

УДК 537.84

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков

Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул
E-mail: runme5@ngs.ru

Исследуется устойчивость к малым возмущениям плоского течения электропроводящей жидкости при больших числах Рейнольдса в присутствии продольного магнитного поля. Изучена зависимость критического числа Рейнольдса от электропроводности. При больших числах Рейнольдса обнаружена новая ветвь неустойчивости, а также скачкообразное изменение критических чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, электропроводящая вязкая жидкость, метод дифференциальной прогонки.

Введение. Исследования устойчивости плоского магнитогидродинамического течения Пуазейля электропроводящей жидкости к малым возмущениям в продольном магнитном поле проводятся в течение длительного времени [1–7] и представляют интерес при построении общей теории ламинарно-турбулентного перехода течений вязкой жидкости в каналах, а также при изучении бифуркаций решений уравнения Навье — Стокса. Данная задача является классической, однако до сих пор отсутствуют простые и эффективные методы исследования неустойчивости Толлмина — Шлихтинга в линейном приближении при больших числах Рейнольдса и немалых магнитных числах Прандтля. Экспериментальная проверка результатов и положений линейной теории гидродинамической устойчивости также существенно затруднена, особенно при больших значениях магнитного числа Прандтля.

Прямое численное моделирование развития неустойчивости позволяет получать результаты, близкие к экспериментальным [8–10]. Однако такие вычисления являются очень сложными и требуют больших затрат из-за необходимости использования суперкомпьютеров. При этом трудно установить основные закономерности развития и стабилизации возмущений в зависимости от входящих в уравнения параметров, так как при каждом наборе параметров приходится исследовать множество возмущений, различных по форме и амплитуде. Кроме того, методы прямого численного моделирования имеют существенные ограничения по числу Рейнольдса и порядку системы решаемых уравнений. В то же время возможности современной вычислительной техники позволяют исследовать малые возмущения магнитогидродинамических течений с использованием полной линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики в широком диапазоне входящих в уравнения параметров и при больших числах Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Запишем систему уравнений магнитной гидродинамики в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{H} &= (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{H}, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla \left(p + \text{Al} \frac{H^2}{2} \right) + \text{Al} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Здесь $Al = H_0^2/(4\pi\rho V_0^2)$ — число Альфвена; $Re = V_0 d/\nu$ — число Рейнольдса; $Re_m = 4\pi V_0 d\sigma/c^2$ — магнитное число Рейнольдса. В качестве характеристических параметров выбраны ширина канала, среднерасходная скорость, напряженность внешнего магнитного поля. Введем декартову систему координат, в которой ось x направлена вдоль направления течения, а ось y — перпендикулярно параллельным плоскостям, ограничивающим жидкость. Ось z перпендикулярна осям x и y . Границам канала соответствуют координаты $y = \pm 1/2$. Целесообразно ввести обобщенное давление $P_g = p + Al H^2/2$. Таким образом, структура уравнений магнитной гидродинамики такова, что три параметра (например, Al , Re , Re_m) полностью определяют поведение системы при заданных геометрии канала и внешнем магнитном поле. В расчетах вместо магнитного числа Рейнольдса использовалось магнитное число Прандтля $Pr_m = Re_m/Re = 4\pi\sigma\nu/c^2$, прямо пропорциональное электропроводности.

Решение системы уравнений (1) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad P_g = P_0 + P, \quad (2)$$

где $\mathbf{U} = \{U, 0, 0\}$, $\mathbf{H}_0 = \{1, 0, 0\}$, P_0 — стационарное решение системы (1); $U = (3/2)(1 - 4y^2)$; \mathbf{v} , \mathbf{h} , P — возмущения скорости, магнитного поля и обобщенного давления. Подставим (2) в уравнения (1). Считая возмущения малыми, получим линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}_0 &= (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{U} + \frac{1}{Re_m} \Delta \mathbf{h}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{U} &= -\nabla P + Al(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{h} + Al(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{H}_0 + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Стенки канала предполагаются непроницаемыми и идеально электропроводящими. Граничные условия для возмущений имеют вид

$$y = \pm 1/2: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{h} = 0.$$

Решения линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики (3) будем искать в виде

$$\{v_x(y), v_y(y), v_z(y), h_x(y), h_y(y), h_z(y), q(y)\} e^{i\alpha(x-Ct)+i\beta z}, \quad (4)$$

