УДК 532.526

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ВНЕЗАПНОМ ДВИЖЕНИИ ЛИНИИ ТРЕХФАЗНОГО КОНТАКТА

В. В. Пухначев, И. Б. Семенова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Гидродинамические задачи, связанные с течениями жидкостей с линиями трехфазного контакта (например, твердое тело — жидкость — газ или твердое тело и две несмешивающиеся жидкости), представляют особый интерес. В последние годы большое внимание уделялось стационарным и квазистационарным течениям. Существенно нестационарные задачи подобного рода практически не рассматривались. В данной работе изучается модельная задача, связанная с резко нестационарным движением конечного объема вязкой несжимаемой жидкости с линией трехфазного контакта. Статический краевой угол предполагается прямым, а начальная свободная поверхность жидкости — цилиндрической. Внезапно одна из плоскостей начинает движение навстречу другой с постоянной конечной скоростью. Рассматриваются течения с большими числами Рейнольдса и малыми капиллярными числами. Массовые силы в задаче не учитываются. Основной результат работы состоит в построении формальной асимптотики решения на малых временах.

1. Постановка задачи. Рассматривается модельная задача о резко нестационарном движении конечного объема вязкой несжимаемой жидкости, заключенной между двумя бесконечными твердыми плоскостями, в начальный момент времени покоящимися на расстоянии $2a$ друг от друга. Статический краевой угол (т. е. угол подхода свободной границы к твердой) принимается равным $\pi/2$, а свободная поверхность жидкости предполагается цилиндрической (в сечении окружность с радиусом b). Внезапно одна из плоскостей начинает двигаться навстречу другой с постоянной скоростью V. Рассматриваются течения с большими числами Рейнольдса Re и малыми капиллярными числами Ca (например, для воды при комнатной температуре и значениях параметров $a = b = 10$ см, $V = 10$ см/с имеем $\mathrm{Re} = Va/\nu = 10^4$, $\mathrm{Ca} = \rho\nu V/\sigma = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости). Выбор цилиндрической свободной поверхности позволяет использовать в специально выделенной центральной области течения решение Л. В. Овсянникова [1], полученное им для аналогичной задачи в случае идеальной несжимаемой жидкости. (Широкий класс точных решений уравнений Эйлера, найденный Л. В. Овсянниковым, изучен в работах [2, 3].) В работе [4] замечено, что соответствующее решение Овсянникова удовлетворяет условиям на свободной границе и для случая вязкой несжимаемой жидкости. Это дает основания считать, что нестационарный пограничный слой вблизи свободной поверхности не возникает. Аналогичная задача для нестационарного пограничного слоя вблизи твердых плоскостей в отсутствие свободных границ решена Блазиусом [5]. Решение, аналогичное его решению, можно использовать в данной задаче для областей, непосредственно примыкающих к твердой границе и удаленных от свободной. Таким образом, задача фактически сводится к определению движения в области, расположенной в непосредственной близости как от

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00818).

твердой, так и от свободной границы, т. е. в окрестности линии трехфазного контакта. Возникающее течение считается осесимметричным. Дополнительно предполагается, что массовые силы отсутствуют.

Вводится цилиндрическая система координат (r, θ, z), где ось z направлена по оси жидкого цилиндра. С учетом сделанных предположений уравнения Навье — Стокса в цилиндрической системе координат имеют вид [6]

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2}\Big); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (1.3)$$

где v_r — компонента вектора скорости в направлении изменения радиуса r; v_z — компонента вектора скорости в направлении изменения оси z; p — давление в жидкости; t — время.

Уравнение неразрывности (1.3) позволяет ввести функцию тока Стокса ψ так, что $v_r = \partial\psi/(r\partial z)$, $v_z = -\partial\psi/(r\partial r)$. После исключения давления путем перекрестного дифференцирования из уравнений (1.1), (1.2) следует уравнение

$$\frac{\partial\tilde\Delta\psi}{\partial t} = \nu\tilde\Delta\tilde\Delta\psi + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\tilde\Delta\psi}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\tilde\Delta\psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\tilde\Delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (1.4)$$

где $\tilde\Delta = \partial^2/\partial r^2 - \partial/(r\partial r) + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Стокса. Теперь это уравнение рассматривается в непосредственной близости от твердой границы, но в отдалении от свободной границы (так, чтобы временно можно было не учитывать ее влияние). В соответствии с [5] при движении, возникающем из состояния покоя, член $\nu\tilde\Delta\tilde\Delta\psi$ в первый момент времени, когда пограничный слой еще очень тонок (толщина пограничного слоя $\delta \sim \sqrt{\nu t}$), имеет доминирующее значение, в то время как вклад конвективных членов в величину ускорения является малым. Тогда указанный член уравновешивается нестационарным локальным ускорением $\partial\tilde\Delta\psi/\partial t$ и уравнение (1.4) можно асимптотически упростить:

$$\frac{\partial\tilde\Delta\psi}{\partial t} = \nu\tilde\Delta\tilde\Delta\psi. \quad (1.5)$$

