Для прогнозирования областей возможных разрушений рассчитывались поля плотности работы напряжений на пластических деформациях

$$A_p = \int_t \operatorname{tr}\left(\sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p\right) dt = \int_t H(f) \operatorname{tr}(\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{V})\, dt$$

и максимальных главных напряжений

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \max\left\{\sigma_{\theta\theta},\quad 0{,}5\left[\sigma_{RR} + \sigma_{ZZ} + \sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{ZZ})^2 + 4\sigma_{RZ}^2}\right]\right\}.$$

На фиг. 6 представлены изолинии A_p и σ_{I} (штриховые и сплошные линии соответственно), откуда видно, что область разрушений сдвига, при котором в качестве критерия выступает пластическая работа A_p, наиболее вероятна у острия и краев конуса. Разрушение же, обусловленное действием растягивающих напряжений, может локализоваться у тыльной поверхности преграды после взаимодействия с этой поверхностью ударной волны сжатия.

В заключение отметим, что сравнение результатов расчетов для двух типов граничных условий на контактной поверхности цилиндрический ударник — преграда (условия полного слипания и скольжения без трения) показало разницу по величине глубины внедрения не более 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Меньшиков Г. П., Одинцов В. А., Чудов Л. А.** Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
2. **Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г.** Численный метод расчета напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
3. **Фомин В. М., Яненко Н. Н.** Численное моделирование задач высокоскоростного взаимодействия тел.— В кн.: Материалы симпоз. Нелинейные волны деформации. Т. 2. Таллин, 1978.
4. **Kondaurov V. I., Kukudjanov V. N.** On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic-plastic media.— Arch. Mech., 1979, vol. 31, N 5.
5. **Фомин В. М., Гулидов А. И.** Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды.— ПМТФ, 1980, № 3.
6. **Магомедов К. М., Холодов А. С.** О построении расчетных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений.— ЖВММФ, 1969, № 2.
7. **Холодов А. С.** О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа.— ЖВММФ, 1978, т. 18, № 6.
8. **Кондауров В. И., Рой И. В.** Исследование и применение одной разностной консервативной схемы для уравнений динамики деформируемой среды.— ЧММСС, 1980, т. 2, № 2.
9. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
10. **Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И.** Численное решение неодномерных задач динамики твердого тела.— В кн.: Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975.
11. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
12. **Витман Ф. Ф., Степанов В. А.** Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 10^2—10^3 м/с.— В кн.: Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1959.

Поступила 8/VI 1983 г.

УДК 539.4; 539.376

МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. Д. ДАЧЕВА, А. М. ЛОКОЩЕНКО, С. А. ШЕСТЕРИКОВ

(*Москва*)

В рамках концепции уравнения состояния по Ю. Н. Работнову [1] рассмотрим описание процессов деформирования в условиях, когда определяющим является накопление поврежденности ω.

Воспользуемся вариантом уравнения состояния, предложенным в [2]:

$$d\varepsilon/dt = G'(s)ds/dt + F(s); \tag{1}$$

$$d\omega/dt = g'(s)ds/dt + f(s). \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) определяют изменение полной деформации ε и поврежденности ω во времени t вплоть до момента разрушения $t = t^*$. Штрих означает дифференцирование по эффективному напряжению s. Входящие в (1), (2) функции $G'(s)$, $F(s)$, $g'(s)$ и $f(s)$ монотонно возрастают с увеличением s.

Пусть к образцу приложена постоянная растягивающая сила, вызывающая в нем напряжение σ_0 и малую деформацию ε. Входящее в (1), (2) эффективное напряжение является функцией параметра ω. Рассмотрим два варианта этой функции. В первом варианте примем зависимость

$$s = \sigma_0 \exp \omega, \tag{3}$$

совпадающую при малой деформации с зависимостью, предложенной в [3]. Во втором варианте используем функцию

$$s = \sigma_0/(1 - \omega), \tag{4}$$

введенную в [1].