где v_x , v_y , v_z , h_x , h_y , h_z — проекции амплитуд возмущений скорости и напряженности магнитного поля на соответствующие оси декартовой системы координат; q — амплитуда возмущения давления; α — продольное волновое число; β — поперечное волновое число; $C = X + iY$ — комплексная фазовая скорость; X — собственно фазовая скорость; αY — декремент затухания возмущения (при $Y < 0$) или инкремент его нарастания (при $Y > 0$). Подставляя (4) в (3), получим систему дифференциальных уравнений

$$i\alpha(U - C)h_x = i\alpha v_x + h_y U' + (h_x'' - h_x(\alpha^2 + \beta^2))/(Pr_m Re); \quad (5)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + (h_y'' - h_y(\alpha^2 + \beta^2))/(Pr_m Re); \quad (6)$$

$$i\alpha(U - C)h_z = i\alpha v_z + (h_z'' - h_z(\alpha^2 + \beta^2))/(Pr_m Re); \quad (7)$$

$$i\alpha(U - C)v_x + v_y U' = -i\alpha q + i\alpha Al h_x + (v_x'' - v_x(\alpha^2 + \beta^2))/Re; \quad (8)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha Al h_y + (v_y'' - v_y(\alpha^2 + \beta^2))/Re; \quad (9)$$

$$i\alpha(U - C)v_z = -i\beta q + i\alpha \text{Al} h_z + (v_z'' - v_z(\alpha^2 + \beta^2))/\text{Re}; \quad (10)$$

$$h_y' + i\alpha h_x + i\beta h_z = 0, \quad v_y' + i\alpha v_x + i\beta v_z = 0. \quad (11)$$

Введем новые функции: $v = \alpha v_x + \beta v_z$, $h = \alpha h_x + \beta h_z$. Умножим уравнение (5) на α , а уравнение (7) — на β и сложим их. Аналогично поступим с уравнениями (8), (10). В результате получим

$$i\alpha(U - C)h = i\alpha v + \alpha h_y U' + (h'' - k^2 h)/(\text{Pr}_m \text{Re}), \quad (12)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + (h_y'' - k^2 h_y)/(\text{Pr}_m \text{Re});$$

$$i\alpha(U - C)v + \alpha v_y U' = -ik^2 q + i\alpha \text{Al} h + (v'' - k^2 v)/\text{Re}; \quad (13)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + (v_y'' - k^2 v_y)/\text{Re}, \quad (14)$$

$$v_y' + iv = 0.$$

Здесь $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ — квадрат волнового вектора. Уравнение $\text{div} \mathbf{h} = 0$ в данном случае имеет вид $h_y' + ih = 0$. С помощью этого соотношения в уравнении (13) величину h можно выразить через h_y . В результате система дифференциальных уравнений (12)–(14) принимает вид

$$i\alpha(U - C)h = i\alpha v + \alpha h_y U' + (h'' - k^2 h)/(\text{Pr}_m \text{Re}); \quad (15)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + (h_y'' - k^2 h_y)/(\text{Pr}_m \text{Re}),$$

$$i\alpha(U - C)v + \alpha v_y U' = -ik^2 q - \alpha \text{Al} h_y' + (v'' - k^2 v)/\text{Re}, \quad (16)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + (v_y'' - k^2 v_y)/\text{Re},$$

$$v_y' + iv = 0.$$

Легко заметить, что теперь величина h входит только в уравнение (15), которое отщепляется от системы (15), (16). Обозначим

$$D = i\alpha \text{Re}(U - C), \quad \Omega = i\alpha \text{Pr}_m \text{Re}(U - C). \quad (17)$$

