

УДК 532.516

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

В. В. Колесов, М. Н. Романов

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону

E-mails: kolesov@math.rsu.ru, romanovmaks@yandex.ru

Исследуются течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными вращающимися проницаемыми концентрическими цилиндрами вблизи точки бифуркаций, в результате которых возникают вторичное стационарное течение и автоколебания с азимутальными волнами. Методами теории бифуркаций коразмерности два гидродинамических течений, обладающих цилиндрическими симметриями, найдены стационарные, периодические и квазипериодические режимы движения жидкости с двумя, тремя и четырьмя независимыми частотами.

Ключевые слова: проницаемые цилиндры, вторичное стационарное течение, азимутальные волны, устойчивость, бифуркации, амплитудная система, предельные циклы, квазипериодические течения.

Введение. Основной режим движения жидкости между вращающимися проницаемыми цилиндрами представляет собой стационарное вращательно-симметричное течение. Экспериментальные исследования [1–3] показывают, что с увеличением числа Рейнольдса это течение сменяется вторичным стационарным течением или автоколебательным течением с бегущими в азимутальном направлении волнами. Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к усложнению структуры течения жидкости и возникновению различных сложных режимов, а затем и турбулентности.

В середине 80-х гг. XX в. В. И. Юдовичем в России [4], а также Ж. Йоссом и П. Шосса во Франции [5] была развита теория бифуркаций коразмерности два гидродинамических течений с цилиндрическими симметриями. Это позволило исследовать различные режимы движения жидкости, существующие вблизи точки бифуркаций, в результате которых возникают вторичное стационарное течение и азимутальные волны, для случая непроницаемых цилиндров [4, 5]. В данной работе эта теория применяется при расчете сложного движения жидкости в задаче Куэтта — Тейлора для проницаемых цилиндров.

1. Исходные уравнения и основной режим. Пусть вязкая однородная несжимаемая жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными проницаемыми концентрическими цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 . Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют. В качестве масштабов длины, скорости, времени примем соответственно R_1 , $\Omega_1 R_1$, $1/\Omega_1$.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания, выполняемого Южным федеральным университетом (проект № 213.01-11/2014-1), и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-31262).

В цилиндрических координатах r, φ, z (ось z направлена вдоль оси цилиндров) безразмерные уравнения Навье — Стокса и неразрывности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_r}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) v'_r - \frac{v'^2_\varphi}{r} + \frac{\partial \Pi'}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta v'_r - \frac{v'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v'_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) v'_\varphi + \frac{v'_r v'_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta v'_\varphi - \frac{v'_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) v'_z + \frac{\partial \Pi'}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda} \Delta v'_z, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}' = 0, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{V}' = \{v'_r, v'_\varphi, v'_z\}$ — вектор скорости; Π' — давление; t — время; $\lambda = \Omega_1 R_1^2 / \nu$ — число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость.

Предположим, что количество жидкости, вытекающей через поверхность одного цилиндра, совпадает с количеством жидкости, вытекающей через поверхность другого цилиндра. Тогда краевые условия для системы (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} v'_r &= \chi_0, & v'_\varphi &= 1, & v'_z &= 0, & r &= 1, \\ v'_r &= \chi_0/R, & v'_\varphi &= \Omega R, & v'_z &= 0, & r &= R, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\chi_0 = S/(\Omega_1 R_1^2)$ — безразмерный коэффициент, характеризующий поток жидкости сквозь цилиндры; S — размерный коэффициент, определяющий интенсивность поступления жидкости через поверхность одного цилиндра и вытекания ее через поверхность другого цилиндра; $R = R_2/R_1$; $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$.

Задача (1.1), (1.2) обладает группой симметрий G , т. е. инвариантна (сохраняет вид) относительно поворота L_φ^δ вокруг оси цилиндров на произвольный угол δ , сдвига L_z^h вдоль этой оси на произвольное расстояние h и преобразования инверсии J , действующих на поле скоростей по правилу