В этой области его приближенное решение можно искать по аналогии с асимптотическим решением Блазиуса [5] в виде $\psi_m = \sqrt{\nu t}r^2 cf(z/\sqrt{\nu t}) + O(Vt/a)$. Подстановка этого представления функции тока в (1.5) дает обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $f(\zeta)$

$$-\frac{1}{2}f^{\rm II} - \frac{\zeta}{2}f^{\rm III} = f^{\rm IV} \Leftrightarrow -\Big(\frac{\zeta}{2}f^{\rm II}\Big)^{\rm I} = f^{\rm IV},$$

где $\zeta = z/\sqrt{\nu t}$. Его интегрирование даст $f^{\rm III} + (\zeta/2)f^{\rm II} = c_1$, где c_1 — некоторая константа. Но так как на твердой стенке должны выполняться условия прилипания, из которых следуют условия $f(0) = f^{\rm I}(0) = 0$, и, кроме того, должно быть выполнено условие на бесконечности $f^{\rm I} \to 1$ при $\zeta \to \infty$, то $c_1 = 0$ и указанное уравнение имеет единственное решение

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\zeta dl \int\limits_0^l \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)\,dm.$$

В данном представлении осталась неопределенной константа c. Рассматривая течение в центральной области цилиндра, т. е. в области, не примыкающей к твердым границам, правомерно использовать решение Л. В. Овсянникова [1], полученное им для аналогичной задачи с идеальной жидкостью. (Основные различия между этими задачами возникают именно в окрестности твердой стенки, где для идеальной жидкости ставится условие непротекания, а для вязкой — условие прилипания.) В соответствии с его решением, если критическая точка находится в центре симметрии, то поле скоростей имеет вид

$$v_r = \frac{Vr}{2a(1 - Vt/a)}, \qquad v_z = -\frac{Vz}{a(1 - Vt/a)}.$$

Если ввести новую координату $z' = z + a(1 - Vt/a)$ (радиус остается прежним: $r' = r$), то нижней плоскости соответствует $z' = 0$. Тогда в новых координатах, связанных с нижней плоскостью, $v_r = v_{r'} = Vr'/(2a(1 - Vt/a))$, $\quad v_z = -Vz'/(a(1 - Vt/a)) + V = v_{z'} + V$ и при $t = 0$ $v_{r'} = Vr'/(2a)$, $\quad v_{z'} = -Vz'/a$, откуда функция тока $\psi = V(r')^2 z'/(2a)$. Теперь, для того чтобы связать между собой решения Овсянникова и Блазиуса, выбирается ранее неопределенная константа $c = V/(2a)$. Тогда

$$\psi_m = \sqrt{\nu t}\frac{Vr^2}{2a}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\zeta} dl \int_0^{l} \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)dm, \tag{1.6}$$

где ψ_m — главный член в разложении функции тока основного течения при $t \to 0$.

Найденное решение ψ_m теряет силу в малой окрестности линии трехфазного контакта по двум причинам. Во-первых, решение, полученное по аналогии с решением Блазиуса, как сказано выше, не согласуется с условиями на свободной поверхности. Во-вторых, попытка продолжить решение вплоть до движущейся линии контакта с сохранением условий прилипания приводит к расхождению интеграла Дирихле [7, 8]. Это означает, что скорость диссипации кинетической энергии в жидкости бесконечна и решение не имеет физического смысла. Таким образом, следует отдельно рассматривать малую окрестность линии трехфазного контакта и искать в ней соответствующее решение.

С этой целью рассматривается окрестность линии контакта размером $\delta = \sqrt{\nu t}$, имеющим порядок толщины пограничного слоя. Вводятся локальные координаты $y = z$, $\quad x = r - b(1 - Vt/a)^{-1/2}$. Из автомодельности главного члена в асимптотическом разложении (1.6) следует естественная гипотеза о локальной автомодельности свободной поверхности и течения в выбранной области, из которой, в свою очередь, следует, что в первом приближении уравнение свободной поверхности в терминах (x, y) имеет вид

$$F(\xi, \eta) = 0, \tag{1.7}$$

где $\xi = x/\sqrt{\nu t}$; $\quad \eta = y/\sqrt{\nu t}$. Подстановка (1.7) в кинематическое условие на свободной поверхности [6] дает

$$-\frac{1}{2t}\Big(\xi\frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big) + \frac{1}{\sqrt{t}}\Big(v_x\frac{\partial F}{\partial \xi} + v_y\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big). \tag{1.8}$$