Используя формулы (17), систему дифференциальных уравнений (16) запишем в виде

$$v_y' = -iv, \quad h_y' = \Phi, \quad v' = Z,$$

$$\Phi' = k^2 h_y - i\alpha \text{Re} \text{Pr}_m v_y + \Omega h_y,$$

$$Z' = k^2 v + \alpha \text{Re} \text{Al} \Phi + ik^2 \text{Re} q + \alpha U' \text{Re} v_y + Dv,$$

$$q' = -\frac{D}{\text{Re}} v_y + i\alpha \text{Al} h_y - \frac{i}{\text{Re}} Z - \frac{k^2}{\text{Re}} v_y.$$

Данную систему удобно представить в матричном виде

$$\mathbf{W}' = M_1 \mathbf{W} + M_2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}' = M_3 \mathbf{W} + M_4 \mathbf{V}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{W} = \{v, v_y, h_y\}, \quad \mathbf{V} = \{\Phi, Z, q\},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha \operatorname{Re} \operatorname{Pr}_m & k^2 + \Omega \\ k^2 + D & \alpha U' \operatorname{Re} & 0 \\ 0 & -(k^2 + D)/\operatorname{Re} & i\alpha \operatorname{Al} \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha \operatorname{Re} \operatorname{Al} & 0 & ik^2 \operatorname{Re} \\ 0 & -i/\operatorname{Re} & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (15), (16) допускает преобразования Сквайра [11]

$$k \operatorname{Re}_{eff} = \alpha \operatorname{Re}, \quad \alpha q_{eff} = kq, \quad (19)$$

где Re_{eff} — эффективное число Рейнольдса, соответствующее решению двумерной задачи. Из (19) следует соотношение

$$\operatorname{Re}_* = (\operatorname{Re}_{eff})_*/\cos\theta, \quad (20)$$

где $\cos\theta = \alpha/k$; величины с индексом “*” — критические значения параметров. Следовательно, двумерные возмущения являются наиболее опасными, в том смысле что критические числа Рейнольдса для них меньше по сравнению с критическими числами Рейнольдса для трехмерных возмущений. Тем не менее в данном случае теорема Сквайра, вообще говоря, неприменима. Ниже показано, каким образом области неустойчивости трехмерных возмущений “закрывают” области устойчивости, образуемые двумерными возмущениями.

2. Численный метод. Как известно, эффективное решение задач гидродинамической устойчивости, как и вообще решение задачи на собственные значения для несамосопряженных операторов, в общем случае возможно только численно. При этом стандартные численные методы обычно оказываются неприменимы: собственные функции линейных задач устойчивости течений вязкой электропроводящей жидкости обладают “плохими” свойствами, возникающими вследствие наличия в уравнениях малых параметров $1/\operatorname{Re}$, $1/\operatorname{Re}_m$ при старшей производной. В фундаментальной системе решений таких уравнений имеются быстрорастущие осциллирующие решения вида $\exp\left(\int \sqrt{i\alpha \operatorname{Re}(U - C)} dy\right)$, что из-за ошибок округления существенно затрудняет непосредственное численное нахождение остальных линейно независимых собственных функций и решение задачи на собственные значения.

Численное решение задачи Орра — Зоммерфельда методом коллокаций [12] позволяет преодолеть указанные выше трудности за счет высокого качества приближенного представления решения. Однако при увеличении параметра $\alpha \operatorname{Re}$ приходится брать все большее число членов разложения, что приводит к увеличению размеров матрицы, используемой в методе коллокаций, и ухудшению ее обусловленности. В настоящее время метод коллокаций используется для исследования устойчивости простейших плоских течений (см., например, [13]) при сравнительно небольших числах Рейнольдса.