$$\begin{aligned} (L_\varphi^\delta \mathbf{V}')(t, r, \varphi, z) &= \mathbf{V}'(t, r, \varphi + \delta, z), \\ (L_z^h \mathbf{V}')(t, r, \varphi, z) &= \mathbf{V}'(t, r, \varphi, z + h), \\ (J \mathbf{V}')(t, r, \varphi, z) &= \{v'_r(t, r, \varphi, -z), v'_\varphi(t, r, \varphi, -z), -v'_z(t, r, \varphi, -z)\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Задача (1.1), (1.2) допускает точное решение [6, 7], представляющее собой основное стационарное вращательно-симметричное течение с ненулевыми радиальной и азимутальной компонентами вектора скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \{v_{0r}, v_{0\varphi}, 0\}, & \Pi_0 &= \int_1^r \left(\frac{v_{0\varphi}^2}{s} + \frac{\chi_0^2}{s^3} \right) ds + \text{const}, & v_{0r} &= \frac{\chi_0}{r}, \\ v_{0\varphi} &= \begin{cases} ar^{\chi+1} + b/r, & \chi \neq -2, \\ (a_1 \ln r + 1)/r, & \chi = -2, \end{cases} \\ a &= \frac{\Omega R^2 - 1}{R^{\chi+2} - 1}, & b &= 1 - a, & a_1 &= \frac{\Omega R^2 - 1}{\ln R}, & \chi_0 &= \frac{\chi}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\chi = S/\nu$ — радиальное число Рейнольдса. При $\chi > 0$ радиальный поток жидкости направлен от внутреннего цилиндра к внешнему, а при $\chi < 0$ — от внешнего к внутреннему.

В случае отсутствия радиального потока ($\chi = 0$) жидкость движется по концентрическим окружностям в плоскости, перпендикулярной оси цилиндров, а центры этих окружностей лежат на оси цилиндров (круговое течение Куэтта). Наличие даже небольшого радиального потока жидкости ($\chi \neq 0$) приводит к возникновению ненулевой радиальной компоненты вектора скорости, поэтому жидкость перемещается не только в азимутальном направлении, но и в радиальном. Соответствующие картины линий тока приведены в [8].

2. Постановка задачи. Наложим на основной режим (1.4) возмущения скорости \mathbf{V} и давления Π , т. е. будем искать решение задачи (1.1), (1.2) в виде

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}, \quad \Pi' = \Pi_0 + \Pi/\lambda. \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), (1.2), получаем нелинейную задачу для возмущений

$$\begin{aligned} D_1 v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda} \left(D_2 v_r + \chi \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\omega v_\varphi, \\ D_1 v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\lambda} \left(D_2 v_\varphi - \chi \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + g v_r, \\ D_1 v_z + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda} \left(D_2 v_z + \frac{v_z}{r^2} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ v_r = v_\varphi = v_z &= 0, \quad r = 1, R, \\ D_1 &= \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + (\mathbf{V}, \nabla), \quad D_2 = \Delta - \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \\ \omega &= \frac{v_{0\varphi}}{r}, \quad g = - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) v_{0\varphi}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Компоненты поля скорости и давление будем считать периодическими по φ и z с известными периодами $2\pi/m$ и $2\pi/\alpha$ соответственно (m, α — азимутальное и аксиальное волновые числа).

Таким образом, нелинейная задача для возмущений (2.2) зависит от шести безразмерных параметров: отношения радиусов цилиндров R , отношения угловых скоростей вращения цилиндров Ω , числа Рейнольдса λ , радиального числа Рейнольдса χ , азимутального и аксиального волновых чисел m, α .

Для любых $\mathbf{V} = \{v_r, v_\varphi, v_z\}$ и $\mathbf{U} = \{u_r, u_\varphi, u_z\}$ определим дифференциальные выражения

$$\begin{aligned} M\mathbf{V} &= \left\{ \Delta v_r - \frac{\chi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\chi - 1) \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \Delta v_\varphi - \frac{\chi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - (\chi + 1) \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \right. \\ &\quad \left. \Delta v_z - \frac{\chi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\}, \end{aligned}$$

$$N\mathbf{V} = \omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \varphi} + \{-2\omega v_\varphi, -g v_r, 0\},$$

$$L(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = \left\{ (\mathbf{V}, \nabla) u_r - \frac{v_\varphi u_\varphi}{r}, (\mathbf{V}, \nabla) u_\varphi + \frac{v_r u_\varphi}{r}, (\mathbf{V}, \nabla) u_z \right\}.$$

Тогда нелинейная задача для возмущений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \frac{1}{\lambda} M\mathbf{V} - N\mathbf{V} - \frac{1}{\lambda} \nabla \Pi - L(\mathbf{V}, \mathbf{V}), \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \quad v_r = v_\varphi = v_z = 0, \quad r = 1, R. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выполненные в [9, 10] вычисления показали, что с увеличением числа Рейнольдса течение (1.4) теряет устойчивость двумя способами. В результате монотонной вращательно-симметричной неустойчивости возникает вторичный стационарный режим (его расчет путем прямого численного интегрирования задачи (2.2) выполнен в [11]). Колебательная трехмерная неустойчивость порождает автоколебательный режим с бегущими в азимутальном направлении волнами. Нейтральные кривые, соответствующие этим двум типам потери устойчивости, при определенных значениях параметров задачи пересекаются. Вблизи таких точек наблюдается сильное взаимодействие монотонных и трехмерных возмущений, что приводит к возникновению большого количества разнообразных режимов движения жидкости. Для определения таких режимов в данной работе применяется методика изучения кратных бифуркаций [4, 5], использованная для поиска аналогичных режимов в задаче Куэтта — Тейлора для непроницаемых цилиндров.