Рассмотрим сначала первый вариант этой зависимости $s(\omega)$. Из (2), (3) найдем значение эффективного напряжения s_0 в момент нагружения ($t = +0$):

$$s_0 = \sigma_0 \exp g(s_0). \tag{5}$$

В [3] показано, что с помощью условия $ds/dt \to +\infty$ можно получить уравнение для предельного значения эффективного напряжения $s^* = s(t^*)$:

$$[sg'(s)]|_{s^*} = 1. \tag{6}$$

Из (6) следует, что предельное значение s^* зависит только от вида материальной функции $g(s)$ и при различных значениях σ_0 остается неизменным. Время разрушения $t = t^*$ и соответствующие ему предельные значения деформации $\varepsilon(t^*) = \varepsilon^*$ и поврежденности $\omega(t^*) = \omega^*$ определяются из (1)—(3) следующим образом:

$$t^* = \int_{s_0}^{s^*} K ds, \quad \varepsilon^* = G(s^*) + \int_{s_0}^{s^*} KF ds, \quad \omega^* = g(s^*) + \int_{s_0}^{s^*} Kf ds, \quad K = \frac{1 - sg}{sf}. \tag{7}$$

Рассмотрим зависимости предельных значений деформации ε^* и поврежденности ω^* от напряжения σ_0. В соотношениях (7) от σ_0 зависят только нижние пределы интегралов, причем $s_0(\sigma_0)$, согласно (5), (6),— возрастающая функция. Все остальные входящие в (7) величины определяются свойствами материала и от напряжения σ_0 не зависят. Поэтому увеличение напряжения σ_0 приводит к уменьшению предельных значений t^*, ε^* и ω^*. Таким образом, модель (1), (2) с использованием связи номинального σ_0 и эффективного s напряжений в виде (3) при любом виде используемых четырех материальных функций позволяет описать результаты испытаний, в которых наблюдается монотонно убывающая зависимость предельных значений деформации ε^* и поврежденности ω^* от номинального напряжения σ_0.

Перейдем ко второму варианту зависимости $s(\omega)$. Рассмотрим систему уравнений (1), (2), (4). Покажем, что введение функции $s(\omega)$ в виде (4) позволяет при некоторых условиях получить качественно новый, немонотонный характер зависимости $\varepsilon^*(\sigma_0)$ при сохранении той же убывающей зависимости $\omega^*(\sigma_0)$. Рассмотрим изменение эффективного напряжения s во времени t. В начальный момент времени из (2), (4) получаем начальное значение s_0:

$$s_0 = \sigma_0/(1 - g(s_0)). \tag{8}$$

Дифференцируя (4) по времени и используя (2), получаем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sigma_0}{(1-\omega)^2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{fs^2}{\sigma_0 - s^2 g'}. \tag{9}$$

Предельное значение s^* определяется из условия $ds/dt \to +\infty$:

$$(s^2 g')|_{s^*} = \sigma_0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что значение s^* возрастает с увеличением σ_0. Исключив ds/dt из (2), (9), получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{f(1-\omega)^2}{(1-\omega)^2 - \sigma_0 g'}, \quad \omega^* = 1 - \sqrt{\sigma_0 g'(s^*)}. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что значение ω^* всегда меньше 1, причем зависимость $\omega^*(\sigma_0)$ имеет монотонно убывающий характер. Для получения ε^* исключим ds/dt из (1), (9):

$$\varepsilon^* = G(s^*) + \int_{s_0}^{s^*} \frac{(\sigma_0 - s^2 g')F}{fs^2} ds. \tag{12}$$

В общем случае оценить зависимость ε^* от σ_0 невозможно. Допустим, что все входящие в (1), (2) функции материала являются степенными:

$$G' = As^{m_1}, \quad F = Bs^{m_2}, \quad g' = as^{n_1}, \quad f = bs^{n_2}. \tag{13}$$

Естественно считать, что $m_1 > 0$, $n_1 > 0$, $m_2 > 1$, $n_2 > 1$. Для удобства будем пользоваться безразмерными переменными. Отнесем напряжения σ_0 и s и время t к таким величинам, чтобы уравнение (1) с учетом (13) имело в обоих слагаемых коэффициенты, равные единице. Ниже всюду под σ_0 и s будем понимать соответствующие безразмерные напряжения, равные истинным значениям, отнесенным к

$$R = A^{-\frac{1}{m_1+1}}.$$

Введем также безразмерное время $\tau = BR^{m_2}t$. В этих переменных уравнения (1), (2) с учетом (13) принимают вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = s^{m_1}\frac{ds}{d\tau} + s^{m_2}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = Cs^{n_1}\frac{ds}{dt} + Ds^{n_2}, \tag{14}$$

где $C = aR^{n_1+1}$, $D = \frac{b}{B}R^{n_2-m_2}$.

