

УДК 532.54

## ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КАНАЛ, ЗАПОЛНЕННЫЙ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ, ПРИ НАЛИЧИИ КОНВЕКТИВНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ НА СТЕНКАХ КАНАЛА

С. Асгар<sup>\*,\*\*</sup>, К. Хусаин<sup>\*</sup>, Т. Хайат<sup>\*\*,\*\*\*</sup>, А. Альсаеди<sup>\*\*</sup>

\* Институт информационных технологий компании КОМСАТ, 44000 Исламабад, Пакистан

\*\* Университет им. короля Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия

\*\*\* Университет Каид-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

E-mails: sasghar@comsats.edu.pk, q.hussain@hotmail.com,

fmgpak@gmail.com, aalsaedi@kau.edu.sa

Проведено исследование процесса теплопереноса в перистальтическом потоке горючей вязкой жидкости в насыщенной пористой среде, возникающем при распространении волны вдоль стенок канала. Предполагается, что в канале происходит экзотермическая химическая реакция в соответствии с кинетикой Аррениуса и конвективный теплообмен с окружающей средой через поверхность стенок канала в соответствии с законом охлаждения Ньютона. Анализ выполнен с учетом вязкой диссипации и в предположении, что расход материала отсутствует. Задача формулируется в длинноволновом приближении. Получены замкнутые решения для функции тока, осевой составляющей вектора скорости и осевой составляющей градиента давления. Установлено, что при больших числах Био температура уменьшается, с увеличением параметра реакции число Нуссельта увеличивается. Показано, что число Био и параметр реакции оказывают противоположное влияние на число Нуссельта.

Ключевые слова: перистальтика, реагирующая жидкость, пористая среда, конвекция, вязкая диссипация, закачивание.

DOI: 10.15372/PMTF20150405

**Введение.** Изучению течения жидкости в каналах посвящено большое количество работ, что обусловлено широким использованием различных течений как в технике, так и в биологических системах, например при выращивании кристаллов, проектировании устройств для розлива жидкого металла, конструировании медицинских диагностических приборов и т. п. Механизм перистальтического течения в симметричных и несимметричных каналах исследовался как теоретически, так и экспериментально. Такое течение возникает вследствие последовательного сжатия и расширения стенок канала. Принцип перистальтики является общим и для пищевода, и для желудка, и для кишечника. Механизм перистальтики широко используется в промышленности, например при транспортировке коррозионных, санитарных и токсичных жидкостей и т. п. После появления работы [1]

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Научного фонда декана Университета им. короля Абдул-Азиза.

© Асгар С., Хусаин К., Хайат Т., Альсаеди А., 2015

выполнено достаточно много исследований перистальтических течений. Исследовалось течение как вязких, так и неньютоновских жидкостей [2–11].

Однако изучению влияния теплопереноса и пористости среды на перистальтическое течение уделялось недостаточно внимания. Учет этих явлений существен при исследовании артериальных систем человека и животных. В таких системах можно обнаружить локальные сужения (стенозы), возникающие вследствие наличия внутрисосудистых бляшек. Стенозы вызывают нарушение нормального артериального кровотока. Очевидно, что исследования артериального кровотока имеют большое значение для диагностики сердечно-сосудистых заболеваний, в частности атеросклероза.

В ряде патологических случаев наличие в артериях отложений холестерина и бляшек позволяет рассматривать артерии как пористую среду. С учетом этих факторов в работе [12] изучалось перистальтическое течение жидкости со степенным уравнением состояния в пористой трубе. В [13] построена математическая модель перистальтического течения Джеффри в пористой среде, ограниченной податливыми стенками. В [14] изучено влияние пористости на перистальтическое течение ньютоновской жидкости в наклонном плоском канале, а в [15] — перистальтическое течение максвелловской жидкости через пористую среду с учетом эффекта Холла. Задача о перистальтическом течении электропроводящей микрополярной жидкости в симметричном канале, заполненном пористой средой, решена в [16]. В [17] выполнен анализ теплопереноса при перистальтическом течении ньютоновской жидкости в асимметричном канале. Влияние теплопереноса на течение через пористую среду, индуцированное перистальтикой податливых стенок, изучалось в [18]. В [19] исследовано совместное влияние магнитного поля и пористости среды на перистальтическое течение максвелловской жидкости и теплоперенос в канале с податливыми стенками. Перистальтическое течение ньютоновской жидкости через пористую среду в вертикальном асимметричном канале при наличии теплопереноса изучено в [20]. Перистальтическое накачивание жидкости Джеффри при наличии теплопереноса исследовалось в [21]. В работе [22] предложена математическая модель неустановившегося перистальтического потока тепла через пористый канал конечной длины. В работах [23, 24] подробно проанализирована модель течения в насыщенной пористой среде.