Целью настоящей работы является выявление вторичных течений, в том числе квазипериодических, возникающих в малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых монотонной и колебательной потери устойчивости основного режима, а также исследование устойчивости и бифуркаций найденных течений с учетом наличия радиального потока.

3. Амплитудная система. Пусть точка (Ω_*, λ_*) на плоскости параметров (Ω, λ) является точкой пересечения нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости течения (1.4). Предположим, что значение λ близко к λ_* , а Ω — к Ω_* , тогда $\delta_1 = \lambda - \lambda_*$ и $\delta_2 = \Omega - \Omega_*$ — малые параметры одного порядка.

Следуя [4, 5], решение нелинейной задачи для возмущений (2.3) будем искать в виде линейной комбинации независимых собственных решений линеаризованной задачи устойчивости

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{|\delta_1|} (\Phi + \Phi^*), & \Pi &= \sqrt{|\delta_2|} (p + p^*), \\ \Phi &= \eta_0(\xi) \Phi_0(r, z) + e^{ic_*t} [\eta_1(\xi) \Phi_1(r, \varphi, z) + \eta_2(\xi) \Phi_2(r, \varphi, z)] + \dots, \\ p &= \eta_0(\xi) p_0(r, z) + e^{ic_*t} [\eta_1(\xi) p_1(r, \varphi, z) + \eta_2(\xi) p_2(r, \varphi, z)] + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь η_0, η_1, η_2 — неизвестные комплексные амплитуды (функции “медленного” времени $\xi = |\delta_1|t$); c_* — неизвестная циклическая частота (фазовая скорость азимутальных волн), найденная при $\lambda = \lambda_*, \Omega = \Omega_*$; Φ_0, p_0 — собственное решение линеаризованной задачи устойчивости для монотонных вращательно-симметричных возмущений; Φ_1, p_1 и Φ_2, p_2 — независимые собственные решения линеаризованной задачи устойчивости для колебательных трехмерных возмущений. При этом вектор Φ_2 получается инверсией (1.3) из Φ_1 , следовательно, $\Phi_2 = J\Phi_1$. Величины порядка δ_1, δ_2 и выше в (3.1) опущены.

Подставляя (3.1) в задачу (2.3), получаем систему с кубическими ведущими нелинейными членами [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\xi} &= (\sigma + A|\eta_0|^2 + B|\eta_1|^2 + B^*|\eta_2|^2)\eta_0 + D\eta_0^*\eta_1^*\eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + Q|\eta_1|^2 + R|\eta_2|^2)\eta_1 + S\eta_0^{*2}\eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + R|\eta_1|^2 + Q|\eta_2|^2)\eta_2 + S\eta_0^2\eta_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Система (3.2), называемая амплитудной системой, впервые была получена в работах [4, 5]. Неизвестными являются три комплексные амплитуды η_0, η_1, η_2 . Коэффициенты системы (3.2) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач. Коэффициенты

Значения коэффициентов

χ	α	Ω_*	λ_*	c_*	A	B_r	B_i	D	P_r	P_i	Q_r	Q_i
-0,25	2	-0,362	127,494	0,2533	-639,8	78,9	-26,6	-285,5	-646,8	137,9	88,4	-933,5
	3	-0,349	99,395	0,2679	-287,1	-368,1	583,9	-227,8	-290,8	-526,5	-140,9	-190,2
	4	-0,366	98,062	0,2819	-199,8	-270,5	211,0	-220,8	-368,4	-214,6	-123,3	-153,8
0,25	2	-0,407	119,530	0,2534	-500,3	72,2	-0,89	-230,2	-435,9	90,3	-28,6	-843,5
	3	-0,393	94,120	0,2706	-409,7	-403,1	448,5	-302,5	-438,9	-453,4	-151,6	-157,5
	4	-0,414	93,389	0,2861	-229,1	-275,9	173,3	-219,5	-383,7	-174,9	-132,0	-129,0

A, D — вещественные числа, B, P, Q, R, S — комплексные числа. Величины σ, μ — свободные параметры задачи [4, 8].