Начальное s_0 и предельное s^* значения связаны с σ_0 согласно (8), (10) следующим образом:

$$\sigma_0 = s_0 - \frac{C}{n_1+1}s_0^{n_1+2}, \quad s^* = \left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{1}{n_1+2}}. \tag{15}$$

Так как мгновенная деформация, согласно (14), определяется соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{s_0^{m_1+1}}{m_1+1}, \tag{16}$$

то кривая мгновенного деформирования $\sigma_0 - \varepsilon_0$, согласно (15), (16), имеет немонотонный характер. Максимальное напряжение σ_{01}, которое образец при нагружении может выдержать, определяется из условия $d\sigma_0/d\varepsilon_0 = 0$, при этом

$$s_{01} = \left[\frac{n_1+1}{(n_1+2)C}\right]^{\frac{1}{n_1+1}}, \quad \sigma_{01} = Cs_{01}^{n_1+2}, \quad \varepsilon_{01} = \frac{s_{01}^{m_1+1}}{m_1+1}.$$

Выражение для предельной деформации ε^* определяется с помощью (12), (13) и зависит от значений двух комбинаций показателей степеней, входящих в (13):

$$L_1 = (m_2 - n_2 - 1) \text{ и } L_2 = (m_2 - n_2 + n_1 + 1).$$

Величины L_1 и L_2 одновременно равными нулю быть не могут.

При $L_1 \neq 0$ и $L_2 \neq 0$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{m_1+1}\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{m_1+1}{n_1+2}} + \frac{(n_1+2)C}{DL_1L_2}\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{L_2}{n_1+2}} - \frac{\sigma_0 s_0^{L_1}}{DL_1} + \frac{Cs_0^{L_2}}{DL_2}. \tag{17}$$

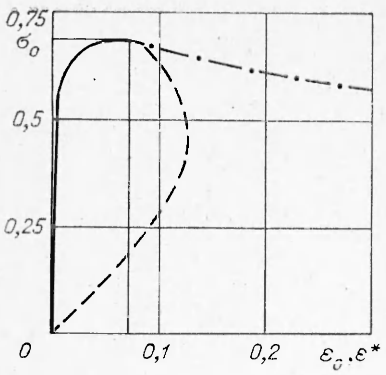
При $L_1 = 0$ получаем

$$\varepsilon^* = \frac{1}{m_1+1}\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{m_1+1}{n_1+2}} + \frac{\sigma_0}{D}\ln\left[\frac{1}{s_0}\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{1}{n_1+2}}\right] - \frac{C}{DL_2}\left[\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{L_2}{n_1+2}} - s_0^{L_2}\right].$$

При $L_2 = 0$ имеем

$$\varepsilon^* = \frac{1}{m_1+1}\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{m_1+1}{n_1+2}} + \frac{\sigma_0}{DL_1}\left[\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{L_1}{n_1+2}} - s_0^{L_1}\right] - \frac{C}{D}\ln\left[\frac{1}{s_0}\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{\frac{1}{n_1+2}}\right].$$

На фигуре в качестве примера приведены зависимости $\varepsilon_0(\sigma_0)$ и $\varepsilon^*(\sigma_0)$ при $C = D = 1$, $n_1 = 2$, $m_1 = 6$. Рассмотрим две комбинации значений остальных показателей степеней, характеризуемые параметром k. В случае $k = 1$ показатели m_2 и n_2 принимают значения $m_2 = 9$ и $n_2 = 7$, в случае $k = 2$ — значения $m_2 = 7$, $n_2 = 9$. Кривая $\varepsilon_0(\sigma_0)$, общая для обоих случаев, нанесена сплошной линией, кривые $\varepsilon^*(\sigma_0)$ для $k = 1$ и 2 нанесены соответственно штриховой и штрихпунктирной линиями. Из (17)



и фигуры очевидно, что зависимость $\varepsilon^*(\sigma_0)$ при $k = 1$ имеет немонотонный, а при $k = 2$ — монотонно убывающий характер.