Насколько известно авторам данной работы, исследование переноса тепла при перистальтическом течении реагирующей вязкой жидкости через насыщенную пористую среду при наличии теплообмена через поверхность стенок канала не проводилось. Целью данной работы является анализ теплопереноса при перистальтическом течении реагирующей вязкой жидкости при наличии конвективного теплопереноса на стенках канала.

Изучение теплообмена в пористой среде имеет большое значение при моделировании кровотока в опухолях и мышцах, движения питательных веществ в клетках головного мозга, движения лекарственных препаратов, образования бляшек холестерина и артериальных тромбов. В данной работе учитывается конвективный теплообмен с окружающей средой через стенки канала.

**1. Формулировка задачи и уравнения течения.** Решается термогидродинамическая задача о перистальтическом течении вязкой горючей жидкости в симметричном канале  $-\tilde{H} \leq \tilde{Y} \leq \tilde{H}$ . Однородную изотропную пористую среду заполняет несжимаемая жидкость. Стенки канала непроницаемы, и через них происходит конвективное охлаждение до температуры, равной температуре окружающей среды  $T_a$ . Движение жидкости возникает вследствие распространения волны с малой амплитудой вдоль стенок канала. Используется ортогональная декартова система координат  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  (рис. 1). На рис. 1 показана геометрия исследуемого течения. Решается двумерная задача о течении жидкости с учетом вязкой диссипации.

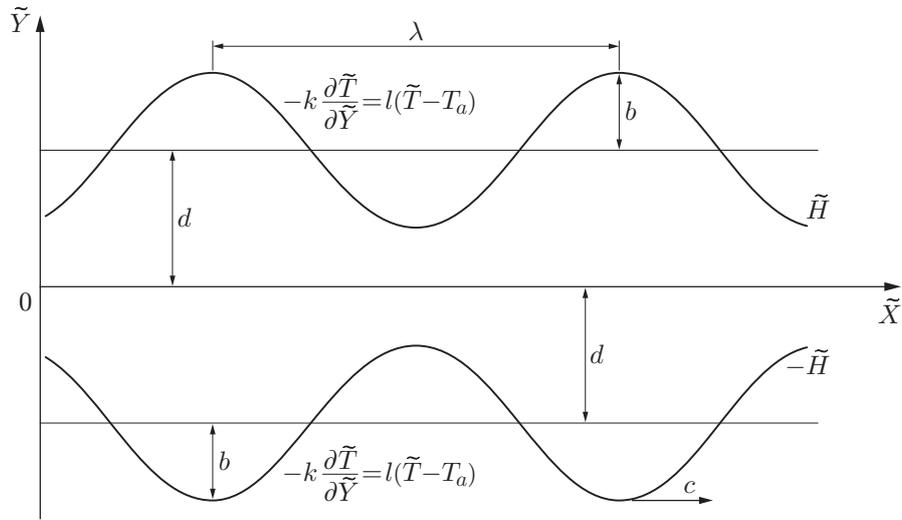


Рис. 1. Физическая модель

Форма стенок канала описывается уравнением [4, 5, 7, 16, 21]

$$\tilde{H}(\tilde{X}, \tilde{t}) = d + b \cos [2\pi(\tilde{X} - c\tilde{t})/\lambda],$$

где  $d$  — половина ширины канала;  $b$  — амплитуда волны;  $\lambda$  — длина волны;  $c$  — скорость распространения волны;  $\tilde{t}$  — время.