Знаки σ, μ_r (вещественная часть μ) определяют положение точки (Ω, λ) , в которой строятся разложения (3.1), относительно нейтральных кривых монотонной и колебательной потери устойчивости основного стационарного течения. При $\sigma > 0$ значения отношения угловых скоростей цилиндров Ω и числа Рейнольдса λ таковы, что точка (Ω, λ) расположена выше нейтральной кривой, соответствующей монотонной потере устойчивости, при $\sigma < 0$ — ниже. При $\mu_r > 0$ точка (Ω, λ) расположена выше нейтральной кривой, соответствующей колебательной потере устойчивости, при $\mu_r < 0$ — ниже.

4. Расчет коэффициентов амплитудной системы. Вычисления проводились при фиксированных значениях следующих четырех параметров: отношения радиусов цилиндров $R = 2$ (радиус внешнего цилиндра в два раза больше радиуса внутреннего цилиндра), радиального числа Рейнольдса $\chi = -0,25$ (радиальный поток жидкости направлен от внешнего цилиндра к внутреннему) и $\chi = 0,25$ (поток направлен в противоположную сторону), азимутального волнового числа $m = 1$ (2π -периодические возмущения в азимутальном направлении) и различных значениях аксиального волнового числа α . Рассчитанные значения коэффициентов амплитудной системы (3.2) представлены в табл. 1.

Алгоритм расчета коэффициентов амплитудной системы описан в работе [12] и аналогичен алгоритму, использованному при исследовании изотермического [4] и неизотермического [13, 14] течений Куэтта между цилиндрами.

Вычисления показали, что радиальное число Рейнольдса χ существенно влияет на значения коэффициентов амплитудной системы (3.2), поэтому учет наличия потока жидкости сквозь поверхности цилиндров приводит к увеличению количества сценариев возникновения вторичных течений по сравнению со случаем, когда цилиндры непроницаемы.

5. Моторная подсистема. Представим комплексные амплитуды η_0, η_1, η_2 в полярной форме: $\eta_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$, $\eta_1 = \rho_1 e^{i\psi_1}$, $\eta_2 = \rho_2 e^{i\psi_2}$. Тогда для модулей амплитуд ρ_0, ρ_1, ρ_2 и линейной комбинации амплитудных фаз $\beta = 2\psi_0 + \psi_1 - \psi_2$ получаем замкнутую систему, называемую моторной подсистемой амплитудной системы [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0}{d\xi} &= [\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)]\rho_0 + D\rho_0\rho_1\rho_2 \cos \beta, \\ \frac{d\rho_1}{d\xi} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r\rho_1^2 + R_r\rho_2^2)\rho_1 + (S_r \cos \beta + S_i \sin \beta)\rho_0^2\rho_2, \\ \frac{d\rho_2}{d\xi} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + R_r\rho_1^2 + Q_r\rho_2^2)\rho_2 + (S_r \cos \beta - S_i \sin \beta)\rho_0^2\rho_1, \\ \frac{d\beta}{d\xi} &= C(\rho_1^2 - \rho_2^2) - 2D\rho_1\rho_2 \sin \beta - [S_i(\rho_1^2 - \rho_2^2) \cos \beta + S_r(\rho_1^2 + \rho_2^2) \sin \beta] \frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_2}, \\ C &= 2B_i + Q_i - R_i. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Таблица 1

амплитудной системы

R_r	R_i	S_r	S_i	σ_1	σ_2	μ_{1r}	μ_{1i}	μ_{2r}	μ_{2i}
-27,9	-196,9	-57,3	-604,5	0,001 906	0,837 101	0,001 722	0,000 406	0,292 439	-0,024 37
-416,8	515,8	-593,3	713,5	0,003 606	0,965 742	0,003 339	0,000 504	0,471 876	-0,127 55
-197,8	95,6	-236,5	88,4	0,004 758	0,947 862	0,004 323	0,000 439	0,569 947	-0,152 43
-30,3	-163,1	5,71	-440,1	0,002 086	0,727 912	0,001 918	0,000 412	0,251 679	-0,025 87
-399,6	317,6	-518,6	426,1	0,003 910	0,839 069	0,003 655	0,000 513	0,411 518	-0,119 93
-206,9	70,5	-218,4	69,3	0,005 117	0,817 600	0,004 682	0,000 439	0,497 407	-0,140 76

Таким образом, амплитудная система (3.2) для трех комплексных неизвестных сводится к динамической системе (5.1) для четырех вещественных неизвестных. Фазовые переменные ψ_0, ψ_1, ψ_2 находятся из соответствующей системы путем интегрирования, причем одну из них можно выразить через две другие и β [4].

