

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ  
О ВЗРЫВЕ НА ВЫБРОС В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ  
В ИМПУЛЬСНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

УДК 534.222+622.235

Л. В. Городилов

Институт горного дела СО РАН,  
630091 Новосибирск

В рамках импульсно-гидродинамической модели (ее твердожидкостной разновидности) рассматривается задача о нахождении воронки выброса при взрыве заряда ВВ в двухслойной среде для случаев плоской и осевой симметрии. Плотности и критические скорости в слоях, определяющие форму воронки выброса, могут отличаться друг от друга. Поиск границы воронки ведется численно методом последовательных приближений с применением на каждом этапе вычислений метода граничных элементов. Ранее этот метод был использован при расчете профилей воронок в однородных средах [1-3]. Для двухслойной среды в твердожидкостной постановке задача об определении профиля воронки выброса при взрыве шнурowego заряда исследовалась для случая плоской симметрии с применением метода конформных преобразований [4-6], при этом плотности слоев считались одинаковыми.

В данной работе приводятся профили воронок, образованных в результате действия сферических и бесконечных цилиндрических источников, моделирующих заряд ВВ, в двухслойных средах с верхним слоем без прочности. Результаты расчетов действия сферических источников сравниваются с результатами экспериментальных взрывов подводных накладных зарядов ВВ.

В твердожидкостной постановке импульсно-гидродинамической модели (ИГМ) взрыва на выброс, рассматриваемой ниже, среда считается идеальной несжимаемой жидкостью лишь в области, ограниченной профилем воронки — абсолютно жесткой стенкой, за которой среда покоятся [7]. Профиль воронки — линия тока, на которой выполняется условие равенства частной производной по касательной от потенциала величине, называемой критической скоростью.

Для двухслойной среды можно сформулировать следующую краевую задачу: определить неизвестный участок  $\Gamma_1 + \Gamma_3$  границы  $\Gamma$  (рис. 1) так, чтобы функция  $\varphi$  удовлетворяла в области  $\Omega_1 + \Omega_2$  уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

краевым условиям на границе  $\Gamma$  и условиям непрерывности нормальной скорости и импульсного давления на поверхности раздела слоев:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} = v_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1; \quad (2b)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial s} = v_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_3; \quad (3a)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3; \quad (3b)$$

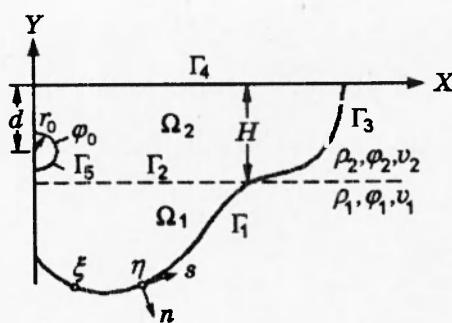


Рис. 1

$$\rho_1 \varphi_1 = \rho_2 \varphi_2 \quad \text{на } \Gamma_2; \quad (4)$$

$$\partial \varphi_1 / \partial n = -\partial \varphi_2 / \partial n \quad \text{на } \Gamma_2; \quad (5)$$

$$\varphi_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma_4; \quad (6)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_0 \quad \text{на } \Gamma_5. \quad (7)$$

На рис. 1 в силу симметрии показана правая часть профиля воронки:  $X$ ,  $Y$  — оси координат,  $\Gamma_1 + \Gamma_3$  — граница воронки в среде,  $\Gamma_2$  — граница раздела сред,  $\Gamma_4$  — свободная поверхность,  $\Gamma_5$  — граница заряда ВВ,  $s$  и  $n$  — дуговая координата и внешняя нормаль к границе воронки,  $\varphi_0$  — потенциал на границе заряда,  $\rho_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $v_1$  и  $\rho_2$ ,  $\varphi_2$ ,  $v_2$  — плотности, потенциалы и критические скорости соответственно 1-го и 2-го слоя,  $r_0$  — радиус импульсного источника,  $H$  — толщина верхнего слоя,  $d$  — расстояние от центра источника до свободной поверхности,  $\eta$ ,  $\xi$  — точки границы  $\Gamma$ .