Для компонент вектора скорости  $\tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{U}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{t}), \tilde{V}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{t}), 0)$  используются следующие уравнения:

— уравнение неразрывности

$$\tilde{U}_{\tilde{X}} + \tilde{V}_{\tilde{Y}} = 0; \quad (1)$$

— проекция на ось  $\tilde{X}$  уравнения, выражающего закон сохранения количества движения:

$$\rho(\tilde{U}_t + \tilde{U}\tilde{U}_{\tilde{X}} + \tilde{V}\tilde{U}_{\tilde{Y}}) = -\tilde{P}_{\tilde{X}} + \mu(\tilde{U}_{\tilde{X}\tilde{X}} + \tilde{U}_{\tilde{Y}\tilde{Y}}) - (\mu/K)\tilde{U}; \quad (2)$$

— проекция на ось  $\tilde{Y}$  уравнения, выражающего закон сохранения количества движения:

$$\rho(\tilde{V}_t + \tilde{U}\tilde{V}_{\tilde{X}} + \tilde{V}\tilde{V}_{\tilde{Y}}) = -\tilde{P}_{\tilde{Y}} + \mu(\tilde{V}_{\tilde{X}\tilde{X}} + \tilde{V}_{\tilde{Y}\tilde{Y}}) - (\mu/K)\tilde{V}; \quad (3)$$

— уравнение энергии

$$\rho c_p(\tilde{T}_t + \tilde{U}\tilde{T}_{\tilde{X}} + \tilde{V}\tilde{T}_{\tilde{Y}}) = k(\tilde{T}_{\tilde{X}\tilde{X}} + \tilde{T}_{\tilde{Y}\tilde{Y}}) + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \quad (4)$$

где

$$\Phi_1 = \mu[2(\tilde{U}_{\tilde{X}})^2 + 2(\tilde{V}_{\tilde{Y}})^2 + (\tilde{U}_{\tilde{Y}} + \tilde{V}_{\tilde{X}})^2], \quad \Phi_2 = \frac{\mu\tilde{U}^2}{K}, \quad \Phi_3 = SC_0 A e^{-E/(RT)}. \quad (5)$$

Слагаемое  $\Phi_1$  учитывает вязкую диссипацию [17, 18],  $\Phi_2$  — дополнительную вязкую диссипацию при малых и больших значениях проницаемости среды [25],  $\Phi_3$  — экзотермическую реакцию, происходящую в соответствии с кинетическим уравнением Аррениуса [26, 27].

Краевые условия ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\tilde{Y}} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{Y} = 0, \quad \tilde{U} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{Y} = \tilde{H}, \\ \tilde{T}_{\tilde{Y}} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{Y} = 0, \quad -k\tilde{T}_{\tilde{Y}} = l(T - T_a) \quad \text{при} \quad \tilde{Y} = \tilde{H}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (1)–(6)  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$  — компоненты вектора скорости в системе координат  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ ;  $\tilde{P}$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $K$  — проницаемость пористой среды;  $c_p$  — удельная теплоемкость;  $k$  — теплопроводность жидкости;  $S$  — теплота химической реакции;  $C_0$  — начальная концентрация реагирующих частиц;  $A$  — константа в уравнении Аррениуса;  $E$  — энергия активации;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $l$  — коэффициент передачи внутреннего тепла.

Подвижная  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  и неподвижная  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  системы координат связаны соотношениями [4–7, 14, 16, 17, 20, 21]

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{X} - c\tilde{t}, & u(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{U}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{t}) - c, \\ \tilde{y} &= \tilde{Y}, & \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{V}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{t}), & \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{P}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{t}),\end{aligned}\quad (7)$$

где  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{p}$  — компоненты вектора скорости и давление в подвижной системе координат. Ниже используются безразмерные величины

$$x = \frac{\tilde{x}}{\lambda}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{d}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{c}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{c}, \quad t = \frac{c\tilde{t}}{\lambda}, \quad T = \frac{E(\tilde{T} - T_a)}{RT_a^2}, \quad h = \frac{\tilde{H}}{d}.\quad (8)$$

Если положить

$$u = \psi_y, \quad v = -\delta\psi_x,\quad (9)$$

где  $\psi = \psi(x, y)$  — функция тока, то уравнение несжимаемости (1) будет выполняться тождественно.