Система (5.1) инвариантна относительно преобразования $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2, \beta \rightarrow -\beta$ [4, 5], что является следствием инвариантности задачи (1.1) относительно инверсии J , определенной в (1.3). Отсюда, в частности, следует, что решения системы (5.1) либо J -симметричны (переводятся в себя преобразованием $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2, \beta \rightarrow -\beta$), либо образуют J -связанные пары (переводятся этим преобразованием друг в друга).

Вид амплитудной системы (3.2), имеющей два свободных параметра σ и μ_r , сохраняется при масштабной замене $\eta_0 \rightarrow l\eta_0, \eta_1 \rightarrow l\eta_1, \eta_2 \rightarrow l\eta_2, \sigma \rightarrow l^2\sigma, \mu \rightarrow l^2\mu, \xi \rightarrow \xi/l^2$ для любого вещественного числа $l \neq 0$. Это позволяет при исследовании моторной подсистемы (5.1) ограничиться рассмотрением лишь трех значений параметра σ : нулевого, любого положительного и любого отрицательного. Поэтому вычисления проводились для трех фиксированных значений свободного параметра $\sigma = -10, 0, 10$.

6. Расчет равновесий моторной подсистемы. После расчета коэффициентов амплитудной системы (3.2) можно аналитически определить все равновесные состояния (стационарные решения) моторной подсистемы (5.1). Исследование этих состояний позволяет обнаружить стационарные, периодические и двухчастотные квазипериодические режимы движения жидкости. Формулы для расчета равновесных состояний и их гидродинамическая трактовка приведены в [12]. Из этих формул нетрудно получить выражения для компонент скорости и давления.

У моторной подсистемы (5.1) существуют следующие равновесные состояния: основной режим MF , вторичное стационарное течение SF , пара спиральных волн SW , чисто азимутальные волны AW , смешанные азимутальные волны первого MW^+ и второго MW^- родов, а также четыре пары равновесных состояний QPF , которым соответствуют двухчастотные квазипериодические течения жидкости. Эти четыре пары равновесных состояний находятся в результате определения корней полинома четвертой степени.

На рис. 1 для $R = 2, \chi = 0,25, m = 1, \alpha = 2, \sigma = 10$ представлена схема переходов, обусловленных бифуркациями равновесных решений моторной подсистемы (5.1) при изменении свободного параметра μ_r . При $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ параметр μ_r имеет следующие бифуркационные значения: $\mu_r^n = 0; 6,865; 6,878; 7,381; 8,426; 8,584; 8,599; 8,827; 9,231$.

Основное стационарное течение MF существует и неустойчиво для всех значений μ_r . В точке $\mu_r = \mu_r^1$ от него ответвляются чисто азимутальные волны AW и пара спиральных волн SW . Оба эти режима существуют, если $\mu_r > \mu_r^1$, и неустойчивы. При $\mu_r = \mu_r^2$ от чисто азимутальных волн AW ответвляются неустойчивые смешанные азимутальные волны первого рода MW^+ , которые исчезают на вторичном стационарном течении SF ,

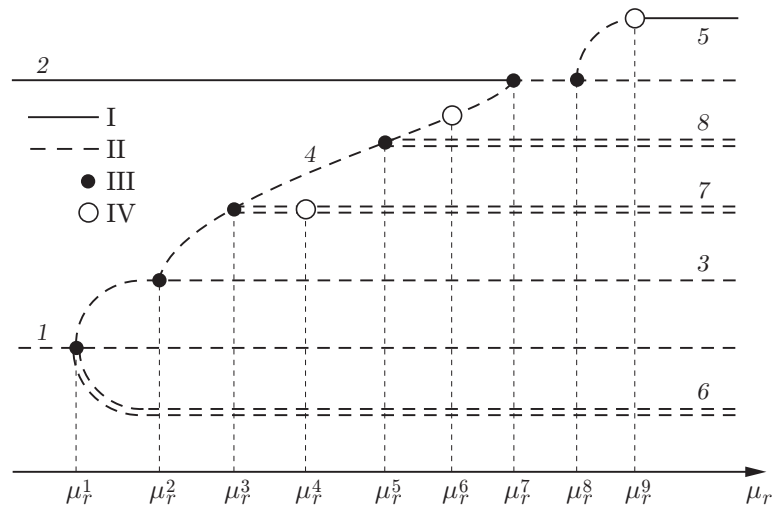


Рис. 1. Схема переходов при $\chi = 0,25$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$:

