

УДК 533; 517.958

## САМОСОПРЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЧЕРЕЗ УДАРНУЮ ВОЛНУ: ПРЕДЕЛЬНЫЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Дано аналитическое описание решения уравнений газовой динамики, отвечающего двумерному установившемуся неоднородному течению газа, в котором может реализоваться косой скачок уплотнения. В этом течении возможны два предельных асимптотических режима, один из которых соответствует тормозящемуся сверхзвуковому потоку, второй — ускоряющемуся до максимальной горизонтальной скорости. Решение со скачком уплотнения отвечает переключению интегральных кривых ключевого уравнения. В случае очень сильной ударной волны скачок является предельным и осуществляет поворот потока на максимально возможный угол (для показателя адиабаты, равного 3). Предложенная конструкция ударной волны является общей для широкого класса небарохронных регулярных частично инвариантных решений уравнений газовой динамики.

**Ключевые слова:** частично инвариантное решение, ударная волна, предельный скачок уплотнения.

**Введение.** Разрывные решения, в частности решения с ударными волнами, играют важную роль в газовой динамике. Однако набор точных решений уравнений газовой динамики, описывающих ударные волны, невелик [1, 2]. В большинстве прикладных задач рассматриваются ударные волны в однородных постоянных потоках газа. Исключением являются ударные волны в автомодельных одномерных решениях, соответствующие цилиндрической и сферической симметрии движения. Примеры течений газа с сильными разрывами, принадлежащих классам плоских и пространственных двойных волн, рассмотрены в [3].

В настоящее время теоретико-групповой подход является наиболее мощным общим методом получения точных решений дифференциальных уравнений различной природы [4]. Его эффективность подтверждена рядом исследований математических моделей механики сплошных сред, в частности модели газовой динамики [5, 6]. Вместе с тем отыскание разрывных решений ведется недостаточно интенсивно. Исследование этого класса решений начато в работах В. М. Меньщикова, доказавшего общие теоремы об инвариантности уравнений характеристик и сильного разрыва [7, 8]. Из них следует существование инвариантного продолжения инвариантного решения через инвариантную характеристику или поверхность сильного разрыва. В этих работах приведен также ряд примеров.

В данной работе исследовано точное решение уравнений газовой динамики (УГД), соответствующее двумерному установившемуся неоднородному течению газа, в котором может реализоваться косой скачок уплотнения. Дано полное аналитическое описание решения, относящегося к классу регулярных небарохронных частично инвариантных решений УГД ранга один и дефекта один [9]. Все функции, задающие решение, определяются через

вспомогательную функцию  $X$  — своеобразный потенциал решения. Эта функция является решением ключевого уравнения, следующего из инвариантного интеграла Бернулли. Отметим, что это уравнение не разрешено относительно производной. В каждой точке области определения решения его интегральные кривые (ИК) образуют пучок. Доказано, что из этого пучка можно выбрать две различные ИК, соответствующие состояниям перед и за фронтом волны, так чтобы выполнялись все условия на скачке: соотношения Ренкина — Гюгонио, сохранение касательной компоненты скорости, теорема Цемплена. При этом по обе стороны от скачка течение газа соответствует решению УГД одного и того же вида, что можно рассматривать как самосопряжение решения через ударную волну.

В исследуемом течении газа возможны два предельных асимптотических режима, один из которых соответствует тормозящемуся потоку, а второй — ускоряющемуся до максимальной горизонтальной скорости. Изучена геометрия звуковой линии, на которой может происходить непрерывный переход потоков через скорость звука. Течение с косым скачком уплотнения соответствует переключению этих потоков. На скачке происходит торможение потока газа. Решение моделирует течение газа в воздухозаборнике. В случае очень сильной ударной волны этот скачок является предельным, т. е. осуществляет поворот потока газа на максимально возможный угол, равный  $\arcsin 1/3$  (для  $\gamma = 3$ ) [10].

В работе содержатся новые результаты. Кроме того, она имеет общий, методический характер. Хотя в ней исследуется самосопряжение через ударную волну конкретного точного решения, предложенная конструкция “склейки” различных ИК из пучка является универсальной для широкого класса регулярных небарохронных частично инвариантных решений УГД, полное описание которых дано в [9]. Исследование других решений этого вида представляется перспективной задачей, важной для газодинамических приложений.

**1. Исходное решение.** Рассмотрим небарохронное регулярное частично инвариантное решение УГД, порожденное подалгеброй  $L_{4,38} = \{\partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, \partial_t\}$  из оптимальной системы подалгебр  $\Theta L_{11}$  алгебры Ли, допускаемой УГД с уравнением состояния общего вида [5]

$$u = 1/\sigma', \quad v = (y + H(\xi, \eta))/\sigma, \quad w = W_0, \quad \rho = R_0\sigma'/\sigma, \quad S = S_0. \quad (1.1)$$

В (1.1)  $\xi = t - \sigma(x)$ ;  $\eta = z - tW_0$ ;  $H$  — произвольная функция;  $W_0, R_0, S_0$  — постоянные. Функция  $\sigma = \sigma(x)$  определяется, согласно общей схеме [9], из  $B$ -уравнения — инвариантного интеграла Бернулли

$$u^2/2 + I(\rho) = b_0, \quad (1.2)$$

где  $I(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}$  — энтальпия газа;  $b_0 > 0$  — постоянная. Интеграл (1.2) получается как следствие первого уравнения импульсов УГД на решении (1.1). Для политропного газа с уравнением состояния  $p = S_0\rho^\gamma$  соотношение (1.2) в терминах функции  $\sigma$  с учетом формул (1.1) принимает вид

$$1/\sigma'^2 + \mu(\sigma'/\sigma)^{\gamma-1} = 2b_0, \quad (1.3)$$

где  $\mu = 2\gamma(\gamma - 1)^{-1}S_0R_0^{\gamma-1}$ . Тогда интеграл Бернулли (1.2) представляется в виде

$$u^2/2 + c^2/(\gamma - 1) = b_0, \quad (1.4)$$

где  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$  — скорость звука. Из (1.4) получаются оценки для  $u$  и  $c$

$$|u| \leq u_{\max} = \sqrt{2b_0}, \quad c \leq c_{\max} = \sqrt{(\gamma - 1)b_0}.$$

Уравнение (1.3) служит для определения функции  $\sigma = \sigma(x)$ . По его решению все остальные характеристики движения газа восстанавливаются в соответствии с формулами (1.1).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Всегда можно добиться того, чтобы в формуле (1.1) для плотности постоянная  $R_0$  была положительной (если  $R_0 < 0$ , то надо выполнить замену  $x \rightarrow -x$ ). Тогда из неотрицательности плотности и представления (1.1) следует, что величины  $\sigma$  и  $\sigma'$  имеют одинаковые знаки. Решение (1.1) можно рассматривать в двух областях:  $\sigma > 0$ ,  $\sigma' > 0$  и  $\sigma < 0$ ,  $\sigma' < 0$ . Первый случай соответствует движению газа в направлении возрастания  $x$ , при этом  $u > 0$ . Во втором случае  $u < 0$ , газ движется справа налево. В дальнейшем подробно рассматривается первый случай, все качественные результаты справедливы и для второго случая.