Для решения задач гидродинамической устойчивости эффективны методы пошагового интегрирования: метод ортогонализации С. К. Годунова, метод исключения, метод дифференциальной прогонки [11, 14–16]. Однако процедуры ортогонализации и исключения требуют большого объема вычислений, который быстро возрастает с увеличением порядка решаемой системы. Для решения задач гидродинамической устойчивости разработан метод дифференциальной прогонки [11, 14]. Преимуществами данного метода являются его относительная простота, универсальность и высокая эффективность. Кроме того, данный метод отличается высокой надежностью получаемых результатов, что подтверждается, в частности, сопоставлением результатов с данными, получаемыми другими методами, в том числе методом коллокаций.

При использовании метода дифференциальной прогонки задача на собственные значения сводится к последовательности задач Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая легко интегрируется численно. Собственные значения определяются при прямой прогонке. После определения собственного значения соответствующую собственную функцию можно найти обратной прогонкой.

При использовании метода дифференциальной прогонки вводятся уравнения для подпространства решений

$$\mathbf{W} = A(y)\mathbf{V}, \quad (21)$$

где A — матрица размером 3×3 .

Выражение (21) обычно называют схемой прогонки. В процессе вычислений схему прогонки можно изменять, добиваясь наиболее “благоприятного” поведения коэффициентов матрицы A для оптимизации расчетов [11].

На границе канала заданы условия $\mathbf{W} = 0$, откуда следует граничное условие $A = 0$. В расчетах применяется интегрирование непосредственно системы (18) на небольших расстояниях от границ канала с последующим использованием той или иной схемы прогонки.

Численные эксперименты позволили установить, что схема (21), определенная граничными условиями $\mathbf{W} = 0$, $A = 0$, неоптимальна при интегрировании в средней части канала. С учетом затрат машинного времени и простоты алгоритма наиболее экономичным оказался следующий вариант прогонки: на небольших расстояниях от границ канала прогонка велась по схеме (21), определенной граничными условиями, а в средней части канала использовалась “обращенная” схема прогонки

$$\mathbf{V} = G\mathbf{W}, \quad (22)$$

причем при стыковке решений в силу непрерывности собственных функций и их производных выполняется условие $G = A^{-1}$. Системы дифференциальных уравнений для матриц A и G можно получить, продифференцировав уравнения (21), (22) и подставив в них выражения (18). В результате находим

$$A' = M_1A + M_2 - A(M_3A + M_4), \quad G' = M_4G + M_3 - G(M_2G + M_1). \quad (23)$$

Интегрирование уравнений (23) велось численно от границ канала к некоторой средней точке, в которой, так же как и в точках инверсии схемы прогонки, векторы \mathbf{V} и \mathbf{W} должны быть непрерывны, что позволяет записать для \mathbf{W} систему алгебраических уравнений

$$(G^+ - G^-)\mathbf{W} = 0$$

(знаки “+” и “−” соответствуют прогоночным коэффициентам G , полученным интегрированием от разных границ канала). Так как $\mathbf{W} \neq 0$, можно записать дисперсионное уравнение

$$\det(G^+ - G^-) = 0. \quad (24)$$

Численные эксперименты показали, что при такой схеме прогонки дисперсионное соотношение (24) обладает “хорошими” свойствами. Для решения этого соотношения использовались итерационные методы.

Определив собственные значения, обратной прогонкой легко найти \mathbf{W} и \mathbf{V} на всем интервале интегрирования.