1–5 — J -симметричные режимы (1 — MF , 2 — SF , 3 — AW , 4 — MW^+ , 5 — MW^-), 6–8 — J -связанные пары режимов (6 — SW , 7 — QPF_1 , 8 — QPF_2); I — устойчивые режимы, II — неустойчивые режимы, III — точки бифуркаций равновесных решений моторной подсистемы, IV — точки, в которых от равновесных решений ответвляются циклы моторной подсистемы

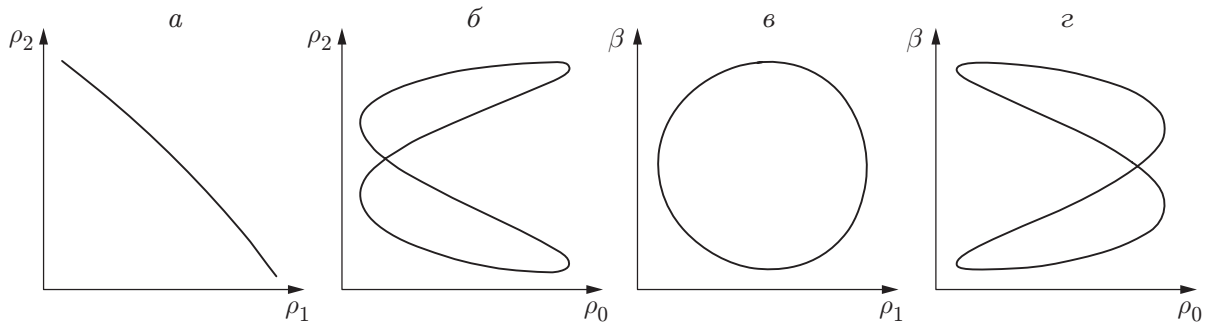


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий устойчивого J -симметричного предельного цикла A_0 на координатные плоскости:

a — (ρ_1, ρ_2) , b — (ρ_0, ρ_2) , $в$ — (ρ_1, β) , $г$ — (ρ_0, β)

когда параметр μ_r становится равным μ_r^7 . В точке $\mu_r = \mu_r^6$ от режима MW^+ ответвляется неустойчивый J -симметричный предельный цикл.

Вторичное стационарное течение SF существует для всех значений параметра μ_r . При $\mu_r < \mu_r^7$ оно устойчиво, при $\mu_r > \mu_r^7$ неустойчиво. В точке $\mu_r = \mu_r^8$ от режима SF ответвляются смешанные азимутальные волны второго рода MW^- , которые существуют в интервале $\mu_r^8 < \mu_r < \infty$. Эти волны неустойчивы в диапазоне $\mu_r^8 < \mu_r < \mu_r^9$ и устойчивы в диапазоне $\mu_r^9 < \mu_r < \infty$.

При $\mu_r = \mu_r^9$ смешанные азимутальные волны второго рода MW^- становятся устойчивыми в результате ответвления в докритическую по μ_r область J -симметричного предельного цикла, проекции фазовых траекторий которого показаны на рис. 2.

При $\mu_r = \mu_r^3$ от смешанных азимутальных волн первого рода MW^+ ответвляется первая неустойчивая J -связанная пара двухчастотных квазипериодических течений, соот-

Таблица 2

Значения модулей амплитуд и фазового инварианта, соответствующие состояниям равновесия QPF_1 , QPF_2

μ_r	QPF_1				QPF_2			
	ρ_0	ρ_1	ρ_2	β	ρ_0	ρ_1	ρ_2	β
7	0,0124	0,3493	0,3368	0,1087	—	—	—	—
9	0,0139	0,4140	0,3626	0,4044	0,0137	0,1563	0,0774	6,2768
10	0,0146	0,4400	0,3782	0,4674	0,1422	0,1971	0,0661	6,2748
20	0,0205	0,6386	0,5158	0,6908	0,1861	0,4121	0,0542	6,2731
100	0,0454	1,4474	1,1296	0,8359	0,3876	1,0969	0,0883	6,2728
500	0,1014	3,2439	2,5168	0,8630	0,8533	2,5236	0,1860	6,2728

ветствующая общему состоянию равновесия системы QPF_1 и существующая в интервале $\mu_r^3 < \mu_r < \infty$. В точке $\mu_r = \mu_r^4$ от нее ответвляется J -связанная пара неустойчивых предельных циклов.

