УДК 621.9.047; 532.528

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ КРИВОЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ

Н. М. Миназетдинов

Камская государственная инженерно-экономическая академия,
423810 Набережные Челны
E-mail: nminazetdinov@yandex.ru

Решена нелинейная плоская задача определения формы металлической поверхности (анода) при ее электрохимической обработке криволинейным катодом симметричной формы. Получено условие, позволяющее определить положение точки перехода из зоны анодного растворения металла в область, в которой обработка прекращается.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, идеальный процесс, гидродинамическая аналогия.

Введение. Совершенствование существующих и создание новых методов расчета электрохимического формообразования являются важными задачами теории электрохимической обработки металлов. Обзор таких задач и методов их решения в рамках модели идеального процесса представлен в работах [1, 2].

В данной работе в рамках модели идеального процесса с использованием методов, созданных для решения задач о струйном обтекании криволинейных препятствий [3–5], задач теории фильтрации и взрыва [6, 7], находится численно-аналитическое решение двумерной задачи определения формы стационарной анодной границы при обработке металлической поверхности криволинейным катодом.

Модель процесса. При численно-аналитическом решении задачи используется модель процесса, описанная в [8]. Вводятся система декартовых координат (x_1, y_1), связанная с катодом, который движется в направлении оси ординат, и комплексный потенциал электростатического поля $f(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$, $z_1 = x_1 + iy_1$ ($u(x_1, y_1)$ — потенциал поля; $v(x_1, y_1)$ — функция тока). Значения потенциалов u_a, u_c на поверхностях анода и катода постоянны.

Для электролитов, являющихся растворами нитрата и хлората натрия, зависимость доли заряда η, затраченной на растворение металла, от анодной плотности тока i_a можно представить в виде [8]

$$\eta(i_a) = \begin{cases} 0, & i_a \leqslant i_{cr}, \\ a_0 + a_1/i_a, & i_a > i_{cr}, \end{cases}$$

где a_0, a_1, i_{cr} — постоянные.

На стационарной анодной границе выполняется условие [8]

$$\varkappa \frac{\partial u}{\partial n_a} = \frac{-a_1 + \rho V_c \varepsilon^{-1} \cos\theta}{a_0},$$

где $\varkappa$ — удельная электропроводность среды; ε — электрохимический эквивалент металла; ρ — плотность материала анода; θ — угол между вектором $\boldsymbol{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\boldsymbol{n}_a$ внешней нормали в данной точке анодной границы.

Введя характерную плотность тока i_0, характерную длину H и безразмерные переменные

$$i_0 = \frac{\rho V_c}{\varepsilon}, \quad H = \varkappa\frac{u_a - u_c}{i_0}, \quad x = \frac{x_1}{H}, \quad y = \frac{y_1}{H}, \quad n = \frac{n_a}{H},$$

представим комплексный потенциал в безразмерном виде

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy, \qquad W(z) = \frac{f(z) - iu_c}{u_a - u_c}.$$

Функция ψ в межэлектродном промежутке удовлетворяет уравнению Лапласа с граничными условиями на электродах

$$\psi_a = 1, \qquad \psi_c = 0; \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_a = a + b\cos\theta, \qquad a = -\frac{a_1}{a_0 i_0}, \qquad b = \frac{1}{a_0}. \tag{2}$$

В гидродинамической интерпретации модели электрического поля условие (2) определяет годограф скорости V фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости на анодной границе:

$$V = a + b\cos\theta \tag{3}$$

(θ — аргумент вектора скорости).

Постановка задачи и ее численно-аналитическое решение. Сечение межэлектродного промежутка представлено на рис. 1. В силу симметрии межэлектродного промежутка ограничимся рассмотрением его левой части. Линия CD представляет собой границу катода, линии симметрии BC и DF — линии тока, ортогональные к эквипотенциальным линиям электрического поля. Вектор $\boldsymbol{V}_c$ указывает направление движения катода. Углы, образованные касательной к дуге CD в точках C и D и осью абсцисс, равны нулю и π соответственно. Искомую анодную границу разделим на две области. В области AB происходит растворение металла согласно условию (2). В области, моделируемой вертикальным прямолинейным участком AF, растворения металла не происходит. На этом участке плотность тока изменяется от i_{cr} в точке A до нуля в бесконечно удаленной точке F.

Гидродинамическим аналогом рассматриваемой задачи является задача теории плоских установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости по определению границы AB с заданным законом изменения скорости (3).