Предположим, что компоненты скорости $v_x = v_r - Vb/(2a)(1 - Vt/a)^{-3/2}$ и $v_y = v_z - V$ ограничены вблизи линии контакта. Тогда для малых значений t можно пренебречь вторым слагаемым в (1.8). В результате функция F будет зависеть только от $\theta_p = \mathrm{arctg}(\eta/\xi)$. Из равенства (1.7) следует, что $\theta_p = \mathrm{const}$ — уравнение свободной поверхности. Но в пределе при $r_p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \to \infty$ меридиональное сечение свободной поверхности становится прямой вертикальной линией. Таким образом, в полярных координатах r_p и θ_p равенство

(1.7) дает $\theta_p = \pi/2$. Это означает, что при малых t свободная граница остается близкой к цилиндрической поверхности радиуса $R(t) = b(1 - Vt/a)^{-1/2}$ включая саму зону контакта.

Очевидно, что в первом приближении в рассматриваемой окрестности линии контакта шириной порядка $\sqrt{\nu t}$ можно пренебречь кривизной самой линии и рассматривать в ней течение как плоское. В декартовых координатах (x, y) уравнение Стокса (1.5) записывается в виде

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\psi}}{\partial t} = \nu \Delta\Delta \tilde{\psi}, \qquad (1.9)$$

где Δ — оператор Лапласа; $\tilde{\psi}$ — функция тока, определенная так, что $v_x = \partial\tilde{\psi}/\partial y$ и $v_y = -\partial\tilde{\psi}/\partial x$ — соответствующие компоненты скорости.

Уравнение (1.9) имеет частное решение $\tilde{\psi}$, не зависящее от x: $\tilde{\psi}_p = \sqrt{\nu t}\, c_2 g(y/\sqrt{\nu t})$, которое важно для согласования с главным членом разложения функции тока основного потока. Из подстановки этого выражения в (1.9) следует уравнение для функции $g(\eta)$: $g^{\mathrm{III}} + g^{\mathrm{II}}\eta/2 = 0$, которое совпадает с уравнением для функции f, рассмотренным ранее. Из условий прилипания на твердой границе, а также условия на бесконечности $g^{\mathrm{I}} \to 0$, $\eta \to \infty$ находим

$$\tilde{\psi}_p = \sqrt{\nu t}\,\frac{Vb}{2a}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\eta} dl \int\limits_0^{l} \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)\, dm - \eta\Big). \qquad (1.10)$$

Константа $c_2 = Vb/(2a)$ выбрана из соображений согласования с основным потоком.

Следующим шагом ищется асимтотическое решение

$$\tilde{\psi} = \sqrt{\nu t}\,\Phi(\xi, \eta) + O(t) \qquad (1.11)$$

при $t \to 0$ уравнения (1.9), записываемого в виде

$$\Delta\Delta\Phi + \frac{1}{2}\Big(\xi \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial \eta} + \Delta\Phi\Big) = 0. \qquad (1.12)$$

При выводе граничных условий для Φ используется тот факт, что граничным условиям как на твердой границе, так и на свободной должен удовлетворять «полный» поток, в котором учитываются все три компоненты ψ_m, $\tilde{\psi}_p$, $\tilde{\psi}$.

Кинематическое условие на свободной границе (в системе координат (x, y) или (ξ, η), связанной со свободной границей) [6] имеет вид

$$(\tilde{\psi}_p + \tilde{\psi})_y + \tilde{v}_r = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\xi = 0),$$

где $\tilde{v}_r$ — радиальная компонента скорости основного потока, записанная в координатах (x, y). В соответствии с (1.6), (1.10) и (1.11) последнее условие переписывается следующим образом:

$$\sqrt{\nu t}\, g_\eta \frac{1}{\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\nu t}\,\Phi_\eta \frac{1}{\sqrt{\nu t}} + \frac{Vb}{2a}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\eta} \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)\, dm = 0.$$

Подставив в него выражение для g_η:

$$\Phi_\eta\Big|_{\xi=0} = \frac{Vb}{2a} - \frac{Vb}{2a}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\eta} \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)\, dm$$

и проинтегрировав это соотношение по η, получим

$$\Phi\Big|_{\xi=0} = \frac{Vb}{2a}\Big(\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\eta} dl \int\limits_0^{l} \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)\, dm\Big). \qquad (1.13)$$