3. Результаты вычислений. Рассмотрим возмущения с $k = \alpha$ (двумерные возмущения). На рис. 1 приведена зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от числа Альфвена при $Pr_m = 0,01$. При $Al \rightarrow 0$ критические числа Рейнольдса стремятся к значениям, соответствующим случаю плоского течения Пуазейля диэлектрической жидкости. При увеличении числа Альфвена критическое число Рейнольдса монотонно увеличивается вплоть до $Al \approx 0,01$, после чего кривая зависимости $Re_*(Al)$ “разворачивается” в направлении уменьшения значений числа Альфвена, ограничивая область неустойчивости сверху. Выше данной области при значениях числа Рейнольдса порядка 10^7 обнаружена новая ветвь неустойчивости, критические зависимости которой представляют собой выпуклую вниз кривую.

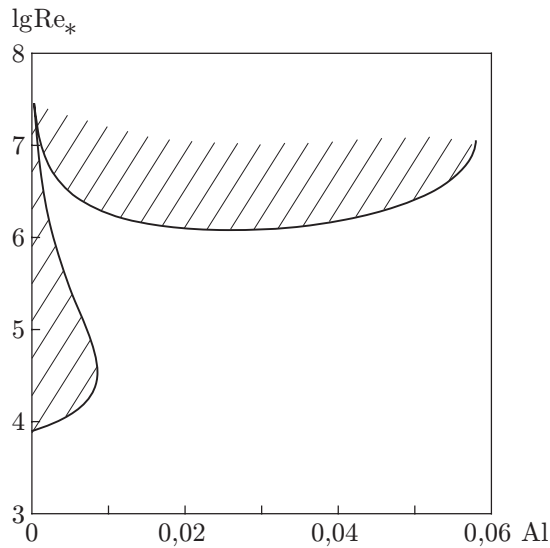


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость $Re_*(Al)$ при $Pr_m = 0,01$:
заштрихованная область — область неустойчивости

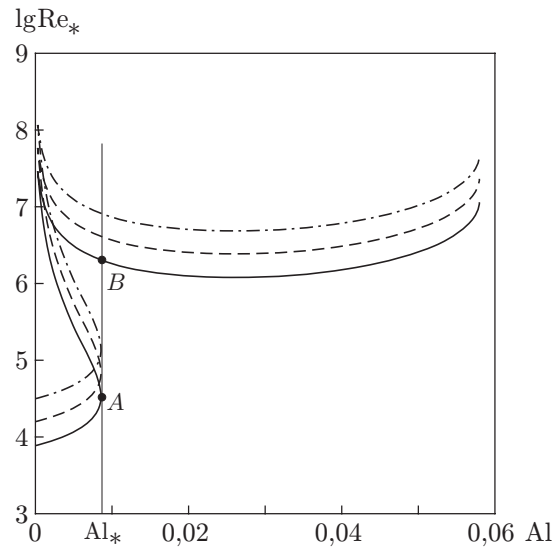


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость $Re_*(Al)$ при $Pr_m = 0,01$:
сплошная линия — $k = \alpha$; штриховая — $k = 2\alpha$ ($Re_* = 2(Re_{eff})_*$); штрихпунктирная —
 $k = 4\alpha$ ($Re_* = 4(Re_{eff})_*$)

Для определения роли двумерных возмущений с помощью соотношения (20) проведен анализ трехмерных возмущений, который позволяет судить об их влиянии на картину устойчивости. При этом обнаружены области, в которых трехмерные возмущения являются более опасными по сравнению с двумерными. На рис. 2 приведена зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от числа Альфвена при $Pr_m = 0,01$ и $k = \alpha, 2\alpha, 4\alpha$. Аналогичные зависимости при других значениях $\cos \theta$ могут быть построены с помощью соотношения (20). К нижней ветви критических зависимостей $k = \alpha$ можно провести вертикальную касательную в точке A (соответствующее число Альфвена обозначим Al_*), которая при $k = \alpha$ пересекает верхнюю ветвь критических зависимостей в точке B . Слева от отрезка AB расположена область неустойчивости трехмерных возмущений ($k > \alpha$).