Для решения задачи введем вспомогательную комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области D_t ($0 \leqslant \xi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \delta \leqslant h$), где $h = \pi|\tau|/4$, $\tau = i|\tau|$ (рис. 2), и

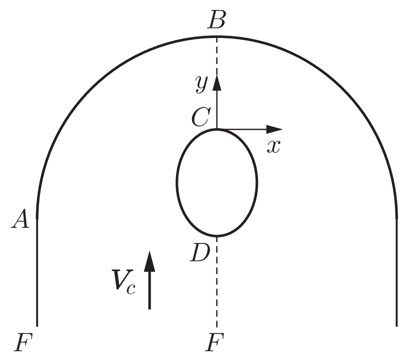

Рис. 1. Сечение межэлектродного промежутка

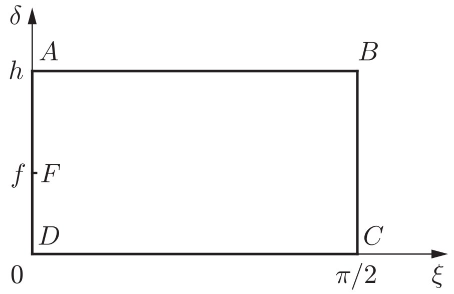

Рис. 2. Плоскость параметрической переменной t

найдем функцию $z(t)$, конформно отображающую прямоугольник D_t на область течения. При этом необходимо соответствие точек, указанных на рис. 1, 2.

Согласно условиям (1) комплексный потенциал $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t = \xi, \quad \xi \in [0, \pi/2], \\ 1, & t = i\delta, \ \delta \in [f, h], \quad t = \xi + ih, \ \xi \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

На линиях симметрии DF и BC функция $\varphi(t)$ принимает постоянное значение. Не нарушая общности, будем считать, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t = i\delta, \quad \delta \in [0, f], \\ \varphi_0, & t = \pi/2 + i\delta, \quad \delta \in [0, h]. \end{cases}$$

Используя метод конформных отображений, найдем производную комплексного потенциала и параметр φ_0:

$$\frac{dW}{dt} = N_1 F_1(t), \qquad N_1 = \Big(\int\limits_0^f F_1(ix)\,dx\Big)^{-1}, \qquad \varphi_0 = N_1 \int\limits_0^{\pi/2} F_1(x)\,dx,$$

$$F_1(t) = \Big(\frac{\vartheta_3(2t)\vartheta_3(0) - \vartheta_2(2t)\vartheta_2(0)}{\vartheta_2(2fi)\vartheta_3(2t) - \vartheta_3(2fi)\vartheta_2(2t)}\Big)^{1/2},$$

где $\vartheta_i(u)$ $(i = \overline{1,4})$ — тета-функции с периодами π, $\pi\tau$ [9].

Рассмотрим функцию Жуковского $\chi(t) = \ln(dW/(V_0 dz)) = r - i\theta$, $r = \ln(V/V_0)$, $V_0 = a + b$. На прямолинейных участках границы ее мнимая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию. Пусть на дуге CD задана непрерывная функция $\theta(s)$, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки D (см. рис. 1). Вводя кривизну $K(\theta)$ дуги CD, получим граничное условие

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{K(\theta)}{V_0}\Big|\frac{dW}{d\xi}\Big| \exp(-r(\xi)), \qquad \xi \in [0, \pi/2].$$

Из условия (3) следует

$$a + b\cos\theta(t) - V_0 \exp(r(t)) = 0, \qquad t = \xi + ih, \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad r(\pi/2 + ih) = 0.$$

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы $\chi(t) = \chi_*(t) + \Omega_1(t) + \Omega_2(t)$, где $\Omega_k(t) = \nu_k(t) + i\varepsilon_k(t)$ $(k = 1, 2)$ — аналитические в области изменения переменной t функции. Функция $\chi_*(t) = r_*(t) - i\theta_*(t)$, $r_* = \ln(V_*/V_0)$ соответствует течению в случае, когда дуга DC заменена отрезком прямой $\theta_*(\xi) = \theta(0)$, $\xi \in [0, \pi/2]$, а на границе AB выполняется равенство $\operatorname{Re}\chi_*(\xi + ih) = 0$, $\xi \in [0, \pi/2]$. В области изменения переменной t функции $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$ имеют одни и те же особенности.

Используя метод особых точек Чаплыгина [4], получаем

$$\chi_*(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(t - if)\vartheta_1(t + if)}{\vartheta_4(t - if)\vartheta_4(t + if)} - \pi i.$$

Потребуем выполнения следующих граничных условий для неизвестных функций $\Omega_k(t)$ $(k = 1, 2)$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = 0, && t = i\delta, \quad \delta \in [0, h],\\
&\varepsilon_2(t) = 0, && t = \xi, \quad \xi \in [0, \pi/2],\\
&\varepsilon_1(t) = \pi, \quad \varepsilon_2(t) = 0, && t = \pi/2 + i\delta, \quad \delta \in [0, h],\\
&\nu_1(t) = 0, && t = \xi + ih, \quad \xi \in [0, \pi/2].
\end{aligned} \tag{4}$$

Из результатов сравнения граничных условий для функций $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$ следует, что эти функции должны удовлетворять условиям

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\xi} = \frac{K(\theta(\xi))}{V_0}\, \rho(\xi) \exp\left[-(\nu_1(\xi) + \nu_2(\xi))\right], \qquad \xi \in [0, \pi/2],$$

$$\rho(\xi) = \left|\frac{dW}{d\xi}\right| \exp\left(-r_*(\xi)\right) = N_1 F_2(\xi), \qquad F_2(\xi) = F_1(\xi)\sqrt{\frac{\vartheta_4(\xi - if)\vartheta_4(\xi + if)}{\vartheta_1(\xi - if)\vartheta_1(\xi + if)}}\ ; \tag{5}$$

$$a + b\cos(\theta(t)) - V_0 \exp\left(\nu_2(t)\right) = 0, \qquad \nu_2(\pi/2 + ih) = 0, \tag{6}$$