**2. Формы ключевого уравнения.** Рассмотрим двумерное стационарное решение УГД, получающееся из (1.1) при  $H \equiv 0$ ,  $W_0 = 0$  в случае политропного газа:

$$u = 1/\sigma', \quad v = y/\sigma, \quad \rho = R_0\sigma'/\sigma, \quad p = S_0\rho^\gamma. \quad (2.1)$$

Решение (2.1) описывает плоские установившиеся течения, поток газа является неоднородным, вихрь  $\omega = -y\sigma'/\sigma^2 \neq 0$ . Оно относится к классу решений, в котором поле скоростей линейно по части пространственных переменных. Такие решения исследовались в ряде работ (см., например, [11]).

Лагранжевой переменной  $\psi$ , сохраняющейся вдоль линий тока в течении газа (2.1), является компонента скорости  $v$ . Линии тока на физической плоскости задаются уравнением

$$y = \psi\sigma(x). \quad (2.2)$$

Функция  $\sigma(x)$  в (2.2) является решением уравнения (1.3).

Удобно ввести новую функцию  $X = X(x)$ , воспользовавшись масштабным преобразованием

$$X = (b_0/\sqrt{\mu})\sigma. \quad (2.3)$$

Тогда ключевое уравнение (1.3) принимает вид

$$X'^{\gamma+1} - (2b_0/\mu)X'^2X^{\gamma-1} + (b_0^2/\mu^2)X^{\gamma-1} = 0. \quad (2.4)$$

Рассматривая течения, для которых  $u > 0$ , с учетом замечания в п. 1 можно полагать, что  $X > 0$  и  $X' > 0$ . Для второго случая при произвольном вещественном показателе адиабаты  $\gamma > 1$  уравнение (2.4) следует записывать в терминах  $|X|$  и  $|X'|$ . Для простоты будем рассматривать подробно первый случай. Все выводы о характере движения газа справедливы и для второго случая.

В дальнейшем будет полезна разрешенная относительно  $X$  форма уравнения (2.4)

$$X^{\gamma-1} = \frac{\mu}{2b_0} \frac{X'^{\gamma+1}}{X'^2 - b_0/(2\mu)}. \quad (2.5)$$

Физические величины (2.1) в терминах функции (2.3) имеют вид

$$u = \frac{b_0}{\sqrt{\mu}X'}, \quad v = \frac{b_0y}{\sqrt{\mu}X}, \quad \rho = R_0 \frac{X'}{X}, \quad c^2 = \frac{\mu(\gamma-1)}{2} \left(\frac{X'}{X}\right)^{\gamma-1}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.4) не разрешено относительно производной. Для  $\gamma = 3$ , когда оно является биквадратным уравнением относительно  $X'$ , существует простая формула, выражающая  $X'$  через  $X$ . Для других показателей  $\gamma$ , даже целых, явных формул не существует. Вместе с тем для произвольного рационального  $\gamma$  решение уравнения (2.5) можно представить в параметрическом виде (см. п. 5). Некоторые свойства решения уравнения (2.4) удастся получить непосредственным анализом, при этом ряд фактов можно доказать лишь в случае  $\gamma = 3$ . Эти затруднения чисто технические и не принципиальны. Описанию общих свойств решения уравнения (2.4) для произвольного  $\gamma$  посвящен п. 3.

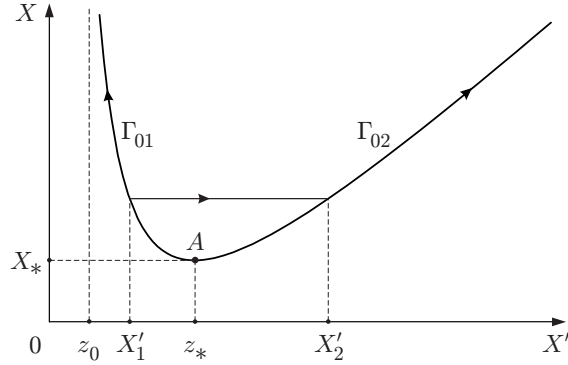


Рис. 1

**3. Свойства решения ключевого уравнения.** Рассмотрим ключевое уравнение в виде (2.4) или (2.5).

**Свойство 1.** Все решения уравнения (2.4), кроме  $X \equiv 0$ , являются строго монотонными функциями переменной  $x$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из вида уравнения (2.4): если  $X' = 0$ , то и  $X = 0$ .

**Свойство 2.** Для всех решений уравнения (2.4) справедливы следующие оценки:

$$|X| \geq X_*, \quad |X'| \geq z_0, \tag{3.1}$$

где

$$z_0 = \sqrt{\frac{b_0}{2\mu}}, \quad z_* = \sqrt{\frac{(\gamma + 1)b_0}{2(\gamma - 1)\mu}}, \quad X_* = \left[ \frac{(\gamma - 1)\mu^2 z_*^{\gamma+1}}{2b_0^2} \right]^{1/(\gamma-1)}. \tag{3.2}$$

Прямые  $X = \pm X_*$  не являются интегральными кривыми (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательную функцию

$$H(z) = z^{\gamma+1}/(z^2 - z_0^2), \tag{3.3}$$

тогда уравнение (2.5) принимает вид

$$X^{\gamma-1} = (\mu/(2b_0))H(X'). \tag{3.4}$$

Обозначим  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , где  $\Omega_1 = \{(X', X): X' \geq z_0, X > X_*\}$ , а область  $\Omega_2 = \{(X', X): X' \leq -z_0, X < -X_*\}$  расположена в третьей четверти. Функция (3.3) в  $\Omega_1$  при  $z > z_0$  имеет локальный минимум при  $z = z_*$ , причем  $z_* > z_0$  в силу  $\gamma > 1$ . Тогда  $X_*$  определяется из (3.4):

$$X_* = [(\mu/(2b_0))H(z_*)]^{1/(\gamma-1)}.$$

Имеем

$$H(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0+0} +\infty, \quad H(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty. \tag{3.5}$$

Оценки (3.1) доказаны. Характерная кривая (3.4) с учетом (3.5) в области  $\Omega_1$  показана на рис. 1. Обозначим эту кривую  $\Gamma_0$ , точку минимума —  $A$ , ветвь левее этой точки —  $\Gamma_{01}$ , правее —  $\Gamma_{02}$ . Заметим, что движению по кривой  $\Gamma_0$  из точки  $A$  как по ветви  $\Gamma_{01}$  влево, так и по ветви  $\Gamma_{02}$  вправо соответствует возрастание  $X$  и, согласно свойству 1, возрастание координаты  $x$ .