Переходя к безразмерным переменным в задаче (1)–(7)  $x/H$ ,  $y/H$ ,  $\varphi_0/(v_1 H)$ ,  $r_0/H$ ,  $v_2/v_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ ,  $d/H$ , можно видеть, что координаты  $x/H$  и  $y/H$  для двухслойной среды с плоскопараллельными границами слоев зависят от пяти безразмерных переменных:  $\bar{\varphi}_0 = \varphi_0/(v_1 H)$ ,  $\bar{r}_0 = r_0/H$ ,  $\bar{v}_2 = v_2/v_1$ ,  $\bar{\rho}_2 = \rho_2/\rho_1$ ,  $\bar{d} = d/H$ .

Получить решение задачи (1)–(7) в физической области сразу не удается, так как часть границы области неизвестна и подлежит определению. Поэтому для нахождения неизвестной границы выброса использовали численный алгоритм, аналогичный [1–3], основанный на методе последовательных приближений с применением на каждом этапе вычислений метода граничных элементов.

Для этого на первом этапе достаточно произвольно задавали начальную границу воронки  $\Gamma_1 + \Gamma_3$ , используя метод граничных элементов, решали смешанную краевую задачу (1)–(7) для уравнения Лапласа с условиями (2б), (3б), в результате решения которой находили значения потенциала и тангенциальных скоростей вдоль границы  $\Gamma_1 + \Gamma_3$  для данной конфигурации области  $\Omega_1 + \Omega_2$ .

Сравнивали полученные значения тангенциальных скоростей с условиями (2а), (3а), которые должны удовлетворяться на искомой границе, и в случае их несовпадения производили подвижку границы области. Снова решали указанную выше краевую задачу и т. д. Счет прекращали, когда отличие в значениях тангенциальных скоростей вдоль участков границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  от заданных критических скоростей  $v_1$  и  $v_2$  становилось менее 1 %. Отметим, что в случае, рассматриваемом ниже, когда критическая скорость в верхнем слое  $v_2 = 0$ , граница  $\Gamma_3$  остается неподвижной и является продолжением плоскости раздела

слоев.

Решение задачи для уравнения Лапласа искали с помощью уравнения (см., например, [8])

$$c(\xi)\varphi(\xi) + \int_{\Gamma} \varphi(\eta) q^*(\xi, \eta) d\Gamma(\eta) = \int_{\Gamma} q(\eta) \varphi^*(\xi, \eta) d\Gamma(\eta), \quad (8)$$

где  $c(\xi)$  — постоянная, равная  $\gamma/\pi$  ( $\gamma$  — телесный угол, под которым видна поверхность  $\Gamma$  из точки  $\xi$ );  $\varphi(\eta)$  и  $q(\eta)$  — потенциал и производная потенциала по внешней нормали к области  $\Omega$  в точке  $\eta \in \Gamma$ ;  $\varphi^*(\xi, \eta)$  — решение уравнения Лапласа (для плоской симметрии  $\varphi^*(\xi, \eta) = -(1/\pi) \ln r(\xi, \eta)$ , для осевой симметрии  $\varphi^*(\xi, \eta) = 1/(2\pi r(\xi, \eta))$  ( $r(\xi, \eta)$  — расстояние между точками  $\xi, \eta$ ));  $q^* = \partial\varphi^*/\partial n$ .