В тот момент, когда параметр μ_r принимает значение μ_r^5 , от смешанных азимутальных волн первого рода MW^+ ответвляется вторая неустойчивая J -связанная пара двухчастотных квазипериодических течений, соответствующая общему состоянию равновесия системы QPF_2 и существующая в интервале $\mu_r^5 < \mu_r < \infty$.

Значения модулей амплитуд ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 и фазового инварианта β равновесий QPF_1 и QPF_2 приведены в табл. 2.

На рис. 1 в интервале $\mu_r^7 < \mu_r < \mu_r^9$ устойчивые состояния равновесия отсутствуют, поэтому следует ожидать возникновения достаточно сложных режимов движения жидкости непосредственно после потери устойчивости основного режима.

7. Расчет циклов моторной подсистемы. Помимо равновесий у моторной подсистемы (5.1) могут существовать предельные циклы, т. е. изолированные периодические решения, ответвляющиеся в результате колебательной потери устойчивости равновесий. В общем случае каждому циклу соответствует трехчастотный квазипериодический режим движения жидкости.

Для вычисления предельных циклов применялись методы определения неподвижной точки эволюционного оператора или отображения последования Пуанкаре [15]. Устойчивость циклов и их бифуркации исследовались путем расчета мультипликаторов Флоке (собственных значений матрицы монодромии) [15].

Результаты расчета J -симметричного предельного цикла A_0 в виде проекций фазовых траекторий на координатные плоскости при $R = 2$, $\chi = 0,25$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\Omega_* = -0,407$, $\sigma = 10$ представлены на рис. 2. Этот цикл образуется при $\mu_r = \mu_r^9 = 9,231$ в результате бифуркации Хопфа смешанных азимутальных волн второго рода MW^- (см. рис. 1).

Цикл A_0 существует при $\mu_r < \mu_r^9$ и устойчив в интервале $8,608 < \mu_r < \mu_r^9$. При $\mu_r = 9,215$ точка на фазовой траектории имеет координаты $\rho_0 = 0,144$, $\rho_1 = \rho_2 = 0,032$, $\beta = 3,142$; период цикла равен $T = 0,332$.

При переходе через точку $\mu_r = 8,608$ цикл A_0 теряет устойчивость, и от него ответвляется устойчивое двухчастотное квазипериодическое решение A_1 , фазовые траектории которого лежат на инвариантном двумерном торе. Это решение существует при $\mu_r < 8,608$. Проекция фазовых траекторий на начальной стадии формирования течения (на небольшом интервале времени) показаны на рис. 3. На рис. 4 приведено отображение Пуанкаре, соответствующее тору A_1 . При $\mu_r = 8,607$ точка на торе имеет координаты $\rho_0 = 0,141$, $\rho_1 = 0,011$, $\rho_2 = 0,017$, $\beta = -18,86$.

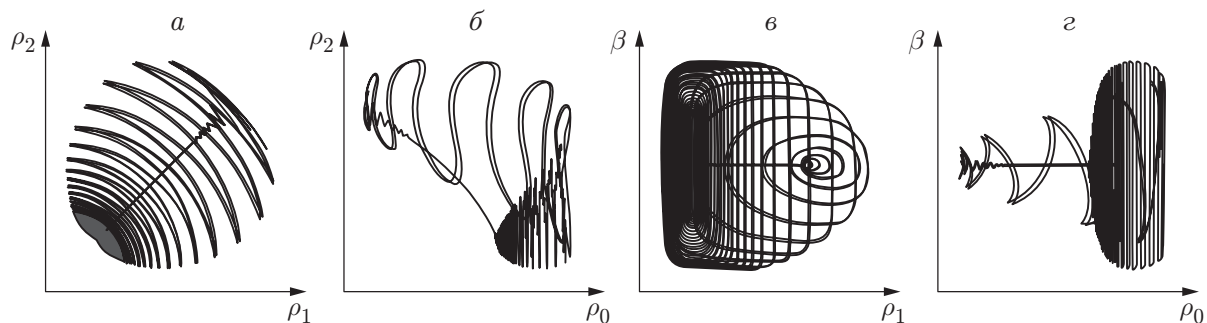


Рис. 3. Проекция фазовых траекторий, соответствующих начальной стадии формирования течения, на координатные плоскости:

$a - (\rho_1, \rho_2)$, $б - (\rho_0, \rho_2)$, $в - (\rho_1, \beta)$, $г - (\rho_0, \beta)$