**Свойство 3.** Через каждую точку плоскости  $\mathbb{R}^2(x, X)$  проходит не более двух интегральных кривых уравнения (2.5), для которых  $XX' > 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно свойству 2 в области  $\Omega$  для любого  $X$ ,  $|X| > X_*$  уравнение (2.5) имеет два решения:  $X'_1$  и  $X'_2$  (рис. 1), т. е. функция  $H(z)$  (3.3) двузначна при  $|z| > z_0$ . В силу монотонной зависимости функции  $X$  от  $x$  (свойство 1) это верно и при замене  $X$  на  $x$ . Следовательно, при  $x$  таких, что  $|X(x)| > X_*$ , в каждой точке имеется пучок из двух интегральных кривых уравнения (2.5), удовлетворяющих условию  $X' > 0$  (это условие выделяет область  $\Omega$ ). Эти кривые отличаются значениями  $X'_i$  ( $i = 1, 2$ ), т. е. наклонами. Таким образом, все ИК на плоскости  $\mathbb{R}^2(x, X)$  лежат выше прямой  $X = X_*$  и ниже  $X = -X_*$ , причем эти границы не являются ИК.

**Свойство 4.** Существует два асимптотических режима, соответствующих непрерывным движениям газа при  $x \rightarrow +\infty$ :

1) тормозящийся вдоль оси  $Ox$  поток газа, в котором достигаются максимальные плотность и скорость звука  $c_{\max}$ :

$$\rho \rightarrow R_0 \alpha_0, \quad c \rightarrow c_{\max}, \quad u \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

где  $\alpha_0 = (2b_0/\mu)^{1/(\gamma-1)}$ ;

2) ускоряющийся вдоль оси  $Ox$  поток газа, в котором происходит разрежение потока при возрастании  $x$ :

$$\rho \rightarrow 0, \quad c^2 \rightarrow 0, \quad u \rightarrow u_{\max}. \quad (3.7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно (2.5) имеем

$$\left(\frac{X'}{X}\right)^{\gamma+1} = \frac{2b_0}{\mu} \left(\frac{X'}{X}\right)^2 - \frac{b_0^2}{\mu^2} \frac{1}{X^2}. \quad (3.8)$$

При  $x \rightarrow +\infty$  имеем  $X \rightarrow +\infty$  (свойство 1), тогда из (3.8) следует

$$\alpha^{\gamma+1} = (2b_0/\mu)\alpha^2, \quad (3.9)$$

где  $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (X'/X)$ . В силу представления (2.6) и интеграла Бернулли (1.4) величина  $\alpha$  ограничена и является вещественным числом. Уравнение (3.9) имеет два решения:  $\alpha = \alpha_0$  и  $\alpha = 0$ .

1. Пусть  $\alpha = \alpha_0$ . Тогда из формул (2.6) и (1.4) получаем асимптотику (3.6). При  $x \rightarrow \infty$  наклон интегральной кривой неограниченно возрастает с увеличением  $X$ , причем

$$X'/X \rightarrow (2b_0/\mu)^{1/(\gamma-1)}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.10)$$

Этому течению (сверхзвуковому тормозящемуся потоку газа, в котором плотность и скорость звука растут до максимальных значений) соответствует ветвь  $\Gamma_{01}$  кривой  $\Gamma_0$  на рис. 1.

2. Пусть  $\alpha = 0$ . Согласно (2.6) и (1.4) предельные значения плотности и скорости звука равны нулю, т. е. имеем режим (3.7). Газ ускоряется в направлении оси  $Ox$  с одновременным разрежением, поток дозвуковой. Наклон интегральной кривой, отвечающей этому режиму, стремится к постоянной величине:

$$X' \rightarrow (\sqrt{\mu}/b_0)u_{\max} = \sqrt{2\mu b_0}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.11)$$

Сама ИК имеет асимптоту, являющуюся линейной функцией. Этой ИК соответствует ветвь  $\Gamma_{02}$  на рис. 1.

Таким образом, течению газа, начавшемуся в точке  $A$ , в зависимости от условий на бесконечности (3.6) или (3.7) соответствуют разные ветви ( $\Gamma_{01}$  и  $\Gamma_{02}$ ) кривой (3.4). Поскольку ключевое уравнение (2.4) не разрешено относительно производной, для однозначной разрешимости задачи с начальными данными необходимо задавать не только значение функции, но и одно из возможных значений производной в выбранной точке. Это и есть

условия (3.10) или (3.11), которым отвечают непрерывные движения газа без сильных или слабых разрывов. Имеется аналогия с двумя режимами для газового источника.

**Свойство 5.** *Интегральная кривая  $X = X(x)$  уравнения (2.4), соответствующая ветви  $\Gamma_{01}$ , является выпуклой вниз, а соответствующая ветви  $\Gamma_{02}$  — выпуклой вверх.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Дифференцируя соотношение (2.5) при  $(X, X') \in \Omega_1$ , получим

$$(2b_0/\mu)X^{\gamma-2}(X')^{1-\gamma}(X'^2 - z_0^2)^2 = (X'^2 - z_*^2)X''. \quad (3.12)$$

Левая часть (3.12) неотрицательна в  $\Omega_1$ , следовательно, при  $X' < z_*$  имеем  $X'' < 0$ , а при  $X' > z_*$  —  $X'' > 0$ . (Речь идет о выпуклости кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2(x, X)$ .)

**Свойство 6.** *Прямые  $X = \pm X_*$  являются предельными линиями движения (2.6): на них ускорение потока газа в направлении оси  $Ox$  становится неограниченным, за них решение не продолжается.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим представление (3.12) для  $X''$ . При  $X \rightarrow X_* + 0$  имеем  $X' \rightarrow z_*$ . В левой части (3.12) получим конечную величину, в правой — произведение малой величины и  $X''$ , следовательно,  $X'' \rightarrow \infty$  при  $X \rightarrow X_* + 0$ . Этим прямым, т. е. точке  $A$  на рис. 1, соответствует вдув неоднородного потока в некотором сечении  $x = x_1$ . Параметры потока в этом сечении определяются по координатам точки  $A$  (см. п. 13).

**4. Интеграл Бернулли и линии тока.** Уравнение линий тока (2.2) в терминах функции  $X$  (2.3) принимает вид

$$y = \psi\sqrt{\mu}X(x)/b_0. \quad (4.1)$$

Переменная  $\psi$  в (4.1) “нумерует” линии тока, определяя точку плоскости  $\mathbb{R}^2(x, y)$ , через которую они проходят. В (4.1)  $X$  является решением уравнения (2.4).