Для плоской симметрии граница  $\Gamma$  — контур цилиндрической поверхности, для осевой — контур образующей поверхности вращения. Для численного решения уравнения (8) использовали метод Крылова — Боголюбова [9], который состоит в замене интегральных уравнений системой алгебраических уравнений. Границы областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  разбивали на примерно равные линейные участки — граничные элементы,  $\varphi$  и  $q$  на каждом элементе полагали постоянными и их значения относили к серединам участков — узловым точкам, элементы на границе раздела слоев совпадали между собой. Записывали уравнение (8) в дискретной форме для областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  для каждого граничного элемента, дополняли их условиями (4), (5) на границе раздела и получали полностью определенную систему линейных алгебраических уравнений.

Для вычисления коэффициентов (подынтегральных выражений) в полученной системе линейных уравнений по граничным элементам, на которых  $\eta \neq \xi$ , использовали квадратурную формулу Симпсона, по граничным элементам, на которых  $\eta = \xi$ , для плоской симметрии применяли аналитические выражения [8], для осевой (в малой окрестности точки  $\eta = \xi$ ) — квадратурную формулу [10].

Подвижку участков  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  на каждой итерации производили в два приема. Сначала фиксировали первый от оси симметрии элемент границы, а остальные перемещали, сравнивая на границе  $\Gamma_1$  скорость  $v_j$  на каждом из элементов со скоростью  $v_{11}$  на первом, а на границе  $\Gamma_3$  — со скоростью  $v_{22}$  на границе раздела сред, причем подвижку  $j$ -го элемента границы производили по нормали к его поверхности из точки его пересечения с  $(j+1)$ -м элементом на величины, равные соответственно для первого и второго слоя:

$$\tau_j^1 = l_j k_1 (v_j/v_{11} - 1); \quad (9a)$$

$$\tau_j^2 = l_j k_1 (v_j/v_{22} - 1). \quad (9b)$$

Здесь  $l_j$  — половина длины  $j$ -го элемента;  $k_1$  определяли как функцию от  $v_{\max}$  (максимального значения величины  $|v_j - v_{nn}|/v_{nn}$  вдоль участков границы  $\Gamma_n$  ( $n = 1, 2$ )). Первые два члена выражений (9) являются масштабными множителями, последний определяет направление и относительную величину подвижки границы: при  $v_j > v_{nn}$  происходит смещение искомых границ по направлению внешней нормали к области, а при  $v_j < v_{nn}$  — по направлению внутренней нормали.

При  $v_{\max} > 0,1$  переходили к следующей итерации. При  $v_{\max} \leq 0,1$  для приближения скорости вдоль искомых границ к критическим скоростям производили расширение или сжатие границ областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  сравнением скоростей  $v_{11}$  и  $v_{22}$  с критическими скоростями  $v_1$  и  $v_2$  в каждой из подобластей по следующим формулам:

для первого слоя

$$x_j = x_j v_{11}^{k_2}, \quad y_j = (y_j + 1) v_{11}^{k_2} - 1,$$

для второго слоя

$$x_j = x_j (v_{22}/v_2)^{k_2}, \quad y_j = (y_j + 1)(v_{22}/v_2)^{k_2} - 1 \quad (k_2 = 0,1-0,3).$$

Для реализации метода был разработан пакет программ на языке ФОРТРАН 77. Время одной итерации при расчетах на ЭВМ IBM 360 профилей воронок при количестве точек по контуру  $N = 40$  для осесимметричной задачи не превышало 6 с, для плоской — 4 с. Заданная точность вычислений (1 %) обычно достигалась после 20–30 итераций. Сравнение профилей воронок, рассчитанных по разработанному алгоритму, с профилями воронок, рассчитанными аналитически для плоской симметрии [6], показало, что максимальная относительная ошибка в определении границ воронок при количестве точек по контуру  $N > 50$  не превышает 4 %.