Подставляя (7)–(9) в (2)–(6), получаем

$$\begin{aligned}\text{Re } \delta(\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy}) &= -p_x + (\delta^2\psi_{xxy} + \psi_{yyy}) - \beta^2(\psi_y + 1), \\ \text{Re } \delta^3(\psi_x\psi_{xy} - \psi_y\psi_{xx}) &= -p_y + \delta^2(\delta^2\psi_{xxx} + \psi_{xyy}),\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\text{Pr } \text{Re } \delta(\psi_y T_x - \psi_x T_y) &= \delta^2 T_{xx} + T_{yy} + \\ &+ \Gamma \{ e^{T/(1+\varepsilon T)} + \alpha\beta^2(\psi_y + 1)^2 + \alpha[4\delta^2(\psi_{xy})^2 + (\psi_{yy} - \delta^2\psi_{xx})^2] \}; \\ \psi_{yy} &= 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \psi_y = -1 \quad \text{при } y = h(x) = 1 + a \cos(2\pi x); \\ T_y &= 0 \quad \text{при } y = 0, \quad T_y = -\text{Bi}T \quad \text{при } y = h(x) = 1 + a \cos(2\pi x),\end{aligned}\quad (11)$$

$$T_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad T_y = -\text{Bi}T \quad \text{при } y = h(x) = 1 + a \cos(2\pi x),\quad (12)$$

где  $\delta$  — волновое число;  $p$  — давление;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса;  $\text{Pr}$  — число Прандтля;  $\alpha$  — параметр вязкого нагрева;  $\varepsilon$  — энергия активации;  $\Gamma$  — параметр Франка — Каменецкого (параметр реакции);  $\beta$  — параметр пористости среды;  $\text{Bi}$  — число Био;  $a$  — безразмерная амплитуда. Безразмерные величины введены следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{d}{\lambda}, \quad p = \frac{d^2\tilde{p}}{c\lambda\mu}, \quad \text{Re} = \frac{\rho cd}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}, \quad \alpha = \frac{\mu c^2 e^{E/(RT_a)}}{SC_0 A d^2}, \\ \varepsilon &= \frac{RT_a}{E}, \quad \Gamma = \frac{SC_0 A E d^2 e^{-E/(RT_a)}}{kRT_a^2}, \quad \beta = \frac{d}{\sqrt{K}}, \quad \text{Bi} = \frac{ld}{k}, \quad a = \frac{b}{d}.\end{aligned}$$

Безразмерное число Нуссельта определяется по формуле

$$\text{Nu} = -\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=h(x)}.$$

Выражение для безразмерного расхода жидкости  $\tilde{Q}$  в неподвижной системе координат имеет вид [4, 7, 16, 21]

$$\tilde{Q} = \int_0^{\tilde{H}(\tilde{X}, \tilde{t})} \tilde{U}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{t}) d\tilde{Y}.$$

С учетом преобразования (7) получаем

$$\tilde{Q} = \tilde{q} + c\tilde{H}(\tilde{x}), \quad (13)$$

где  $\tilde{q}$  — безразмерный расход жидкости в подвижной системе координат:

$$\tilde{q} = \int_0^{\tilde{H}(\tilde{X})} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{y}.$$

В любом фиксированном сечении  $\tilde{X}$  средний расход за период  $\tau = \lambda/c$  равен

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{Q} dt. \quad (14)$$

Из (13), (14) получаем

$$\tilde{\Theta} = \tilde{q} + cd.$$

Определяя безразмерные расходы в неподвижной и подвижной системах координат:

$$Q = \tilde{\Theta}/(cd), \quad F = \tilde{q}/(cd),$$

получаем

$$Q = F + 1,$$

где

$$F = \int_0^{h(x)} \psi_y dy = \psi(h(x)) - \psi(0).$$

Если функцию тока в центре канала положить равной нулю, то на стенке канала ( $y = h(x)$ ) она должна быть равной  $F$ :

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \psi = F \quad \text{при} \quad y = h(x) = 1 + a \cos(2\pi x). \quad (15)$$