Кроме инвариантного интеграла Бернулли (1.4) для данного течения существует и общий, имеющий вид

$$(u^2 + v^2)/2 + c^2/(\gamma - 1) = b_0 + b_0^2 y^2 / (2\mu X^2). \quad (4.2)$$

Формулы (2.6) и (4.2) задают изэнтропическую форму данного решения. Применив преобразование Мунка — Прима [12], можно получить изоэнергетическую, но не изэнтропическую форму, в которой правая часть интеграла Бернулли (3.2) будет постоянной, но энтропия в уравнении состояния будет функцией переменной  $\psi$ . Это приведение осуществляется делением соотношения (4.2) на его правую часть, которая зависит лишь от лагранжевой координаты  $\psi$ . Формулы

$$U = u/B(\psi), \quad V = v/B(\psi), \quad R = B^2(\psi)\rho, \quad P = p, \quad (4.3)$$

где  $B^2(\psi) = b_0 + (b_0^2/(2\mu))\psi^2$ , задают описанный переход. Движение газа, описываемое (4.3), изотраекторно исходному (2.1), поскольку имеет совпадающие с ним линии тока. При рассмотрении различных газодинамических задач иногда предпочтение отдается изоэнергетической форме [13]. Для наших целей более удобной является изэнтропическая форма решения (2.1) (или (2.5)). Данное решение не является, вообще говоря, изэнтропическим. После преобразования (4.3) уравнение состояния  $p = S_0\rho^\gamma$  переходит в уравнение

$$P = S_0 B^{-2\gamma}(\psi) R^\gamma$$

с функцией  $B$ , определенной выше и задающей энтропию. Среди последних работ, в которых используется преобразование Мунка — Прима для решения конкретных газодинамических задач, отметим [14].

**5. Параметрическое представление решения.** Решение уравнения (2.5) представимо в параметрическом виде для произвольного рационального показателя адиабаты  $\gamma = k/r$ , где  $k, r$  — натуральные числа ( $k > r$ ). Положим  $q = \sqrt{2\mu/b_0}X'$ , тогда

$$X = X_0 q^{1+2\alpha} / (q^2 - 1)^\alpha, \quad (5.1)$$

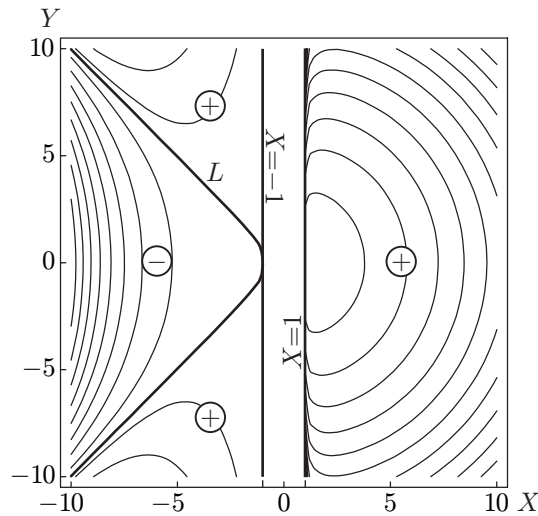


Рис. 2

где  $\varkappa = 1/(\gamma - 1)$ ;  $X_0 = 2^{-(2\varkappa+1)/2}(b_0/\mu)^{1-2\varkappa}$ . Зависимость  $x = x(q)$  находится интегрированием соотношения  $dx = \sqrt{2\mu/b_0} q^{-1} X_q^{-1} dq$ . Используя теорему Чебышева об интегрировании дифференциального бинома [15], получим

$$x = X_0 \sqrt{\frac{\mu}{2b_0}} \left[ r \int \frac{dt}{t^{k+1}(1-t^r)} - \frac{2k+r}{k} \frac{1}{t^k} \right] + x_0, \quad (5.2)$$

где  $t = [(q^2 - 1)/q^2]^{1/r}$ ;  $x_0$  — постоянная интегрирования. Для конкретных значений  $k, r$  интеграл (5.2) берется в элементарных функциях. В качестве примера приведем формулу (5.2) при  $\gamma = 3$ :

$$x = \sqrt{\mu/(2b_0)} [\ln |q + \sqrt{q^2 - 1}| + |q|/\sqrt{q^2 - 1}] + x_0. \quad (5.3)$$

Зависимость от  $x$  термодинамических величин определяется из (2.6) и (5.1).

**6. Звуковая линия ( $\gamma = 3$ ).** Определим вид звуковой линии, реализующейся в течении (2.6) при  $\gamma = 3$ . Подставляя в уравнение представление (2.6) и используя (2.4), получим, что на плоскости  $\mathbb{R}^2(X, Y)$  ( $Y = \sqrt{b_0/(2\mu)} y$ ;  $X = X(x)$  — решение (2.5)) область сверхзвукового течения определяется неравенством

$$X[(X + \varepsilon\sqrt{X^2 - 1})(Y^2 - X^2) + X] > 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (6.1)$$

В этом случае  $|X| > 1$ . Заметим, что неравенство (6.1) сохраняется при замене  $X \rightarrow -X$  и  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ . Следовательно, достаточно решить его лишь для одного из значений  $\varepsilon$ , например  $\varepsilon = -1$ .

Оказывается, для  $\varepsilon = -1$  течение сверхзвуковое во всей полуплоскости  $X > 1$  и в бесконечных “секторах”, ограниченных прямой  $X = -1$  и ветвями кривой  $L: Y^4 = X^4 - X^2$ . Ее асимптотами являются прямые  $Y = \pm X$ . На рис. 2 области сверхзвукового течения отмечены знаком “плюс”, дозвукового — знаком “минус”.

Линиям тока (4.1) на плоскости  $\mathbb{R}^2(X, Y)$  соответствуют прямые  $Y = kX$ . При движении газа в области  $X < -1$  может происходить смена типа течения: сверхзвуковое течение непрерывно переходит в дозвуковое. Для того чтобы изобразить звуковую линию на физической плоскости  $\mathbb{R}^2(x, y)$ , необходимо задать зависимость решения уравнения (2.4) от переменной  $x$  ( $X = X(x)$ ).

**7. Течения со стационарной ударной волной.** Пусть  $p_i, \rho_i, c_i$  — давление, плотность и скорость звука,  $u_i$  — нормальные к фронту компоненты скорости газа перед ( $i = 1$ )

и за ( $i = 2$ ) фронтом волны. Тогда имеют место условия на скачке — соотношения Ренкина — Гюгонно [16]

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \quad (7.1)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2; \quad (7.2)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2. \quad (7.3)$$

При переходе через скачок сохраняются касательные к фронту волны компоненты скорости

$$\mathbf{u}_{1\tau} = \mathbf{u}_{2\tau}. \quad (7.4)$$

Имеет место теорема Цемплена: абсолютная величина нормальной к фронту компоненты скорости  $u_i$  больше скорости звука  $c_i$  перед фронтом и меньше ее за фронтом волны:

$$u_1^2 > c_1^2, \quad u_2^2 < c_2^2. \quad (7.5)$$

Эта теорема эквивалентна утверждению о возрастании энтропии при переходе через скачок.