Для проверки метода проведены расчеты воронок, образующихся при взрыве подводных накладных зарядов. Результаты расчетов сравнивали с экспериментальными данными по взрывам сферических зарядов массой от 0,2 до 2,5 г [11, 12]. В этом случае верхний слой (вода) не имеет прочности, его критическая скорость  $v_2 = 0$ , плотность  $\rho_2 = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ . Плотности нижнего слоя  $\rho_1$  подбирали равными плотностям материалов, использовавшихся в экспериментах (для пластилина  $\rho_1 = 1,2 \text{ г}/\text{см}^3$ , для песчано-цементного состава  $\rho_1 = 2,6 \text{ г}/\text{см}^3$  [11, 12]). Толщину верхнего слоя  $H/r_0$  в расчетах изменяли от 0 до 50.

В первой серии были проведены расчеты профилей воронок от действия сферических источников. Импульсное давление на поверхности заряда рассчитывали с использованием подхода [13], согласно которому выражение для кинетической энергии идеальной несжимаемой жидкости с находящимся в ней импульсным источником радиуса  $r_0$  приравнивали эффективной части полной энергии взрыва  $\alpha$ , которая для сферы равна 0,4 [14]. Из полученного уравнения находили значения импульсного давления и потенциала  $\varphi_0$  на поверхности, который для заряда из тэна плотностью  $1,5 \text{ г}/\text{см}^3$ , радиусом  $r_0 = 1 \text{ м}$  равен  $1,59 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$ . Критическую скорость  $v_1$  подбирали сравнением глубины расчетных воронок с глубиной воронок, получаемых в экспериментах при толщине верхнего слоя  $H/r_0 = 5$ . Оказалось, что критические скорости как для пластилина, так и для песчано-цементного состава, несмотря на существенное различие в прочности этих материалов, можно принять одинаковыми и равными  $43,4 \text{ м}/\text{с}$ . По-видимому, это связано с особенностями действия взрыва зарядов малой массы.

В лабораторных опытах [11] при глубине  $H/r_0 > 2-3$  формирование воронки происходило преимущественно за счет вытеснения и уплотнения материала дна, выброса среды практически не наблюдалось. На практике (при взрыве заряда большой массы) образование воронки происходит главным образом за счет выброса среды из эпицентра взрыва. Именно этот механизм образования воронки заложен в критерий определения профиля воронки в твердожидкостной постановке ИГМ. При изменении  $H/r_0$  величину потенциала на поверхности источника и критическую скорость не изменяли.

Воронки, полученные при расчетах действия импульсных источников в двухслойной среде, характеризуются большим показателем выброса  $n$  (отношением радиуса воронки  $R$  к ее глубине  $h$ ), борта воронок растянуты в горизонтальном направлении и плавно выходят на уровень раздела слоев. При увеличении толщины верхнего слоя показатель выброса  $n$