Таким образом, учет трехмерных возмущений приводит к расширению области неустойчивости, в то же время двумерные возмущения являются наиболее опасными, поскольку критические числа Рейнольдса для них меньше критических чисел Рейнольдса для трехмерных возмущений. При этом области неустойчивости для трехмерных возмущений могут быть получены путем простых смещений графиков зависимости $Re_*(Al)$ для двумерных возмущений. Далее рассматриваются только двумерные возмущения, что существенно упрощает анализ устойчивости. Для анализа устойчивости течения при $Al < Al_*$ достаточно рассмотреть только двумерные возмущения.

На рис. 3 приведены нейтральные кривые при $Pr_m = 0,01$, $Al = 0,005$. Замкнутая нейтральная кривая соответствует нижней области неустойчивости на рис. 1, а незамкнутая — верхней области неустойчивости. “Носики” рассматриваемых нейтральных зависимостей лежат на кривой зависимости $Re_*(Al)$ на рис. 1. При увеличении числа Альфвена замкнутая область генерации неустойчивости уменьшается, в результате стягиваясь в точку. Принципиально новым результатом, полученным в данной работе, является обнаружение второй ветви неустойчивости при очень больших числах Рейнольдса.

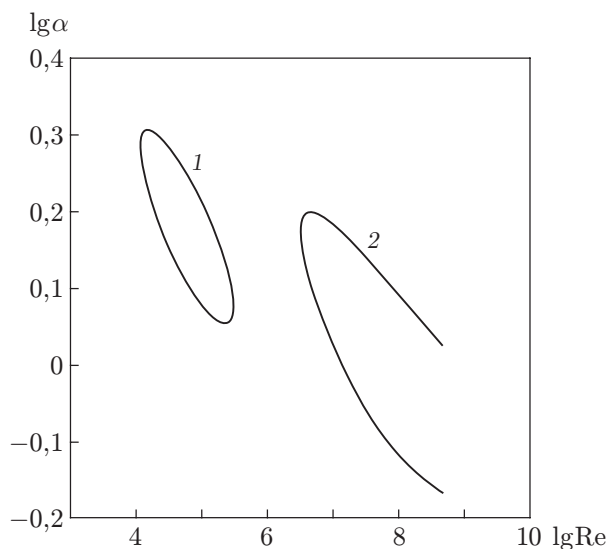


Рис. 3

Рис. 3. Нейтральные кривые ($Pr_m = 0,01$, $Al = 0,005$), соответствующие нижней (1) и верхней (2) областям неустойчивости на рис. 1

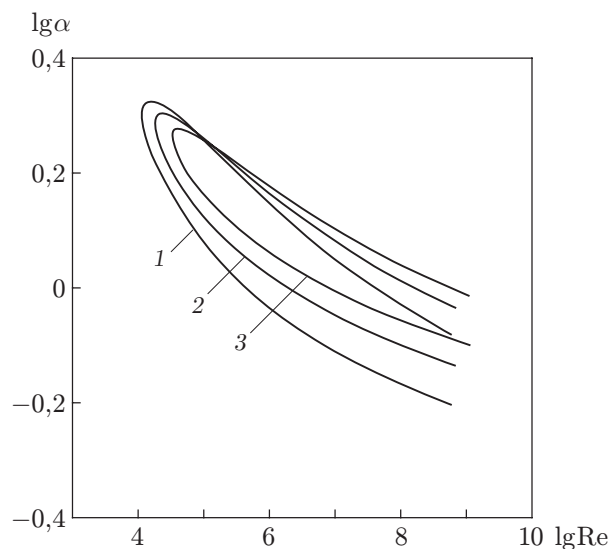


Рис. 4

Рис. 4. Нейтральные кривые ($Pr_m = 1,5$):
 1 — $Al = 0,005$; 2 — $Al = 0,010$; 3 — $Al = 0,015$

На рис. 4 представлены нейтральные кривые при $Pr_m = 1,5$ и $Al = 0,005; 0,010, 0,015$. В данном случае, в отличие от рассмотренных выше, эти кривые незамкнуты. При увеличении числа Альфвена наблюдается увеличение критических чисел Рейнольдса и некоторое смещение области неустойчивости в сторону области коротковолновых возмущений.