Общий вид динамического условия на свободной границе

$$(p_a - p)\boldsymbol{n} + 2\rho\nu D \cdot \boldsymbol{n} = 2\sigma H \boldsymbol{n}, \tag{1.14}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к свободной поверхности; $D = (\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^*)/2$ — тензор скоростей деформации; H — средняя кривизна поверхности; p_a — атмосферное давление. В данном случае в соответствии с (1.11) нормальное напряжение $-p + 2\rho\nu\partial v_x/\partial x$ имеет порядок $1/\sqrt{t}$ при $t \to 0$; в соответствии с (1.7) капиллярное давление σH имеет тот же порядок. Их отношение пропорционально капиллярному числу Ca, которое предполагается малым. Следовательно, проекция левой части (1.14) на нормаль к свободной поверхности будет величиной $O(\mathrm{Ca})$. В свою очередь, касательные напряжения дадут

$$\frac{\partial^2(\tilde{\psi} + \tilde{\psi}_p)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2(\tilde{\psi} + \tilde{\psi}_p)}{\partial x^2} + \tilde{P}_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0,$$

где $\tilde{P}_{rz}$ — касательное напряжение, соответствующее основному потоку. С учетом формул (1.6), (1.10) и (1.11) это равенство перепишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\nu t}}\Phi_{\xi\xi} + \frac{1}{\sqrt{\nu t}}(g_{\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta}) + \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\frac{Vb}{2a}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{\eta^2}{4}\Big) = 0.$$

Подставив сюда выражения для $g_{\eta\eta}$ и $\Phi_{\eta\eta}$, получим

$$\Delta\Phi = \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = g_{\eta\eta} + 2\Phi_{\eta\eta} + \frac{Vb}{2a}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{\eta^2}{4}\Big) = -\frac{Vb}{2a}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{\eta^2}{4}\Big). \tag{1.15}$$

Для завершения постановки краевой задачи для уравнения (1.12) следует выписать условия на твердой границе. В соответствии с результатами, полученными в [7, 8], не следует требовать выполнения условий прилипания на всей твердой границе. (Как сказано выше, это может привести к расхождению интеграла Дирихле, т. е. к бесконечной скорости диссипации кинетической энергии в жидкости, и потере физического смысла решения.) В соответствии с этим граница $\eta = 0$ разбивается на две части: $0 < \xi < \xi_s$ и $\xi \geqslant \xi_s$, где ξ_s — малый параметр. Условия прилипания ставятся лишь на второй (большей) части границы (они уже использовались при выводе ψ_m и $\tilde{\psi}_p$):

$$\Phi = 0, \quad \Phi_\eta = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \xi \geqslant \xi_s. \tag{1.16}$$

На первой части границы условие $\Phi = 0$ сохраняется, а вместо второго используется условие идеального проскальзывания [7], дающее

$$\Phi_{\eta\eta} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{Vb}{2a}.$$

С учетом того что $\Phi_{\xi\xi} = 0$, условия на первой части границы имеют вид

$$\Phi = 0, \quad \Delta\Phi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{Vb}{2a} \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad 0 < \xi < \xi_s. \tag{1.17}$$

(Выбор условия идеального проскальзывания из различных условий проскальзывания [7] сделан с целью согласования с гипотезой локальной автомодельности течения вблизи движущейся линии контакта.) Итак, математическая задача (1.12), (1.13), (1.15)–(1.17) поставлена. Ниже эта задача решается численно.

2. Численное решение. Ввиду некомпактности области течения и особенности в коэффициентах при $r = 0$ задача (1.12), (1.13), (1.15)–(1.17) численно решается в четверти кольца: $0 \leqslant \mathrm{arctg}(\eta/\xi) \leqslant \pi/2$, $R_s^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 \leqslant R_b^2$, где R_s и R_b выбраны специальным образом (см. ниже). Для удобства численного решения в выделенной области задача переписывается в полярных координатах $r_p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\theta_p = \operatorname{arctg}(\eta/\xi)$, в которых выбранный сектор разворачивается в прямоугольник:

$$\Delta\Phi = -\omega; \tag{2.1}$$

$$\Delta\omega + \frac{1}{2}\Big(r_p\frac{\partial\omega}{\partial r_p} + \omega\Big) = 0, \tag{2.2}$$

где ω — завихренность. Граничные условия в новых терминах имеют вид:

— при $\theta_p = \pi/2$

$$\Phi = r_p - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{r_p} dl \int\limits_0^{l} \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)dm, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{r_p^2}{4}\Big); \tag{2.3}$$

— при $\theta_p = 0$

$$\Phi = 0, \qquad \Phi_{\theta_p} = 0 \quad \text{при} \quad r_p > r_s, \qquad \omega = 1/\sqrt{\pi} \quad \text{при} \quad r_p \leqslant r_s. \tag{2.4}$$

(Так как множитель $Vb/(2a)$ присутствует во всех граничных условиях, то его можно временно опустить.)