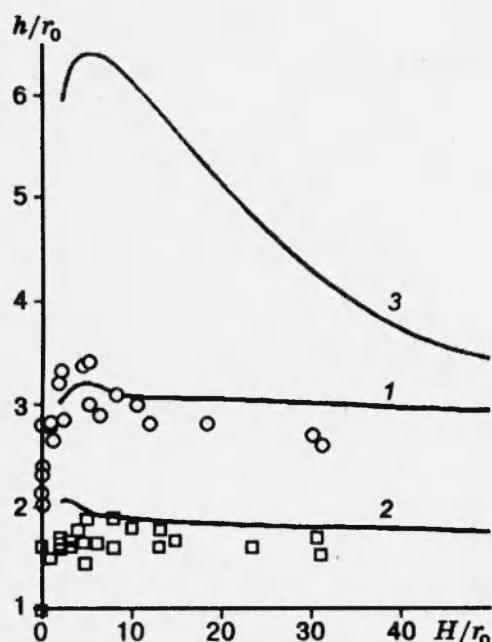


Рис. 2

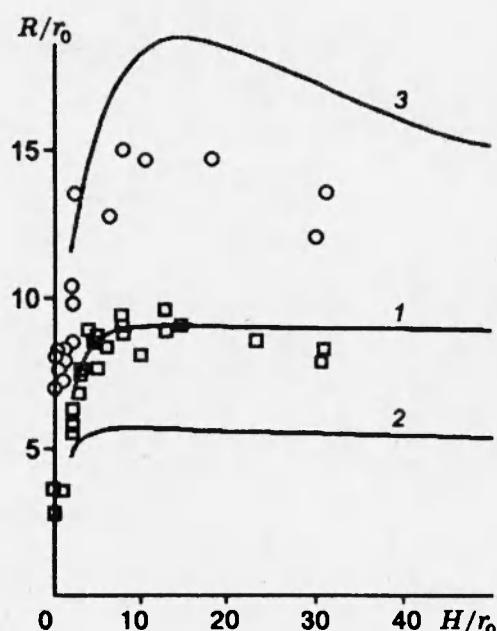


Рис. 3

растет. Сравнение их с профилями воронок, получаемыми при расчете действия импульсных источников в однородной среде (см., например, [7]), свидетельствует о качественном различии этих двух случаев: в однородной среде воронка получается компактная и борта ее подходят к свободной поверхности под углом  $\pi/2$ . Аналогичные различия наблюдаются и в экспериментах при взрыве накладных зарядов на свободной поверхности и в воде, а также при изменении глубины воды  $H/r_0$  [11].

На рис. 2–4 представлены расчетные и экспериментальные зависимости приведенных к радиусу заряда  $r_0$  глубин  $h$  и радиусов  $R$  воронок и приведенного к массе заряда  $Q$  объема  $V$  от глубины воды  $H/r_0$  (кривые 1 и кружки — соответственно результаты расчета и эксперимента для  $\rho_1 = 1,2 \text{ г}/\text{см}^3$ , 2 и квадраты — для  $\rho_1 = 2,6 \text{ г}/\text{см}^3$ ). Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей  $h/r_0 = f(H/r_0)$  и  $R/r_0 = f(H/r_0)$  свидетельствует об их качественном сходстве. На всех расчетных зависимостях имеем оптимумы — значения толщин верхнего слоя, при которых функции проходят через свои максимальные значения. Повышение плотности материала нижнего полупространства, как и в опытах, ведет к уменьшению параметров расчетных воронок.

Вместе с тем оптимумы для более плотного материала дна в расчетах приходятся на меньшую толщину верхнего слоя, тогда как в экспериментах наблюдается обратная картина. По-видимому, это вызвано тем, что реальный процесс разрушения среды при динамическом нагружении продолжается в течение некоторого конечного промежутка времени, которое, как известно, возрастает при увеличении прочности и плотности материала. Поэтому при взрывах на песчано-цементном составе для эффективного формирования воронки необходимо поддерживать давление в продуктах взрыва в течение более длительного промежутка времени, чем при взрывах на пластилине. Рост длительности взрывного импульса в рассматриваемых опытах происходит при увеличении глубины воды, вследствие этого оптимумы для песчано-цементного состава приходятся на большую глубину, чем для пластилина. ИГМ не учитывает этот фактор, что и выражается в расхождении

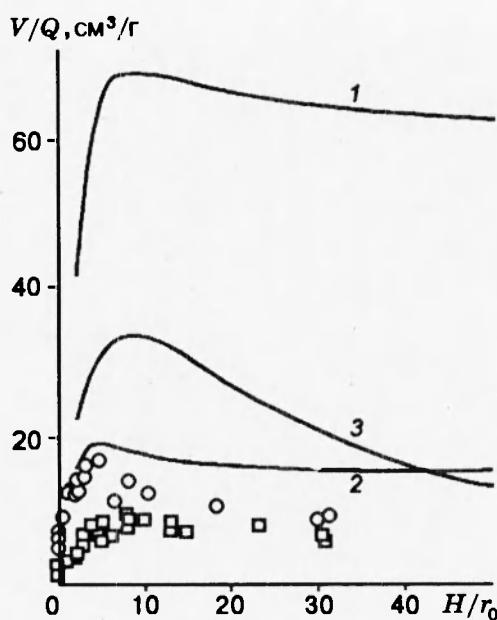


Рис. 4

расчетных и экспериментальных результатов.