Интеграл Бернулли сохраняет свое значение при переходе через скачок.

Запишем условия (7.1)–(7.5) для решения (2.6). Покажем, что различным интегральным кривым, отвечающим решению уравнения (2.4) и проходящим через заданную точку, соответствуют состояния перед (состояние 1) и за (состояние 2) фронтом ударной волны, задаваемой уравнением  $x = x_0$ . Поскольку все физические величины выражаются по формулам (2.6) через функцию  $X$  и ее производную  $X'$ , соотношения на скачке (7.1)–(7.4) можно удовлетворить выбором различных ИК из пучка. На фронте волны в силу зависимости  $X = X(x)$  эти соотношения связывают постоянные величины.

Теорема Цемплена (неравенство (7.5)), позволяющая определить, какие ИК соответствуют состоянию газа перед скачком и за ним, доказана для произвольного значения  $\gamma$ . Анализ остальных соотношений (7.1)–(7.4) проводится для  $\gamma = 3$ .

**8. Теорема Цемплена.** Состояниям газа перед и за фронтом скачка  $x = x_0$  отвечают решения  $X_1$  и  $X_2$  ключевого уравнения и производные  $X'_1, X'_2$  этих решений.

**Лемма.** *Ветвь  $\Gamma_{01}$  соответствует состоянию газа перед фронтом ударной волны, а ветвь  $\Gamma_{02}$  — за ним.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Запишем первое условие (7.5) в терминах решения (2.6):

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{2b_0^2}{\mu^2(\gamma - 1)} \frac{X^{\gamma-1}}{X'^{\gamma+1}} > 1. \quad (8.1)$$

Подставляя в (8.1) представление для  $X^{\gamma-1}/X'^{\gamma+1}$  из (2.5), получим

$$X'^2 < \frac{b_0}{\mu} \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} = z_*^2. \quad (8.2)$$

Из неравенства (8.2) и свойств 2, 4 следует доказательство леммы. Отбор ведется по углу наклона интегральных кривых: при  $X > 0$  и  $X' > 0$  состоянию перед фронтом отвечает кривая с меньшим, ограниченным углом наклона, а за фронтом — интегральная кривая с большим углом наклона (см. неравенства (3.10) и (3.11)). Следует отметить, что состояние перед фронтом, т. е. ветвь  $\Gamma_{01}$ , соответствует заведомо сверхзвуковому течению, а за фронтом течение может быть как дозвуковым, так и сверхзвуковым (см. (6.1)).

**9. Свойства решения ( $\gamma = 3$ ).** Для  $\gamma = 3$  можно уточнить некоторые свойства решения уравнения (2.4). Разрешая его относительно  $X'$ , получим

$$X'^2 = (b_0/\mu)(X^2 + \varepsilon X \sqrt{X^2 - 1}), \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (9.1)$$



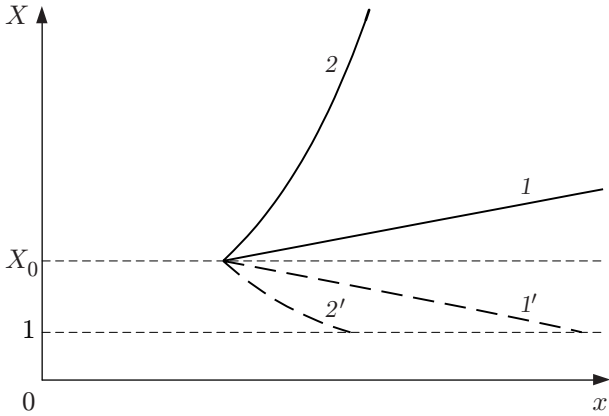


Рис. 3

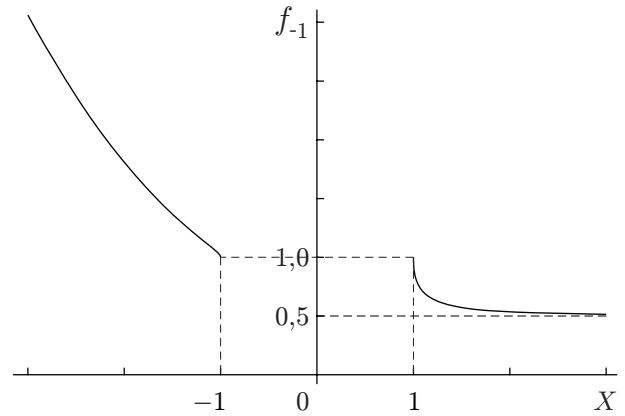


Рис. 4

Уравнение (9.1) инвариантно при замене  $X \rightarrow -X$  и  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  (см. п. 6), поэтому достаточно исследовать поведение решений при  $\varepsilon = -1$  и  $X > 0$ .

1. Все интегральные кривые уравнения (9.1), кроме прямой  $X = 0$ , являющиеся монотонными кривыми, расположены на плоскости  $\mathbb{R}^2(x, X)$  в области

$$D = \{(x, X): |X| > 1\}. \quad (9.2)$$

Границы области  $D$  — прямые  $X = \pm 1$  — являются предельными линиями данного течения, на них  $X''$  становится неограниченной.

2. Через каждую точку области  $D$  проходит пучок из двух пар интегральных кривых, симметричных относительно прямой  $X = X_0 > 1$  (рис. 3). Паре кривых, расположенных выше этой прямой, при разрешении уравнения (9.1) относительно  $X'$  соответствует знак “плюс”. Эти кривые отвечают монотонно возрастающим решениям, для них  $X' > 0$ . Кривой 2 этой пары отвечает  $\varepsilon = 1$  в формуле (9.1), кривой 1 —  $\varepsilon = -1$ . Ниже прямой  $X = X_0$  расположены кривые 1' и 2', получающиеся отражением кривых 1, 2 относительно этой прямой. Условию  $XX' > 0$  удовлетворяет только верхняя пара кривых. Кривая 1 соответствует ветви  $\Gamma_{01}$ , кривая 2 — ветви  $\Gamma_{02}$  (см. рис. 1). Каждой точке граничной прямой  $X = 1$  (точка  $A$  на рис. 1) соответствуют две интегральные кривые, на которых  $X' = \varepsilon \sqrt{b_0/\mu}$ . Одна из них (при  $\varepsilon = 1$ ) выходит из точки границы вверх, вторая (при  $\varepsilon = -1$ ) входит в точку границы, т. е. монотонно убывает по переменной  $x$ .

Аналогичная картина имеет место при  $X < 0$ ,  $X' < 0$ . Интегральные кривые уравнения (9.1) показаны на рис. 3. Различный характер выпуклости кривых 1 и 2 доказан в свойстве 5.