На рис. 5,а,б представлена зависимость $Re_*(Pr_m)$ при $Al = 0,010; 0,015$ соответственно. Показанные на рис. 5 области неустойчивости имеют сложную форму, что нехарактерно для задач гидродинамической устойчивости. При $Pr_m \rightarrow 0$ значения критического числа Рейнольдса стремятся к соответствующим значениям для диэлектрической жидкости, при $Pr_m > 10$ кривые зависимости $Re_*(Pr_m)$ выходят на горизонтальные асимптоты, соответствующие $Pr_m \rightarrow \infty$. Увеличение магнитного числа Прандтля от 10^{-4} до 10^{-3} приводит к незначительному увеличению критического числа Рейнольдса. При дальнейшем увеличении магнитного числа Прандтля кривая $Re_*(Pr_m)$ “разворачивается” в направлении уменьшения магнитного числа Прандтля, ограничивая при этом рассматриваемую область неустойчивости сверху. С увеличением числа Альфвена данная область неустойчивости сжимается, при этом наиболее сильное влияние числа Альфвена испытывает ее верхняя граница (рис. 5). Выше рассмотренной области неустойчивости располагается область устойчивости, ограниченная сверху второй ветвью зависимости $Re_*(Pr_m)$. С увеличением магнитного числа Прандтля критические числа Рейнольдса данной ветви уменьшаются. Такое расположение кривых зависимости $Re_*(Pr_m)$ обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса при увеличении значения Pr_m . Аналогичное поведение зависимости $Re_*(Pr_m)$ наблюдается при $Pr_m \approx 1$. На рис. 5,а при $Pr_m \approx 1$ кривая зависимости $Re_*(Pr_m)$ имеет характерный максимум, который исчезает при дальнейшем увеличении числа Альфвена. При этом на его месте возникает узкая область устойчивости данного течения (рис. 5,б).

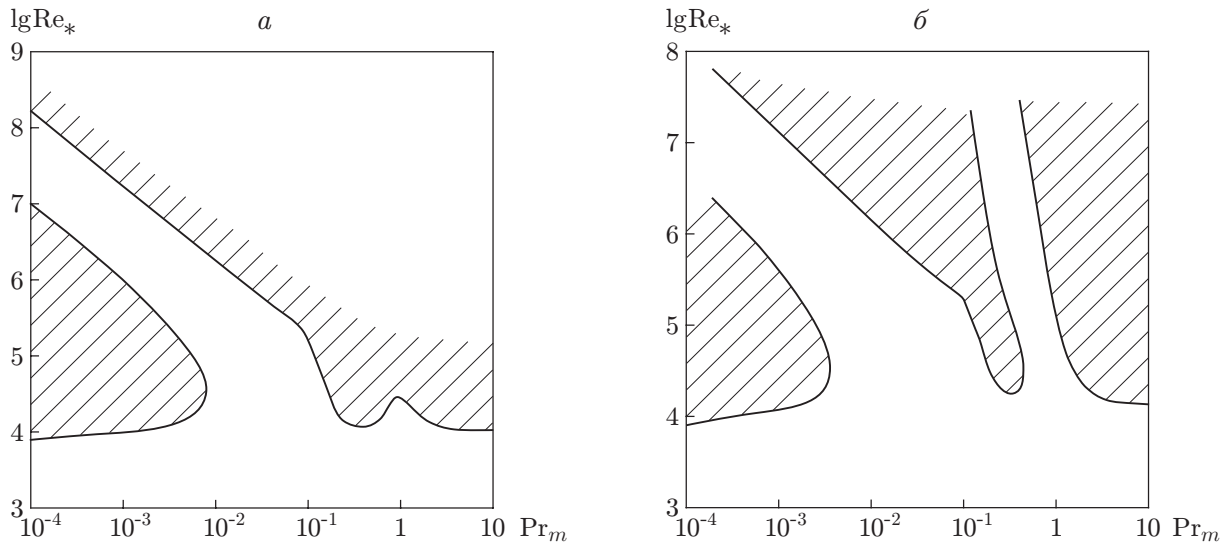


Рис. 5. Зависимость $Re_*(Pr_m)$:

a — $Al = 0,010$; b — $Al = 0,015$; заштрихованные области — области неустойчивости