**2. Решение математической задачи.** С использованием длинноволнового приближения при малых числах Рейнольдса приближения уравнений (10) принимают следующий вид:

$$0 = -p_x + \psi_{yyy} - \beta^2(\psi_y + 1); \quad (16)$$

$$0 = -p_y; \quad (17)$$

$$0 = T_{yy} + \Gamma [e^{T/(1+\varepsilon T)} + \alpha\beta^2(\psi_y + 1)^2 + \alpha(\psi_{yy})^2]. \quad (18)$$

При  $Re \rightarrow 0$  безынерционное течение соответствует течению Пуазейля.

Градиент давления зависит от  $x$  и  $t$  только в неподвижной системе координат и не зависит от  $y$ . Такие особенности течения предсказуемы, поскольку при  $\delta = 0$  отсутствует кривизна линий тока, приводящая к появлению градиента давления в поперечном направлении.

При малых числах Рейнольдса из допущений длинноволнового приближения следует, что  $\delta = 0$ ,  $Re = 0$ . Заметим, что длинноволновое приближение и предположение о равенстве нулю числа Рейнольдса можно использовать при описании движения химуса в тонкой кишке мужчины [28]. В этом случае  $c = 2$  см/мин,  $a = 1,25$  см,  $\lambda = 8,01$  см, следовательно,

половина ширины кишечника мала по сравнению с длиной волны:  $a/\lambda = 0,156$ . В работе [29] также отмечается, что движение в тонкой кишке соответствует малым числам Рейнольдса. Поток внутриматочной жидкости вследствие миометральных сокращений также является перистальтическим течением в полости.

Сагиттальное сечение матки представляет собой узкий канал, заключенный между двумя практически параллельными стенками [30]. Ширина этого канала ( $1 \div 3$  мм) очень мала по сравнению с его длиной (50 мм) [31], вследствие чего угол раскрытия от шейки матки до ее дна составляет приблизительно 0,004 рад. В результате анализа динамических показателей матки определены частота, длина, амплитуда типичной сократительной волны и скорость движения жидкости. Эти значения соответственно равны 0,010  $\div$  0,057 Гц, 10  $\div$  30 мм, 0,05  $\div$  0,20 мм и 0,5  $\div$  1,9 мм/с.

Дифференцируя уравнение (16) по  $x$ , уравнение (17) — по  $y$ , получаем уравнение совместности

$$\psi_{yyyy} - \beta^2 \psi_{yy} = 0. \quad (19)$$

Решая уравнение (19) с граничными условиями (11), (15), находим

$$\psi = \frac{(F + h) \operatorname{sh}(\beta y)}{\operatorname{sh}(\beta h) - \beta h \operatorname{ch}(\beta h)} - \frac{\operatorname{sh}(\beta h) + \beta F \operatorname{ch}(\beta h)}{\operatorname{sh}(\beta h) - \beta h \operatorname{ch}(\beta h)} y. \quad (20)$$

Подставляя решение (20) в уравнения (9), (16), имеем

$$u = \frac{(F + h)\beta \operatorname{ch}(\beta y)}{\operatorname{sh}(\beta h) - \beta h \operatorname{ch}(\beta h)} - \frac{\operatorname{sh}(\beta h) + \beta F \operatorname{ch}(\beta h)}{\operatorname{sh}(\beta h) - \beta h \operatorname{ch}(\beta h)},$$

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{(F + h)\beta^3}{\beta h - \operatorname{th}(\beta h)}.$$

Изменение безразмерного давления на длине волны вычисляется следующим образом:

$$\Delta P_\lambda = \int_0^1 \left( \frac{dp}{dx} \right) dx. \quad (21)$$

Используя в (21) выражение для функции  $F = Q - 1$ , получаем формулу для вычисления расхода жидкости

$$Q = \frac{\Delta P_\lambda + \beta^3 L_1}{\beta^3 L_2},$$

где

$$L_1 = \int_0^1 \frac{1 - h}{\operatorname{th}(\beta h) - \beta h} dx, \quad L_2 = \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{th}(\beta h) - \beta h} dx.$$

Следует отметить, что уравнение (18) является существенно нелинейным и получить его решение в замкнутой форме очень сложно. В данной работе для получения решения в виде рядов используется метод возмущений [32]. В качестве возмущаемого параметра выберем параметр реакции  $\Gamma$  и используем результаты работ [26, 27].