3. Условие (8.2) теоремы Цемплена, определяющее состояние газа перед фронтом волны, с использованием (9.1) сводится к следующему неравенству:

$$f_\varepsilon(X) \equiv X^2 + \varepsilon X \sqrt{X^2 - 1} < 1, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (9.3)$$

Пусть  $\varepsilon = -1$ . Тогда (9.3) выполняется при  $X > 1$  и не выполняется при  $X < -1$ .

Пусть  $\varepsilon = 1$ . Тогда (9.3) выполняется при  $X < -1$  и не выполняется при  $X > 1$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow +\infty} f_1(X) &= +\infty, & \lim_{X \rightarrow -\infty} f_{-1}(X) &= +\infty, \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} f_1(X) &= 1/2, & \lim_{X \rightarrow +\infty} f_{-1}(X) &= 1/2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$f'_\varepsilon(X) = \varepsilon(X^2 - 1)^{-1/2}(X + \varepsilon\sqrt{X^2 - 1})^2.$$

График функции  $f_\varepsilon(X)$  при  $\varepsilon = -1$  приведен на рис. 4.

**10. Соотношения на скачке** ( $\gamma = 3$ ). Пусть состоянию газа перед скачком  $x = x_0$  отвечает пара  $(X_1, X'_1)$ , а за скачком —  $(X_2, X'_2)$ . При этом  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ) являются решениями уравнения (9.1) с  $\varepsilon_1 = -1$  и  $\varepsilon_2 = 1$  соответственно. Согласно (2.6) физические величины различаются также значениями постоянных  $b_{0i}, R_{0i}, S_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ). Запишем условие (7.4), подставляя значение  $v_i$  из (2.6):

$$(b_0y/(\sqrt{\mu}X))_1 = (b_0y/(\sqrt{\mu}X))_2. \quad (10.1)$$

Сопоставляя (10.1) и условие сохранения правой части интеграла Бернулли (4.2) на скачке, получим, что постоянная  $b_0$  сохраняется при переходе через скачок:  $b_{01} = b_{02} = b_0$ .

Далее, из сопоставления (10.1) с уравнением линий тока (4.1) следует, что (10.1) означает сохранение величины  $\psi$  (“номера” линии тока) при переходе через скачок. На скачке линия тока претерпевает излом, частица газа при переходе через нее меняет скорость. Это возможно в силу свойств решения уравнения (9.1). В каждой точке области  $D$  (9.2) имеем пучок из двух ИК, которым соответствуют различные линии тока. На скачке происходит переключение с одной ИК на другую, частица газа непрерывно переходит с кривой 1 на кривую 2 (см. лемму), меняя скорость. Сокращая в (10.1) слева и справа сомножители, значения которых одинаковы по обе стороны от скачка, получим

$$\sqrt{\mu_1}X_1 = \sqrt{\mu_2}X_2. \quad (10.2)$$

Запишем формулы (2.6) для состояний по разные стороны от скачка:

$$\begin{aligned} u_i &= b_0/(\sqrt{\mu_i}X'_i), & \rho &= R_{0i}X'_i/X_i, & p_i &= S_{0i}R_{0i}^3(X'_i/X_i)^3, \\ c_i^2 &= \mu_i(X'_i/X_i)^2, & \mu_i &= 3S_{0i}R_{0i}^2, & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (10.3)$$

В дальнейшем будем рассматривать область  $\Sigma_1 = \{(X_1, X'_1; X_2, X'_2): X_1 \geq 1, X'_1 > 0, X_2 \geq 1, X'_2 > 0\}$ . Запишем условие сохранения массы на скачке (7.1), используя (10.3). Получим

$$\sqrt{S_{01}}X_1 = \sqrt{S_{02}}X_2. \quad (10.4)$$

Подставляя в (10.2) выражения для  $\mu_i$  из (10.3), приходим к (10.4) при условии

$$R_{01} = R_{02} = R_0. \quad (10.5)$$

Одно из редуцированных условий на скачке и есть условие (10.4). Условие сохранения энергии на скачке (7.3) совпадает с инвариантным интегралом Бернулли (1.4) и, следовательно, с уравнением (2.4). Оно не накладывает дополнительных условий (сохранение постоянной  $b_0$  следует из общего интеграла Бернулли). Таким образом, ключевое уравнение (2.4) (или (9.1) для  $\gamma = 3$ ) есть условие (7.3) на скачке.

Наиболее громоздким по сравнению с соотношениями (7.1) и (7.3) является приведение к каноническому виду условия сохранения импульса на скачке (7.2). Будем преобразовывать выражение  $p + \rho u^2$ , подставляя в него представление (2.6), заменяя производные из (10.1) и упрощая его с помощью (10.4) и (10.5). Преобразуем выражение для скачка ( $[f] = f_2 - f_1$ ):

$$\begin{aligned} [p + \rho u^2] &= \left[ \frac{S_0 R_0^3}{X X'} \left( \frac{X'^4}{X^2} + \frac{b_0^2}{\mu S_0 R_0^2} \right) \right] = \\ &= \left[ \frac{S_0^{3/2}}{(\sqrt{S_0} X) X'} \left( X'^2 + \frac{2b_0}{\mu} \right) \right] = \left[ \frac{S_0^{3/2}}{\mu^2 X'} (X^2 + \varepsilon X \sqrt{X^2 - 1} + 1) \right]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Введем следующее обозначение:

$$A_i = X_i^2 + \varepsilon_i X_i \sqrt{X_i^2 - 1}, \quad i = 1, 2. \quad (10.7)$$

Согласно теореме Цемплена (см. лемму)  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ . Запишем условие на скачке (10.6) в терминах (10.7):

$$(A_1 + 1)/(\sqrt{S_{01}}X'_1) = (A_2 + 1)/(\sqrt{S_{02}}X'_2). \quad (10.8)$$

Возводя равенство (10.8) в квадрат и подставляя значения  $X_i'^2$  из (9.1), получим равенство

$$A_2(A_1 + 1)^2 = A_1(A_2 + 1)^2,$$

из которого следует

$$(A_1 - A_2)(A_1 A_2 - 1) = 0. \quad (10.9)$$

Условие  $A_1 = A_2$  влечет равенство  $X_1^2 = X_2^2$ , тогда из (10.4) получим  $S_{01} = S_{02}$ , что противоречит условию возрастания энтропии при переходе через скачок. Следовательно, (10.9) удовлетворяется, только если  $A_1 A_2 = 1$ . В развернутом виде это соотношение имеет вид

$$(X_1^2 - X_1\sqrt{X_1^2 - 1})(X_2^2 + X_2\sqrt{X_2^2 - 1}) = 1 \quad (10.10)$$

и является аналогом уравнения Прандтля на скачке [10].

Суммируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Условия (7.1)–(7.3) на скачке для решения (10.3), (9.1) эквивалентны конечным соотношениям (10.4) и (10.10), связывающим на фронте скачка  $x = x_0$  значения решений  $X_1$  и  $X_2$  дифференциального уравнения (9.1) при  $\varepsilon_1 = -1$  и  $\varepsilon_2 = 1$ .*

Соотношение (10.4) задает на плоскости состояний  $\mathbb{R}^2(X_1, X_2)$  однопараметрическое семейство прямых с угловым коэффициентом  $k = \sqrt{S_{01}/S_{02}}$ ,  $0 < k < 1$ . Уравнение (10.10) не содержит параметров и определяет на этой плоскости некоторую кривую. Каждая прямая (10.4) отвечает классу ударных переходов — самосопряжению решений вида (10.3), для которых фиксировано отношение  $S_{01}/S_{02} = k^2$ . Точки пересечения ее с кривой (10.10) определяют пары состояний  $(X_1, X_2)$ , которые можно сопрягать через ударную волну. Таким образом, кривая (10.10) является ударной адиабатой, характеризующей возможные ударные переходы для данного решения (10.3).

**11. Анализ ударной адиабаты (10.10).** Заметим, что уравнение (10.10) инвариантно относительно замены  $T: X_1 \rightarrow -X_2, X_2 \rightarrow -X_1$ , причем  $T^2 = 1$  (инволюция). Поэтому можно рассматривать эту кривую при  $X_1 \geq 1, X_2 \geq 1$ . Введем параметризацию

$$X_1 = 1/\sin \varphi, \quad X_2 = 1/\sin \psi,$$

где  $\varphi \in (0, \pi/2]$ ;  $\psi \in (0, \pi/2]$ . Тогда уравнение (10.10) приводится к виду

$$\cos(\varphi/2) \sin(\psi/2) = 1/2. \quad (11.1)$$

Функции в левой части соотношения (11.1) монотонны на указанных интервалах. При  $\varphi = \pi/2$  получаем  $\psi = \pi/2$ , при  $\varphi \rightarrow +0$  имеем  $\psi \rightarrow \pi/3 + 0$ . Следовательно,  $\psi \in (\pi/3, \pi/2]$ . Уравнение (11.1) однозначно разрешимо в виде

$$\varphi = 2 \arccos(1/(2 \sin(\psi/2))). \quad (11.2)$$

Соотношение (11.2) определяет  $\varphi$  как однозначную функцию на указанном интервале. Следовательно, уравнение (10.10) определяет кривую, состоящую из одной строго монотонной ветви. Важная особенность этой кривой — выход на асимптотику. Если  $X_1 \rightarrow +\infty$  ( $\varphi \rightarrow +0$ ), то

$$X_2 \rightarrow X_{2l} = 2/\sqrt{3} \approx 1,1574 \quad (\psi \rightarrow \pi/3 + 0). \quad (11.3)$$

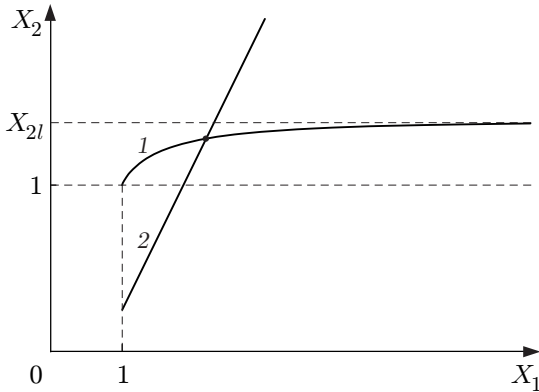


Рис. 5

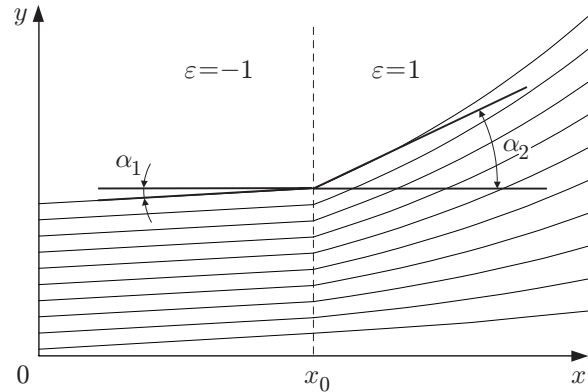


Рис. 6

Кривая (10.10) показана на рис. 5 (кривая 1). Прямая (10.4) (кривая 2 на рис. 5) имеет единственную точку пересечения с кривой (10.10) при  $S_{01}/S_{02} \in (0, 1)$ . Это следует из того, что кривая (10.10) проходит через точку  $X_1 = X_2 = 1$ , строго монотонно возрастает и на ней  $X_2 \leq X_{2l}$ . Подставим в уравнение (10.10)  $X_2 = kX_1$  и положим  $X_1 = 1/\sin \varphi$ ,  $\varphi \in (0, \pi/2]$ . Тогда (10.10) принимает вид

$$P(z) \equiv z^4 - z^3 + (k^2/4)z - k^2/16 = 0,$$

где  $z = \cos^2(\varphi/2)$ ,  $z \in [1/2, 1]$ . Так как  $P(1/2) < 0$ ,  $P(1) > 0$ , то  $P(z)$  имеет вещественный корень на этом интервале. Вследствие монотонности и ограниченности кривой (10.10) этот корень единственный.

Таким образом, любому состоянию перед скачком  $(X_1, S_{01})$  соответствует пара  $(X_2, S_{02})$ , где  $X_2$  вычисляется из уравнения (10.10), а  $S_{02}$  — согласно (10.4).

**12. Третий предельный режим течения.** Согласно (9.1) предельному состоянию  $X_2 = X_{2l}$  (11.3) соответствует  $X'_{2l} = \sqrt{2b_0/\mu_2}$ . Физические параметры этого течения вычисляются по формулам (10.3):

$$u_{2l} = \varepsilon\sqrt{b_0/2}, \quad c_l = \sqrt{3b_0/2}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{12.1}$$

Компонента скорости  $v_l$  вычисляется по формулам (2.6). Режим (12.1) реализуется асимптотически при  $X_1 \rightarrow +\infty$  и  $X_2 \rightarrow X_{2l}$ . Тогда из (10.4) следует, что  $S_{02}/S_{01} \rightarrow +\infty$ , т. е. ударная волна является сильной.

Отметим еще одно свойство предельного течения (12.1).

