока газа

(см. рис. 4, в). Из-за неполноты сгорания окислителя уменьшается температура на фронте пламени. С другой стороны, увеличение радиуса пламени приводит к сокращению теплотери в источник газа, что способствует росту температуры. В результате действия этих двух конкурирующих процессов температура на фронте пламени оказывается выше предсказываемой теорией Бурке — Шумана, а пламя стабилизируется при больших значениях r_f (см. рис. 4, а, б). При $M = M_{cr}$ достигается критическое значение теплотери и дальнейшее удаление пламени от источника уже не компенсирует уменьшение температуры, вызванное неполнотой сгорания. Таким образом, в случае неадиабатического граничного условия (8б) имеется предел существования пламе-

ни, который не может быть предсказан в рамках существующих теорий [1, 7].

Теоретические результаты, полученные в рамках приближения бесконечно узкой зоны химической реакции, хорошо согласуются с данными численного моделирования (см. рис. 4) и позволяют качественно анализировать основные особенности процессов горения сферического диффузионного пламени в сильно неадиабатических условиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в работе модель сферического диффузионного микропламени позволяет аналитически описывать основные особенности горения в неадиабатических условиях. Предложенная модель учитывает эффекты неполного расходования реагентов и их влияние на стационарные режимы горения. В работах [1, 5, 6] утечка реагентов из зоны реакции учитывалась как первая поправка в методе сращиваемых асимптотических разложений [8]. Метод, предложенный в [1], не позволяет описывать зависимости положения фронта пламени от величины недогорания, поскольку радиус пламени определяется из разложения нулевого порядка, т. е. из модели Бурке — Шумана.

В рамках математической модели с бесконечно узкой зоной химической реакции найдены стационарные решения и пределы существования пламени. Выполнено численное моделирование сферического диффузионного микропламени в рамках модели с одностадийной объемной реакцией. Теоретические и численные результаты качественно согласуются между собой. Сравнение предыдущих асимптотических методов [1, 7] с предложенным в данной работе показывает, что они дают одинаковые результаты в условиях, близких к адиабатическим. В случае сильно неадиабатических условий асимптотический метод, предложенный в данном исследовании, позволяет точнее предсказать особенности горения диффузионного микропламени по сравнению с предыдущими подходами.

Теоретические методы, представленные в работе, могут быть также применены для аналитического описания различных аспектов диффузионного горения и горения предварительно перемешанных смесей газов в случаях, когда неполное расходование реагентов существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mills K., Matalon M. Burner-generated spherical diffusion flames // *Combust. Sci. Technol.* 1997. V. 129. P. 295–319.
2. Sturk P., Dietrich D., T'ien J., Lenhert D. Experimental studies of flame shape around droplets in different buoyant environments // *AIAA Paper*. 1997. N 97–1001.
3. Atreya A., Agrawal S., Shamim T., Pickett K., Sacksteder K., Baum H. Radiant extinction of gaseous diffusion flames // *Proc. of the 3rd Intern. Microgravity Combustion Workshop*, 1995. NASA Conference Publ. 10174. P. 319–325.
4. Law C. K., Sung C. J., Zhu D. L. Studies of flame structure in microgravity // *Proc. of the 4th Intern. Microgravity Combustion Workshop*, 1997. NASA Conference Publ. 10194. P. 69–74.
5. Cheatham S., Matalon M. Heat loss and lewis number effects on the onset of oscillations in diffusion flames // *Twenty-Sixth Symp. (Intern.) on Combustion*. Pittsburgh: The Combustion Inst., 1996. P. 1063–1070.
6. Mills K., Matalon M. Extinction of spherical diffusion flames in the presence of radiant loss // *Twenty-Seventh Symp. (Intern.) on Combustion*. Pittsburgh: The Combustion Inst., 1998. P. 2535–2541.
7. Burke S. P., Shumann T. E. W. Diffusion flames // *Ind. Eng. Chem.* 1928. V. 20. P. 998.
8. Linan A. The asymptotic structure of counterflow diffusion flames for large activation energies // *Acta Astronaut.* 1974. V. 1. P. 1007–1039.
9. Sivashinsky G. I. Structure of bunsen flames // *J. Chem. Phys.* 1975. V. 62, N 2. P. 638–643.
10. Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I. An asymptotic derivation of tow models in flame theory associated with the constant density approximation // *SIAM J. Appl. Math.* 1979. V. 37, N 3. P. 689–699.
11. Фурсенко Р. В. О поведении решения задачи распространения плоского адиабатического пламени при больших значениях энергии активации // *Сиб. журн. прикл. и индустриал. математики*. 2003. Т. 6, № 4(16). С. 132–141.
12. Cheng T. S., Chen C.-P., Chen C.-S., Li Y.-H., Wu C.-Y., Chao Y.-C. Structure and stabilization mechanism of a microjet methane diffusion flame near extinction // *Proc. Combust. Inst.* 2005. V. 30. P. 2489–2497.
13. De Bruijn N. G. *Asymptotic Methods in Analysis*. 3rd ed. New York: Dover Publications Inc., 1981.

Поступила в редакцию 19/XII 2006 г.