Представим выражение для температуры в следующем виде:

$$T = \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma^l T_l. \quad (22)$$

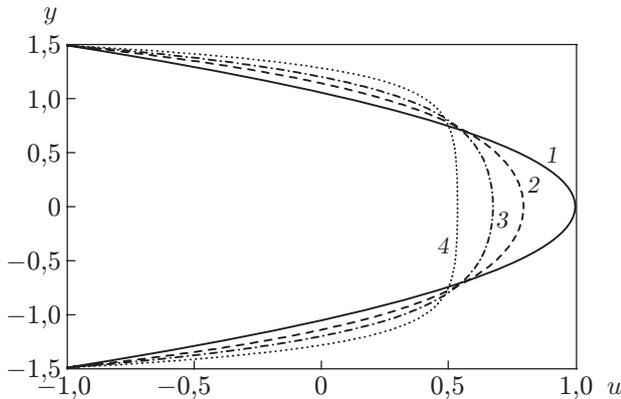


Рис. 2

Рис. 2. Влияние параметра  $\beta$  на компоненту скорости  $u$  при  $a = 0,5$ ,  $Q = 1,5$ ,  $x = 0$ :

1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 2$ , 3 —  $\beta = 3$ , 4 —  $\beta = 5$

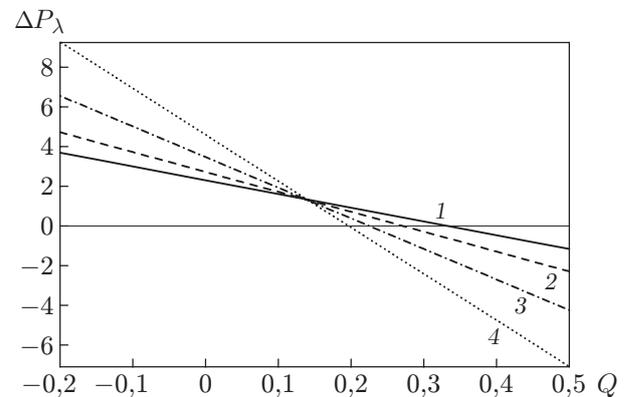


Рис. 3

Рис. 3. Влияние параметра  $\beta$  на перепад давления  $\Delta P_\lambda$  при  $a = 0,5$ :

1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 1,5$ , 3 —  $\beta = 2,5$ , 4 —  $\beta = 3,5$

Подставляя (22) в уравнения (12), (18) и используя метод возмущений, получаем

$$T = \Gamma(A_1 + f_1(y)) + \Gamma^2(A_2 + f_2(y)) + \Gamma^3(A_3 + f_3(y)) + O(\Gamma^4), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(y) &= -C_3 y^2 / 2 - \beta^2 [C_4 \operatorname{ch}(\beta y) - C_7 \operatorname{ch}(2\beta y)], \\ f_2(y) &= \{(C_3 y^2 - 12A_1)y^2 + 6[4C_4 \operatorname{ch}(\beta y) - C_7 \operatorname{ch}(2\beta y)]\} / 24, \\ f_3(y) &= C_8 y^2 + C_5 y^4 - C_6 y^6 - [C_{15} \operatorname{sh}(\beta y) + C_{16} \operatorname{sh}(2\beta y)]y + C_{13} \operatorname{ch}(3\beta y) - \\ &\quad - (C_{11} + C_9 y^2) \operatorname{ch}(\beta y) - (C_{12} + C_{10} y^2) \operatorname{ch}(2\beta y) - C_{14} \operatorname{ch}(4\beta y). \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения для констант, входящих в формулы (23), (24), не приводятся вследствие их громоздкости.

**3. Обсуждение результатов.** Ниже исследуется влияние различных параметров задачи на характеристики перистальтического течения и теплопереноса.