где $\theta(t) = \theta_*(t) - \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$; $t = \xi + ih$; $\xi \in [0, \pi/2]$. Интегрируя выражение (5) по переменной ξ на отрезке $[0, \pi/2]$, получим

$$\frac{1}{V_0} \int\limits_0^{\pi/2} K(\theta(\xi))\rho(\xi) \exp\left[-(\nu_1(\xi) + \nu_2(\xi))\right] d\xi = \pi. \tag{7}$$

Дифференцируя выражение (6) по переменной ξ, находим

$$\theta'(\xi + ih) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \tag{8}$$

Это условие совпадает с известным в гидродинамике условием гладкого отрыва Бриллюэна — Вилла [5, 6].

В силу условий (4) функции $\Omega_k(t)$ $(k = 1, 2)$ можно разложить в ряды с вещественными коэффициентами

$$\begin{gathered}
\Omega_1(t) = 2(h + it) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sh}\left(2(h + it)n\right),\\
\Omega_2(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(2tn\right), \qquad b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \operatorname{ch}\left(2hn\right).
\end{gathered} \tag{9}$$

Коэффициенты разложений (9) и параметры $|\tau|$, f определяются из уравнений (5)–(8). Все необходимые геометрические характеристики течения можно найти с помощью параметрической зависимости

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\exp\left(-\chi(t)\right)}{V_0} \frac{dW}{dt}. \tag{10}$$

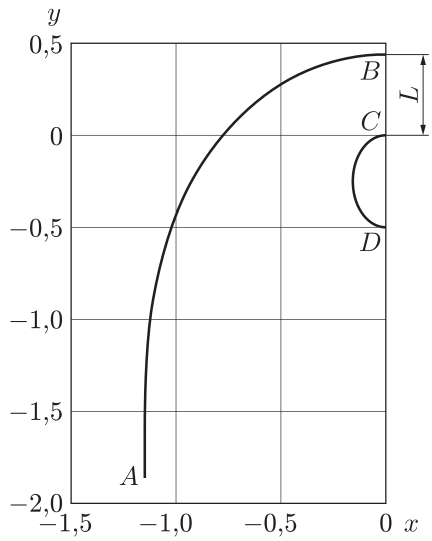

Рис. 3. Расчетные граница катода и анодная граница

В качестве примера рассмотрим случай, когда граница катода представляет собой эллипс, фокусы которого расположены на оси ординат. Кривизна эллипса определяется по формуле

$$K(\theta) = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2}/p, \qquad p = a_2^2/b_2, \qquad \varepsilon = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}/b_2,$$

где a_2, b_2 — полуоси эллипса.

Для решения задачи задаются значения полуосей эллипса a_2, b_2, коэффициенты a_0, a_1, характеризующие свойства электролита, и характерная плотность тока i_0. Задача решается численно методом коллокаций. Система уравнений для вычисления коэффициентов разложений (9) решается методом Ньютона совместно с уравнениями (7), (8), из которых определяются параметры $|\tau|$ и f. Затем с помощью параметрической зависимости (10) определяется геометрия анодной границы.

Расчеты выполнены при следующих значениях задаваемых параметров: $a_2 = 0{,}15$, $b_2 = 0{,}25$, $a_0 = 0{,}906$, $a_1 = -12{,}818$, $i_0 = 50$ А/см^2. Результаты расчета положения границы катода и анодной границы представлены на рис. 3. Размер зазора в сечении BC равен $L = 0{,}434$, координаты точки A: $x = -1{,}144$, $y = -1{,}860$.

Заключение. Получено условие (8), которое в соответствии с гидродинамической аналогией можно назвать условием гладкого отрыва. Использование этого условия позволило определить единственно возможную форму анодной границы, удовлетворяющую граничному условию (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Давыдов А. Д.** Высокоскоростное электрохимическое формообразование / А. Д. Давыдов, Е. Козак. М.: Наука, 1990.
2. **Каримов А. Х.** Методы расчета электрохимического формообразования / А. Х. Каримов, В. В. Клоков, Е. И. Филатов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.
3. **Биркгоф Г.** Струи, следы и каверны / Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло. М.: Мир, 1964.
4. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
5. **Котляр Л. М.** Об одном случае струйного течения тяжелой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 3. С. 140–143.

6. **Котляр Л. М., Скворцов Э. В.** О фильтрации вязкопластической жидкости к стоку в криволинейном пласте // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209, № 5. С. 1049–1052.
7. **Котляр Л. М.** О взрыве на поверхности грунта линейно-распределенного заряда криволинейной формы // ПМТФ. 1975. № 1. С. 187–191.
8. **Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М.** Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 179–184.
9. **Уитекер Э. Т.** Курс современного анализа. Т. 2. Трансцендентные функции / Э. Т. Уитекер, Дж. Н. Ватсон. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 12/I 2009 г.,
в окончательном варианте — 27/V 2009 г.