Отметим, что немонотонность функции $\varepsilon^*(\sigma_0)$ вытекает из соотношения показателей степеней при слагаемых, определяющих длительные характеристики материала. Немонотонность проявляется в том случае, когда скорость ползучести имеет более высокую степень зависимости от напряжения по сравнению с зависимостью накопления длительной поврежденности. В этом случае играет роль учет нелинейных мгновенных характеристик аналогично тому, как ранее отмечалась немонотонность при использовании различных функциональных зависимостей для скорости ползучести и скорости накопления поврежденности [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Broberg H.** A new criterion for brittle creep rupture.— Trans. ASME, 1974, vol. E41, N 3.
3. **Boström P. O., Broberg H., Bräthe L., Chrzanowski M.** On failure conditions in viscoelastic media and structures.— In: Int. Symposium on mechanics of viscoelastic media and bodies. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
4. **Локощенко А. М., Шестериков С. А.** Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения.— ПМТФ, 1982, № 1.

Поступила 24/XII 1982 г.

УДК 539.376

ОБ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ОГНЕУПОРНЫХ КОМПОЗИТОВ

В. В. ДУДУКАЛЕНКО, С. П. ШАПОВАЛОВ

(Сумы)

Огнеупоры на основе корунда с высокой концентрацией включений ZrO_2 в интервале температур 1000—1800°С проявляют аномальные изменения скорости ползучести.

Кручение цилиндрических образцов в условиях установившейся ползучести исследовалось [1] при различных температурах. Характерная зависимость (фиг. 1) скорости ползучести от нагрузки показывает, что аномальное изменение вязкости происходит в области температур фазового превращения ZrO_2 [1].

1. С целью аппроксимации зависимости, показанной на фиг. 1, воспользуемся видоизменением модели Бингама. Диссипативные функции D выберем различными для малых и больших скоростей деформаций ε_{ij} и соответствующих напряжений σ_{ij} [2]:

$$D = k\sqrt{\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}} + (^1/_2)\nu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\quad s_{ij} = \sigma_{ij} - (^1/_3)\sigma_{ll}\,\delta_{ij} = \partial D/\partial\varepsilon_{ij},$$

здесь k — предел пластичности; ν — коэффициент вязкости; индексом a будем отмечать те же величины k_a, ν_a для больших скоростей деформаций.

Инварианты $\gamma = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$, $\tau = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ одновременно служат обозначениями сдвиговых компонентов в задаче о кручении. В полярной системе координат (ρ, φ) максимальные напряжения достигаются на поверхности стержня $\rho = R$, а переход от зависимости $\tau = k + \nu\gamma$ к $\tau = k_a + \nu_a\gamma$ может иметь место при $\rho = R_1$. Зона интенсивной ползучести $R_1 \leqslant R$ с ростом напряжений распространяется к центру стержня. Можно показать, что кусочно-линейная зависимость $\tau(\gamma)$ переходит в гладкое сопряжение для зависимости крутящего момента M от скорости кручения θ. Так как $\gamma = \theta\rho$, получим

$$M = 2\pi\left[\int_0^{R_1}\tau\rho^2 d\rho + \int_{R_1}^{R}\tau\rho^2 d\rho\right],\quad M = 2\pi\left[k\frac{R^3}{3} + \nu\theta\frac{R^4}{4}\right]\ \text{при}\ R_1 > R; \tag{1.1}$$

$$M = 2\pi\left[k_a\frac{R^3}{3} + \nu_a\theta\frac{R^4}{4} + \frac{(k_a - k)^4}{12\theta^3(\nu_a - \nu)^2}\right],\quad R_1 = \frac{1}{\theta}\frac{k_a - k}{\nu - \nu_a} \leqslant R. \tag{1.2}$$