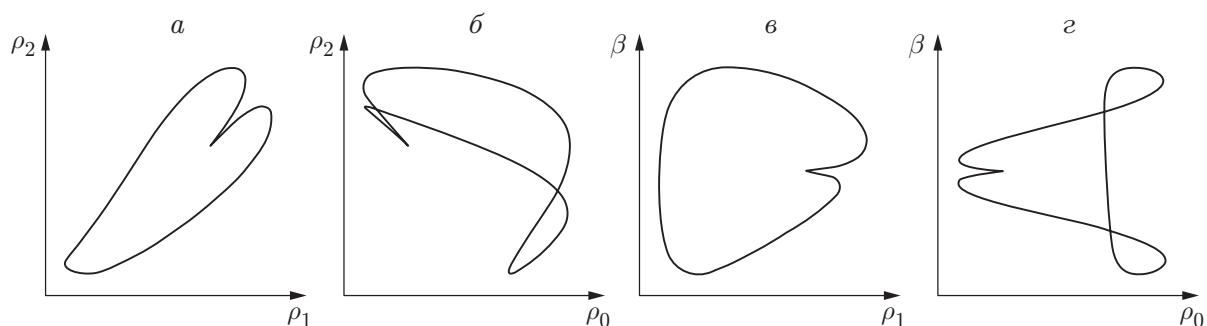


Рис. 4. Отображение Пуанкаре двумерного тора A_1 на координатные плоскости:

$a - (\rho_1, \rho_2)$, $б - (\rho_0, \rho_2)$, $в - (\rho_1, \beta)$, $г - (\rho_0, \beta)$

Закключение. Таким образом, анализ устойчивости основного режима движения жидкости между вращающимися пронизаемыми цилиндрами при наличии радиального потока в случае, когда его спектр устойчивости содержит нуль и пару чисто мнимых собственных значений, сводится к исследованию нелинейной системы трех комплексных амплитудных уравнений.

Обнаружено, что при определенных значениях параметров задачи образуются режимы, имеющие достаточно сложный характер. В частности, в результате потери устойчивости J -симметричного предельного цикла моторной подсистемы возникает устойчивое J -симметричное двухчастотное квазипериодическое решение моторной подсистемы, фазовые траектории которого лежат на инвариантном двумерном торе. Такому режиму соответствует четырехчастотный режим движения жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwille J. A., Mitra D., Lueptow R. M. Anti-fouling mechanism in rotating filtration // Proc. of the 12th Intern. Couette — Taylor workshop, Sept. 6–8, 2001. Evanston: Northwestern Univ., 2001. Session 2D.
2. Kroner K. H., Nissinen V. Dynamic filtration of microbial suspensions using an axially rotating filter // J. Membrane Sci. 1988. V. 36. P. 85–100.
3. Wronski S., Molga E., Rudniak L. Dynamic filtration in biotechnology // Bioprocess Engng. 1989. V. 4, N 5. P. 99–104.

4. **Колесов В. В., Юдович В. И.** Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 4. С. 81–93.
5. **Chossat P.** The Couette — Taylor problem / P. Chossat, G. Iooss. N. Y.: Springer, 1994.
6. **Шапакидзе Л. Д.** Устойчивость вязкого течения между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Сообщ. АН Груз.ССР. 1968. Т. 49, № 1. С. 19–24.
7. **Jain N. C., Bansal J. L.** On the flow of a viscous incompressible fluid between two coaxial rotating porous cylinders // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1973. V. 78, N 5. P. 187–201.
8. **Колесов В. В., Романов М. Н.** Возникновение хаоса в проблеме Куэтта — Тейлора для проницаемых цилиндров // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 1. С. 52–64.
9. **Kolesov V., Shapakidze L.** On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders // Trends in applications of mathematics to mechanics. Boca Raton: Chapman and Hall, 2000. V. 106. P. 221–227.
10. **Колесов В. В., Романов М. Н.** Расчет бикритических точек в задаче об устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2009. № 5. С. 28–30.
11. **Serre E., Sprague M. A., Lueptow R. M.** Stability of Taylor — Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow // Phys. Fluids. 2008. V. 20, N 3. P. 034106-1–034106-10.
12. **Колесов В. В., Романов М. Н.** Расчет стационарных, периодических и квазипериодических движений вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 53–62.
13. **Колесов В. В.** Неизотермическая проблема Куэтта — Тейлора / В. В. Колесов, А. Г. Хоперский. Ростов н/Д: Изд-во Юж. федер. ун-та, 2009.
14. **Kolesov V., Shapakidze L.** Instabilities and transition in flows between two porous concentric cylinders with radial flow and a radial temperature gradient // Phys. Fluids. 2011. V. 23, N 1. P. 014107-1–014107-13.
15. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 30/IV 2013 г.