На специально введенных границах $r_p = R_s$ и $r_p = R_b$ ставятся следующие условия. При $r_p = R_s$ ищется решение в виде решения Моффатта [9]: $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} r_p^k h_k(\theta_p)$. В исходном уравнении (2.2) в силу малости 2-го и 3-го членов в его левой части при $r_p \to 0$ можно пренебречь всеми членами, кроме $\Delta\omega$. Фактически ищется решение приближенного уравнения $\Delta\Delta\Phi = 0$, где $\Delta = \partial^2/\partial r_p^2 + \partial/(r_p\partial r_p) + \partial^2/(r_p^2\partial\theta_p^2)$ — оператор Лапласа в полярных координатах. Для однозначной разрешимости полученного уравнения в качестве краевых условий используется непрерывность значений Φ и ω в точках «стыковки», т. е.

$$\Phi\Big|_{\theta_p=\pi/2}(R_s) = \Phi\Big|_{r_p=R_s}\Big(\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \Phi\Big|_{\theta_p=0}(R_s) = \Phi\Big|_{r_p=R_s}(0),$$

$$\omega\Big|_{\theta_p=\pi/2}(R_s) = \omega\Big|_{r_p=R_s}\Big(\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \omega\Big|_{\theta_p=0}(R_s) = \omega\Big|_{r_p=R_s}(0).$$

Это позволяет с точностью до малых величин порядка r_p^4 записать условие при $r_p = R_s$ в виде

$$\Phi = r_p^2\Big(\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cos 2\theta_p - \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Big), \quad \omega \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(1 - \frac{r_p^2}{4}\Big). \tag{2.5}$$

Величина радиуса R_b выбирается так, чтобы на ней были справедливы условия, выполнение которых предполагается для достаточно больших r_p, а именно:

1) обе компоненты скорости $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$ и завихренность ω стремятся к нулю при $r_p \to \infty$;

2) после введения обозначения $\chi(r_p) = \Phi\Big|_{\theta_p=\pi/2} = r_p - (1/\sqrt{\pi})\int\limits_0^{r_p} dl \int\limits_0^{l} \exp(-m^2/4)\, dm$ и проведения дифференцирования $\partial\chi(r_p)/\partial r_p = 1 - (1/\sqrt{\pi})\int\limits_0^{r_p}\exp(-m^2/4)\, dm = 1 -$ $(1/\sqrt{\pi})\Big(\int\limits_0^{\infty}\exp(-m^2/4)\, dm - \int\limits_{r_p}^{\infty}\exp(-m^2/4)\, dm\Big) = (1/\sqrt{\pi})\int\limits_{r_p}^{\infty}\exp(-m^2/4)\, dm > 0$ при всех

$r_p > 0$ обнаруживается, что $\chi(r_p)$ — монотонная неубывающая функция, причем при $r_p \gg 1$ $\chi(r_p) \approx c_3 > 0$. (Численно определено, что $c_3 \approx 1{,}13$.)

Таким образом, при соответственно выбранном R_b должно быть выполнено условие

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_p} = 0, \tag{2.6}$$

где n — внешняя нормаль к границе, что должно давать согласованность в точках «стыковки»:

$$\omega\Big|_{\theta_p=\pi/2}(R_b) = \omega\Big|_{r_p=R_b}\Big(\frac{\pi}{2}\Big), \qquad \omega\Big|_{\theta_p=0}(R_b) = \omega\Big|_{r_p=R_b}(0),$$

$$\Phi\Big|_{\theta_p=\pi/2}(R_b) = c_3, \quad \Phi\Big|_{\theta_p=0}(R_b) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{\theta_p=0}(R_b) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{r_p=R_b}(0).$$

Таким образом, задача для численного решения (2.1)–(2.6) поставлена. Следует отметить, что для функции тока Φ выбраны условия на всех четырех границах: на трех — условия Дирихле, на одной ($R_p = R_b$) — условие Неймана. Для завихренности ω условия Дирихле поставлены на трех границах. На четвертой же ($\theta_p = 0$) условие Дирихле выполняется при $r_p \leqslant r_s$, а при $r_p > r_s$ граничное условие будет получено из условий для Φ в процессе численного решения с использованием формулы Тома [10].