**Теорема 2.** *В случае сильной ударной волны ударный переход на решении (10.3) реализует асимптотически косой скачок уплотнения, на котором достигается предельный угол поворота потока.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Линии тока течения на физической плоскости задаются уравнением (4.1). Обозначим углы, образуемые касательными к линиям тока перед и за скачком, через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , угол поворота потока  $\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$  (рис. 6). Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha_i = (\sqrt{\mu_i}\psi/b_0)X'_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{12.2}$$

Подставляя в (12.2)  $X'_i$  из (9.1), получим

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\psi}{\sqrt{b_0}} \frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{1 + (\psi^2/b_0)\sqrt{A_1A_2}}, \tag{12.3}$$

где  $A_i$  определены формулами (10.7). Условие (10.10) на скачке имеет вид  $A_1A_2 = 1$ , где  $A_1 \geq 0$ ,  $A_2 \geq 0$ . В силу этого условия выражение (12.3) принимает вид

$$\operatorname{tg} \Delta = K_0F(X_2), \tag{12.4}$$

где постоянная

$$K_0 = 1/(\sqrt{b_0}/\psi + \psi/\sqrt{b_0}) \leq 1/2, \quad (12.5)$$

а функция  $F(X_2) = \sqrt{A_2} - (1/\sqrt{A_2})$  строго монотонно возрастает при  $X_2 > 1$ . Действительно,

$$F'(X_2) = (1 + 1/A_2^2)(X_2 + \sqrt{X_2^2 - 1})^2 / \sqrt{X_2^2 - 1} > 0.$$

Следовательно, функция  $F(X_2)$  достигает наибольшего значения при максимально возможном значении аргумента, т. е. при  $X_2 \rightarrow X_{2l}$ :

$$F(X_2) \leq F(X_l) = 1/\sqrt{2}. \quad (12.6)$$

Учитывая (12.5) и (12.6), для (12.4) получаем оценку

$$\operatorname{tg} \Delta \leq 1/(2\sqrt{2}). \quad (12.7)$$

Из (12.7) следует, что  $\sin \Delta = 1/3$ , что совпадает со значением  $1/\gamma$ , характеризующим предельный угол поворота потока в косом скачке [10]. За скачком реализуется течение (12.1).

Имеем также

$$\lim_{X_1 \rightarrow +\infty} A_1 = 1/2, \quad \lim_{X_2 \rightarrow X_{2l}} A_2 = 2, \quad (12.8)$$

причем  $A_i$  являются монотонными функциями аргументов  $X_i$  (см. рис. 4). Из (12.8) и (9.1) следуют оценки

$$X'_1 \leq \varepsilon_0/(\sqrt{2}S_{01}), \quad X'_2 \leq \sqrt{2}\varepsilon_0/S_{02}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{b_0/(3R_0^2)}.$$

**13. Физическая картина течения ( $\gamma = 3$ ).** Для течения (2.6) прямые  $X = \pm 1$  являются предельными (см. свойство б), решение за них не продолжается. Эти прямые можно трактовать как линии, на которых задается входящий поток газа со следующими параметрами:

$$u = \varepsilon_1 \sqrt{b_0}, \quad c^2 = b_0, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad (13.1)$$

а компонента скорости  $v$  задается (2.6). Поток имеет линейный по вертикальной координате  $y$  профиль скорости и является сверхзвуковым всюду, кроме оси  $Ox$ , на которой  $|\mathbf{u}| = c$ , являющейся звуковой линией. На плоскости  $\mathbb{R}^2(X', X)$  месту входа потока соответствует точка  $A$ , которой отвечает состояние (13.1) кривой  $\Gamma_0$  (см. рис. 1). Эта точка разделяет ветви  $\Gamma_{01}$  и  $\Gamma_{02}$ . В зависимости от условий на бесконечности (3.6) или (3.7) реализуется либо сверхзвуковой поток газа, соответствующий ветви  $\Gamma_{01}$  и интегральной кривой 1 на рис. 3, либо дозвуковой при  $x \rightarrow +\infty$  поток, соответствующий ветви  $\Gamma_{02}$  и интегральной кривой 2. Согласно результатам п. 6 в этом потоке возможен непрерывный переход через скорость звука.

Возможно течение газа с ударной волной — косым скачком уплотнения, тормозящим поток. Это течение также начинается из состояния (13.1), соответствующего точке  $A$ . Сверхзвуковая часть потока до скачка соответствует ветви  $\Gamma_{01}$  и кривой 1, затем скачкообразно происходит переход на ветвь  $\Gamma_{02}$  и кривую 2. На рис. 1 скачок обозначен горизонтальной стрелкой. На рис. 6 показана картина течения на физической плоскости (см. соотношения (5.1) и (5.3)). Это решение можно трактовать как поток газа, тормозящийся косым скачком уплотнения в воздухозаборнике.

Положение фронта (значение  $x_0$ ) определяется по данным перед фронтом, т. е. по значению  $X_1$ . В силу монотонной зависимости  $X = X(x)$  это соответствие однозначно на

интегральных кривых 1 и 2 на рис. 3. По заданному значению  $X_1$  вычисляется положение фронта  $x_0$ , затем по ударной адиабате (10.10) находится  $X_2$ . После этого из соотношения (10.4) при заданном значении энтропии перед скачком  $S_{01}$  определяется ее значение  $S_{02}$  за скачком.

Любая линия тока может трактоваться как жесткая стенка. При такой трактовке решение представляет собой течение в канале с криволинейными стенками, причем при наличии скачка кривизна стенок также меняется скачкообразно при прохождении фронта волны.

Возможна и “обратная” трактовка полученного результата. Скачкообразное изменение кривизны криволинейного канала приводит к образованию в нем ударной волны.

**14. Обсуждение результатов.** Приведенная конструкция ударного перехода может быть применена и к общим решениям вида (1.1), в которых функция  $H \neq 0$ . Это возможно, поскольку аргументы  $H$  являются лагранжевыми координатами и непрерывны при переходе через скачок  $x = x_0$ . Добавление  $H$  изменяет касательную к фронту компоненту скорости, но при этом ее значение не меняется при переходе через скачок. В этом случае решение является нестационарным, а фронт волны  $x = x_0$  неподвижен.

Представляет интерес задача построения скачка для максимально общего уравнения состояния газа. В этом случае в ключевом уравнении (1.2) нелинейная зависимость от производной определяется видом уравнения состояния — функцией  $I = I(\rho)$ . Число ИК в пучке может быть в принципе любым. Возникает вопрос о реализуемости последовательности (каскада) ударных скачков.

Расширение класса точных решений уравнений газовой динамики с ударными волнами является интересной математической задачей, имеющей разнообразные газодинамические приложения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
3. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
6. Овсянников Л. В. Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 362–372.
7. Меньщиков В. М. О продолжении инвариантных решений уравнений газовой динамики через ударную волну // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 4. С. 163–169.
8. Меньщиков В. М. О непрерывном сопряжении инвариантных решений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 10. С. 70–84.
9. Чупахин А. П. Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 1-99).
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
11. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика, механика. М.: Физматлит, 2001.

12. **Munk M., Prim R. C.** On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947. V. 33. P. 137–141.
13. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. Т. 2.
14. **Гувернюк С. В.** Динамические инварианты в задачах об установившемся обтекании тел идеальным газом // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 4. С. 478–481.
15. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 2.
16. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

*Поступила в редакцию 22/XI 2002 г.*

---