При подборе критической скорости, при которой глубины расчетных воронок в большей части диапазона изменения толщины верхнего слоя  $H/r_0$  близки к экспериментальным, расчетные радиусы почти во всем диапазоне изменения  $H/r_0$  в  $\approx 1,5$  раза меньше наблюдаемых в эксперименте, а объемы, напротив, в  $\approx 4\text{--}8$  раз больше. В связи с этим следует отметить различия в расчетных и экспериментальных профилях воронок, которые выражаются в более широком среднем основании расчетных воронок и в характерной для ИГМ заостренности, направленной вершиной вверх. Кроме того, существенное влияние может оказывать и упоминавшееся выше при выборе критической скорости несоответствие характера формирования воронки при взрыве заряда малой массы и заложенного в ИГМ критерия определения профиля воронки. Расчет профиля воронки, образующейся при взрыве подводного накладного заряда в натурных условиях [15], показал, что в этом случае расхождение расчетных и экспериментальных параметров воронки не превышает 15 %.

В практике взрывных работ наряду с сосредоточенными зарядами широкое применение при взрывах на выброс находят удлиненные заряды ВВ. В данной работе проведены расчеты действия бесконечных цилиндрических источников, соответствующие взрывам удлиненных накладных зарядов под водой. Результаты этих расчетов сравниваются с полученными в предыдущей серии для сферических источников. Критические скорости и плотности принимали в виде  $v_1 = 43,4 \text{ м/с}$ ,  $v_2 = 0$ ,  $\rho_1 = 1,2 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $\rho_2 = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ . Для возможности количественного сравнения результатов расчетов импульсное давление и потенциал на поверхности цилиндрического источника рассчитывали так же, как и в предыдущей серии расчетов для сферического источника, при этом учитывали, что для цилиндрического заряда  $\alpha = 0,2$  [16]. Расчет для заряда из тэна плотностью  $1,5 \text{ г}/\text{см}^3$  дает следующее значение потенциала на поверхности цилиндрического источника единичного радиуса:  $\varphi_0 = 1,86 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Профили воронок, получаемые при расчетах действия цилиндрических источников,

и их изменение с изменением толщины верхнего слоя качественно подобны профилям, получаемым при расчетах действия сферических источников. На рис. 2–4 представлены зависимости расчетных параметров воронок от толщины верхнего слоя для взрывов сферических и цилиндрических (кривые 1, 3) зарядов. Все параметры воронок в случае действия цилиндрических источников, как и сферических, при определенных оптимальных значениях  $H/r_0$  проходят через свои максимальные значения, которые выражены более резко и достигаются при больших глубинах.

Линейные размеры воронок (глубина  $h/r_0$  и радиус  $R/r_0$ ) от действия цилиндрических источников во всем рассматриваемом диапазоне  $H/r_0$  превышают аналогичные размеры воронок от действия сферических источников. При этом отношение глубин воронок, равное  $\approx 1,9$  при  $H/r_0 = 2\text{--}5$ , уменьшается при увеличении глубины воды и при  $H/r_0 = 50$  составляет  $\approx 1,16$ . Радиусы расчетных воронок от действия цилиндрических источников больше радиусов воронок от действия сферических источников во всем диапазоне изменения  $H/r_0$  в 1,7–2 раза. Напротив, объемы воронок, приведенные к массам эквивалентных соответствующим импульсным источникам зарядов, от действия цилиндрических источников во всем диапазоне изменения  $H/r_0$  меньше, чем объемы воронок от действия сферических источников: их отношение при  $H/r_0 = 2$  составляет  $\approx 1,93$  и растет при увеличении толщины верхнего слоя до  $\approx 4$  (при  $H/r_0 = 50$ ).