Так как наибольший интерес представляет область, примыкающая к началу координат, производится переход к логарифмическим координатам $\gamma = \ln r_p$, θ_p не меняется (что соответствует переходу к неравномерной сетке с более мелкими ячейками в интересующей области). При этом уравнения принимают вид

$$\exp(-2\gamma)\Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_p^2}\Big) = -\omega; \tag{2.7}$$

$$\exp(-2\gamma)\Big(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta_p^2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} + \omega\Big) = 0, \tag{2.8}$$

а граничные условия

$$\Phi\Big|_{\theta_p=\pi/2} = \exp(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\exp(\gamma)} dl \int\limits_0^l \exp\Big(-\frac{m^2}{4}\Big)dm, \quad \omega\Big|_{\theta_p=\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{\exp(2\gamma)}{4}\Big),$$

$$\Phi\Big|_{\theta_p=0} = 0, \quad \gamma > \gamma_{sl}: \quad \Phi_{\theta_p}\Big|_{\theta_p=0} = 0, \qquad \gamma \leqslant \gamma_{sl}: \quad \omega\Big|_{\theta_p=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.9}$$

$$\Phi\Big|_{\gamma=\gamma_s} = \exp(2\gamma)\Big(\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cos 2\theta_p - \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Big), \quad \omega\Big|_{\gamma=\gamma_s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_b} = 0, \quad \omega\Big|_{\gamma=\gamma_b} = 0.$$

Поставленная задача (2.7)–(2.9) решается методом установления (т. е. вводится фиктивное время) с использованием схемы Писмана — Рэкфорда путем расщепления уравнений по направлениям с шаблоном «крест». Выведенные таким образом разностные уравнения для Φ и ω имеют первый порядок аппроксимации по фиктивному времени и второй по пространственным координатам. Полученная схема абсолютно устойчива. Все четыре разностных уравнения решаются трехдиагональной прогонкой. Условие диагонального преобладания выполняется автоматически для уравнений для Φ, а для ω — при достаточно малом шаге по γ. Для вычисления двойных интегралов вероятности (использующихся в условии на свободной границе и при выведении ψ_m и $\tilde{\psi}_p$) применяется метод трапеций.

3. Результаты расчетов. Результаты численных расчетов представлены на рис. 1–4 (для их получения была составлена программа на языке PASCAL, насчитанные массивы данных изображались графически с использованием пакета SURFER фирмы GOLDEN

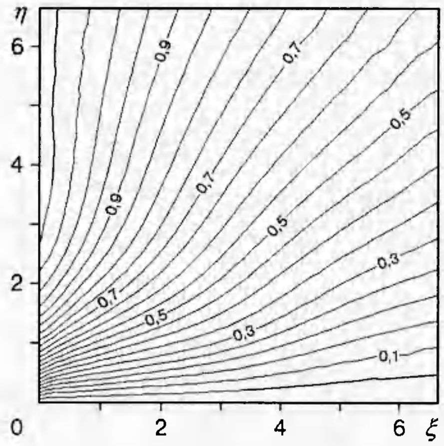

Рис. 1

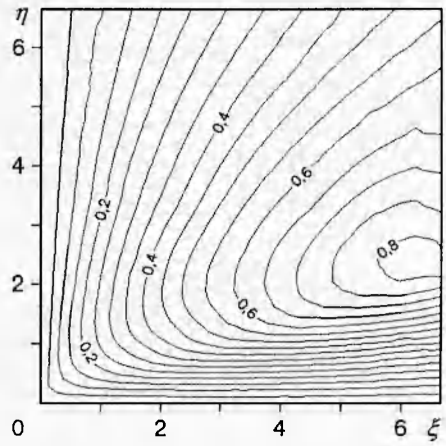

Рис. 2

SOFTWARE). На рис. 1 показаны изолинии расчетной функции тока Φ на плоскости декартовой системы координат (ξ, η), связанной с движущейся линией контакта. На рис. 2 представлены изолинии полной функции тока (т. е. учтены все три компоненты Φ, $\tilde{\psi}_p$, ψ_m) на плоскости (ξ, η). На рис. 3 изображены изолинии расчетной завихренности $\omega = -\Delta\Phi(\xi, \eta)$, а на рис. 4 — полной завихренности (т. е. с учетом вклада завихренностей, соответствующих $\tilde{\psi}_p$, ψ_m) в той же системе координат.