Заключение. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Увеличение числа Альфвена при определенных значениях параметров может приводить к скачкообразному увеличению критических чисел Рейнольдса. Обнаружены области устойчивости данного течения к малым двумерным возмущениям при $Re = 10^6 \div 10^7$. Показано, что диссипация оказывает существенное влияние на устойчивость данного течения. При изменении магнитного числа Прандтля наблюдается существенное изменение критических чисел Рейнольдса, при этом может наблюдаться скачкообразная стабилизация данного течения. Изменение параметров (числа Альфвена и магнитного числа Прандтля) может приводить к изменению характера нейтральных кривых двумерных возмущений — отщеплению от “носика” нейтральной кривой замкнутой области неустойчивости, которая при увеличении числа Альфвена уменьшается, а затем исчезает. Для данного течения справедливы преобразования Сквайра, однако теорема Сквайра, вообще говоря, неприменима. Установлено, что существуют области, в которых двумерные возмущения затухают, а трехмерные — неустойчивы.

Картина устойчивости течения электропроводящей жидкости в плоском канале при наличии продольного магнитного поля достаточно сложна и своеобразна. В результате подробного анализа зависимости критического числа Рейнольдса от магнитного числа Прандтля обнаружена новая ветвь неустойчивости при больших числах Рейнольдса. С использованием современной вычислительной техники и метода дифференциальной прогонки данная ветвь неустойчивости подробно исследована при $Re = 10^6 \div 10^7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Michael D. N.** Stability of plane parallel flows of electrically conducting fluids // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953. V. 41, N 1. P. 166–168.
2. **Tatsumi T.** MHD-stability and turbulence // Progr. Theoret. Phys. Suppl. 1962. V. 24. P. 156–193.
3. **Бетчов Р.** Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. М.: Мир, 1971.

4. **Hunt J. C. R.** On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1966. V. 293, N 1434. P. 342–358.
5. **Stuart J. T.** On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a complanar magnetic field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 221. P. 189–206.
6. **Велихов Е. П.** Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 36, вып. 4. С. 1192–1202.
7. **Ko Sung Hwan.** On the stability of plane Poiseulle flow with a finite conductivity in a aligned magnetic field // J. Fluid Mech. 1968. V. 33, N 3. P. 433–444.
8. **Thess A., Zikanov O.** Direct numerical simulation of forced MHD turbulence at low magnetic Reynolds number // J. Fluid Mech. 1998. N 358. P. 299–333.
9. **Moresko P., Alboussierre T.** Experimental study of the instability of the Hartmann layer // J. Fluid Mech. 1998. N 504. P. 167–181.
10. **Zikanov O.** On the instability of pipe Poiseulle flow // Phys. Fluids. 1996. N 8. P. 2923–2932.
11. **Гольдштик М. А.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
12. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
13. **Henningson D. S.** Stability and transition in shear flows / D. S. Henningson, P. J. Schmid. N. Y.: Springer-Verlag, 2001.
14. **Сапожников В. А.** Численное решение задач гидродинамической устойчивости: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1970.
15. **Davey A.** An automatic orthonormalization method for solving stiff boundary value problem // J. Comput. Phys. 1983. N 51. С. 343–356.
16. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 3. С. 542–545.

*Поступила в редакцию 30/І 2007 г.,
в окончательном варианте — 18/VI 2007 г.*