С физической точки зрения эти результаты представляются вполне оправданными. Так как концентрация энергии на единицу объема для цилиндрического импульсного источника значительно выше концентрации энергии для сферического источника, то этим объясняется превышение приведенных линейных параметров воронки ( $R/r_0$  и  $h/r_0$ ) в первом случае по сравнению со вторым. Вместе с тем вследствие менее эффективного перехода энергии взрыва в кинетическую энергию среды при взрыве цилиндрических зарядов по сравнению со взрывами сферических (в расчеты это заложено в виде коэффициента  $\alpha$ ) отнесенная к общей энергии взрыва (массе заряда  $Q$ ) эффективность взрыва (объем воронки  $V$ ) для первых меньше, чем для вторых. Как следует из расчетов (рис. 4), при  $H/r_0 = 2$  отношение величин  $V/Q$  почти совпадает с отношением коэффициентов  $\alpha$ , примерно равным 2, с увеличением  $H/r_0$  эта пропорция нарушается, и при  $H/r_0 = 50$  для сферического источника  $V/Q$  уже в  $\approx 4$  раза больше, чем для цилиндрического. С этой точки зрения при больших глубинах воды эффективность взрыва сосредоточенных накладных зарядов ВВ выше, чем линейных.

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет проводить расчеты профилей воронок при взрыве на выброс в двухслойных средах для линейных и сосредоточенных зарядов в импульсно-гидродинамической постановке. При этом получено качественное совпадение результатов расчетов с экспериментальными данными (особенно для мягких грунтов). Оставаясь в рамках ИГМ, можно попытаться добиться лучшего количественного соответствия экспериментальным результатам, для чего необходимо учесть влияние границы раздела сред и свободной поверхности на параметры источника — заряда ВВ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б., Поташов А. В. Краевые задачи теории взрыва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986.

2. Борисова Т. Б., Ильинский Н. Б., Хайруллин С. Э. О разработке метода граничных интегральных уравнений применительно к задачам взрыва на выброс // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. Вып. 20.
3. Краснов В. К. Решение осесимметричных задач взрыва с использованием метода граничных интегральных уравнений. М., 1984. Деп. в ВИНИТИ 7.05.1984, № 2900-84.
4. Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О форме воронки выброса при взрыве шнурowego заряда в двухслойной среде // ПМТФ. 1973. № 2. С. 143–146.
5. Ильинский Н. Б., Поташов А. В. Определение выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда в двухслойной среде // ПМТФ. 1978. № 2. С. 109–114.
6. Городилов Л. В., Мартынюк П. А. Задача об определении границы воронки выброса при взрыве цилиндрического накладного заряда ВВ под водой // Физ.-техн. probl. разраб. полез. ископаемых. 1991. № 3. С. 23–28.
7. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта // ПМТФ. 1960. № 3. С. 152–156.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Броубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.
10. Воинов В. В., Воинов О. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, вып. 3. С. 559–562.
11. Городилов Л. В., Сухотин А. П. Особенности действия подводного взрыва // Сб. тр. по проблеме ФГП. М.: МГИ, 1984.
12. Городилов Л. В., Сухотин А. П. Действие взрыва накладного заряда ВВ на дно водоема // Физ.-техн. probl. разраб. полез. ископаемых. 1987. № 4. С. 110–112.
13. Власов О. Е. Основы динамики взрыва. М.: Изд-во военно-инженерной академии, 1957.
14. Коул Р. Подводные взрывы. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
15. Галкин В. В., Гильманов Р. А., Дроговейко И. З. Взрывные работы под водой. М.: Недра, 1987.
16. Кедринский В. К. О пульсации цилиндрической газовой полости в безграничной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1971. Вып. 8. С. 59–68.

*Поступила в редакцию 26/IV 1994 г.,  
в окончательном варианте — 18/IV 1995 г.*