Расчеты показали, что в области численного исследования расчетная завихренность ω нигде не меняет знака и является неотрицательной. Исходя из этого предлагается гипотеза о том, что ω неотрицательна на всей четверти плоскости $0 \leqslant r_p < \infty$, $0 \leqslant \theta_p \leqslant \pi/2$. Для подтверждения предложенной гипотезы вводится новая функция $u(r_p, \theta_p)$, такая что $\omega(r_p, \theta_p) = \exp(-r_p^2/4)u(r_p, \theta_p)$, после чего исходные уравнения (2.1), (2.2) перепишутся в виде

$$\Delta\Phi = -\exp\Big(-\frac{r_p^2}{4}\Big)u(r_p, \theta_p); \tag{3.1}$$

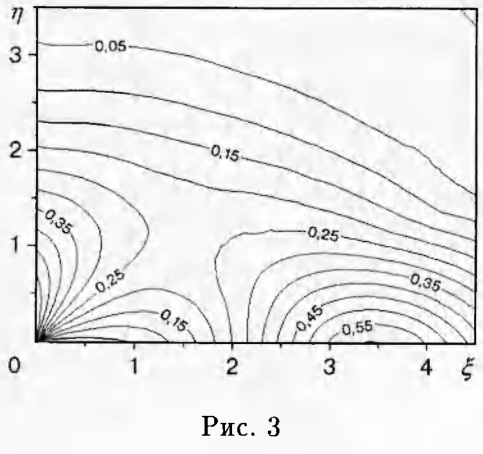

Рис. 3

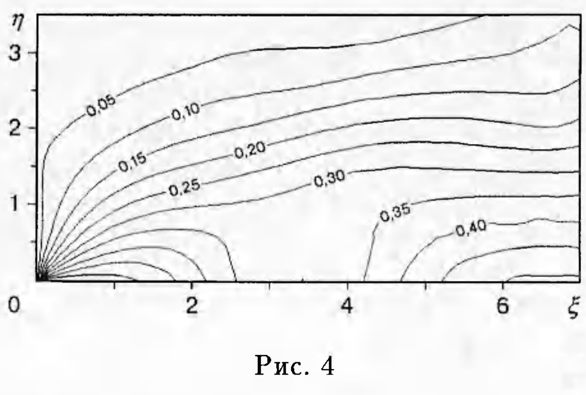

Рис. 4

$$\Delta u - \frac{1}{2}\left(r_p \frac{\partial u}{\partial r_p} + u\right) = 0. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) является эллиптическим, так же как и уравнение (2.2), но в отличие от последнего удовлетворяет принципу максимума [11]. Граничные условия на твердой и свободной границах для $\omega(r_p, \theta_p)$ (2.3), (2.4) дают соответственно условия для $u(r_p, \theta_p)$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{при} \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{r_p^2}{4}\right) \quad \text{при} \quad \theta_p = 0, \quad r_p \leqslant r_s$$

(при $r_p > r_s$ условие для u находится из условий для Φ в процессе численного решения по формуле Тома, при этом значения u для $r_p > r_s$ оказываются положительными). Предположение о неотрицательности u, а также ограниченности ω позволяет заключить, что завихренность ω экспоненциально убывает при $r_p \to \infty$.

С физической точки зрения выдвинутая гипотеза имеет следующий смысл. В декартовой системе координат (x, y), введенной ранее и соответствующей (r_p, θ_p), касательное напряжение $P_{x,y}$, связанное с функцией тока Φ, может быть переписано следующим образом [6]:

$$P_{x,y} = \rho\nu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) = \rho\nu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) = -\rho\nu\omega$$

при $y = 0$, поскольку $\partial^2\Phi/\partial x^2 = 0$ ввиду условия $\Phi = 0$ на стенке. Итак, знакоопределенность ω равносильна знакоопределенности соответствующего касательного напряжения P_{xy}. Причем, если в соответствии с гипотезой во всей области исследования $\omega \geqslant 0$, то $P_{xy} \leqslant 0$, что согласуется с физикой процесса.

В заключение следует отметить, что при варьировании малого параметра задачи r_s в пределах от 0,0007 до 0,02 качественные результаты не меняются.

4. Замечания. Прежде всего, следует оценить безразмерные параметры для типичной ситуации. Если в качестве жидкости выбрать воду при комнатной температуре и $a = b = 10$ см, $V = 10$ см/с, то $\mathrm{Re} = 10^4$, $\mathrm{Ca} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$ и число Маха $\mathrm{M} = V/\tilde{c} = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$ ($\tilde{c}$ — скорость звука). Это означает, что влияние сжимаемости жидкости пренебрежимо мало для времен порядка 10^{-4} с и бо́льших. Иными словами, влияние сжимаемости жидкости локализуется во времени, в то время как влияние вязкости локализуется в пространстве. Для момента времени $t = 10^{-4}$ с порядок толщины нестационарного пограничного слоя вблизи твердых границ $\delta = \sqrt{\nu t} = 10^{-3}$ см, т. е. намного меньше, чем начальная высота жидкого столба.

До этого момента роль гравитации в рассматриваемом процессе не учитывалась. Она важна в случае больших чисел Бонда $\mathrm{B} = \rho\tilde{g}a^2/\sigma$, где $\tilde{g}$ — ускорение свободного падения. В частности, нельзя пренебречь влиянием гравитации для заданного набора параметров в наземных условиях, хотя существует возможность провести соответствующий эксперимент в условиях практической невесомости. Другая возможность — уменьшить линейный масштаб одновременно с увеличением характерной скорости. Например, если $a = 0{,}1$ см и $V = 30$ см/с, то $\mathrm{Re} = 300$, $\mathrm{Ca} = 0{,}04$ и $\mathrm{B} = 0{,}13$ для наземных условий.

Следующим важным вопросом является физическая реализация решения Овсянникова. Дело в том, что начальные данные для этого решения не согласуются с распределением скорости, возникающим в результате внезапного движения твердых пластин навстречу друг другу. (Это распределение для плоского аналога задачи получено в [12]; переходный процесс с учетом сжимаемости жидкости для малых времен изучен в [13].) Как отмечено в [12], если отношение a/b мало, то линейное распределение скорости в начальных данных близко к предсказанному классической теорией гидродинамического удара. Попытка реализовать те же начальные условия для бо́льших значений a/b приводит к квадратичной зависимости импульсивного распределения начального давления на боковой границе от вертикальной компоненты (что, вероятно, может быть обеспечено взрывным нагружением жидкости).

Критическим моментом предложенной модели является предположение о том, что угол контакта равен $\pi/2$. В противном случае у нас не было бы ни точных решений, описывающих движение идеальной капиллярной жидкости, ни каких-либо результатов, касающихся разрешимости соответствующей начально-краевой задачи для уравнений Эйлера. Однако, если это решение известно (например, численно), можно построить нестационарный осесимметричный пограничный слой вблизи свободной границы жидкого моста, следуя методу, предложенному в [14], где рассматривалась аналогичная плоская задача.

Особая роль значения $\pi/2$ связана с тем фактом, что при произвольной величине угла контакта решение соответствующей задачи для уравнений Навье — Стокса имеет, вообще говоря, степенную особенность в угловой точке границы [15]. Это обстоятельство требует более детального изучения структуры течения внутри угловой зоны. Свободная часть границы уже не будет асимптотически прямолинейной; вероятно, эта линия на плоскости (r, z) будет иметь бесконечную кривизну в точке контакта.

Наконец, следует кратко обсудить выбор условия проскальзывания. Гипотеза о локальной автомодельности течения в угловой зоне упрощает наши рассуждения и вместе с тем соответствует автомодельному характеру течения в пограничном слое. В то же время желательно иметь некоторые дополнительные аргументы для рационального выбора малого параметра r_s. При этом следует учитывать, что при произвольном значении параметра r_s касательное напряжение на твердой стенке в решении поставленной задачи неограниченно возрастает в точке смены условия прилипания на условие идеального проскальзывания (этот факт следует из результатов статьи [8]). Вместе с тем, согласно [16], специальный выбор указанного параметра позволяет обеспечить ограниченность касательного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.
2. **Longuet-Higgens M. S.** A class of exact, time-dependent, free-surface flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 55. P. 529–543.
3. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения жидкости со свободной границей. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1975.
4. **Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнений Навье — Стокса // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 10. С. 125–137.
5. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.
7. **Dussan V. E. B., Davis S. H.** On the motion of a fluid — fluid interface along a solid surface // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. P. 71–95.
8. **Пухначев В. В., Солонников В. А.** К вопросу о динамическом краевом угле // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 6. С. 961–971.
9. **Moffatt H. K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18, N 1. P. 1–18.

10. **Тарунин Е. Л.** Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
11. **Андреев В. К., Белов Ю. Я.** Принцип максимума для уравнений второго порядка эллиптического и параболического типов: Метод. указ. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1986.
12. **Веклич Н. А., Малышев Б. М.** Плоская задача об ударе о жидкую полосу // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом: Сб. ст. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 99–121.
13. **Веклич Н. А.** Удар полосы сжимаемой жидкости о преграду // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 6. С. 138–145.
14. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222, № 4. С. 782–785.
15. **Solonnikov V. A.** On the Stokes equations in domains with non-smooth boundaries and on viscous incompressible flow with a free surface // Nonlinear PDE and their applications: College de France seminar. Boston: Pitman, 1982. V. 3. P. 340–423.
16. **Байокки К., Пухначев В. В.** Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // ПМТФ. 1990. № 2. С. 27–40.

Поступила в редакцию 11/XI 1997 г.