На рис. 2 представлено распределение компоненты скорости  $u$  по координате  $y$  при различных значениях параметра пористости  $\beta$ . Максимальное значение компоненты скорости  $u$  достигается в центре канала и с увеличением параметра  $\beta$  уменьшается. Вблизи перистальтической стенки с увеличением параметра  $\beta$  компонента скорости  $u$  увеличивается.

Зависимость перепада давления на длине волны  $\Delta P_\lambda$  от расхода жидкости  $Q$  при различных значениях параметра  $\beta$  приведена на рис. 3. С увеличением параметра  $\beta$  мощность насоса в области откачивания ( $\Delta P_\lambda > 0$ ,  $Q < 0$ ) увеличивается, при этом максимальное значение  $\Delta P_\lambda$ , необходимое для получения нулевого расхода ( $Q = 0$ ), также увеличивается. Таким образом, для обеспечения движения жидкости в случае отсутствия пор ( $\beta = 0$ ) перистальтический насос работает при давлениях, меньших, чем в случае их наличия ( $\beta > 0$ ). В случае течения без накачивания ( $\Delta P_\lambda = 0$ ) расход  $Q$  уменьшается с увеличением параметра  $\beta$ . Зависимость перепада давления  $\Delta P_\lambda$  от  $\beta$  в области накачивания ( $\Delta P_\lambda < 0$ ,  $Q > 0$ ) является зависимостью, обратной зависимости в области откачивания.

На рис. 4 приведены зависимости среднего расхода  $Q$  от параметра пористости  $\beta$  при различных значениях  $\Delta P_\lambda$ . При малых значениях параметра  $\beta$  средний расход  $Q$  практически не зависит от  $\beta$ . Однако с увеличением  $\beta$  средний расход также увеличивается. С увеличением  $\Delta P_\lambda$  расход  $Q$  уменьшается при всех значениях  $\beta$ .

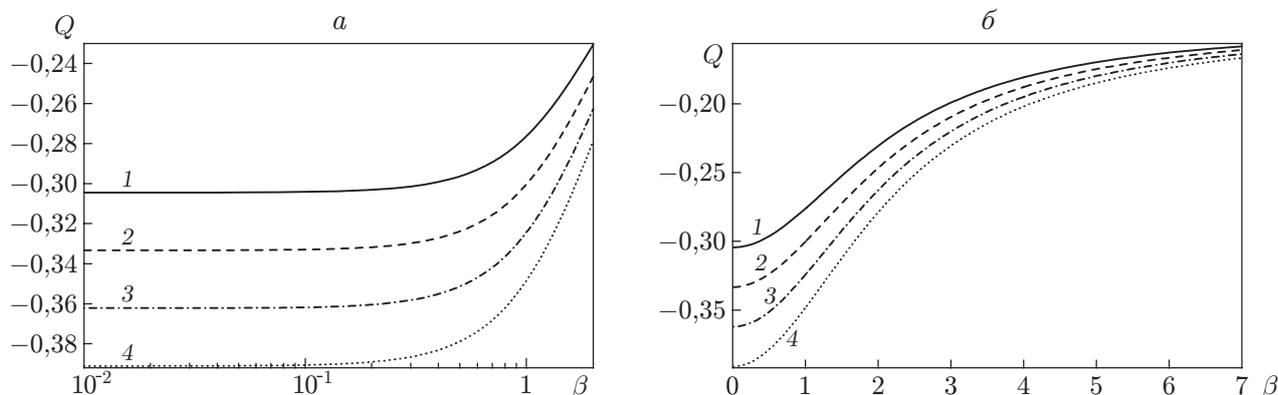


Рис. 4. Зависимость расхода  $Q$  от параметра  $\beta$  при различных значениях  $\Delta P_\lambda$  и  $a = 0,5$ :  
 а —  $10^{-2} \leq \beta \leq 1$ , б —  $0 \leq \beta \leq 7$ ; 1 —  $\Delta P_\lambda = -0,2$ , 2 —  $\Delta P_\lambda = 0$ , 3 —  $\Delta P_\lambda = 0,2$ , 4 —  $\Delta P_\lambda = 0,4$

Распределения температуры  $T$  по координате  $y$  при различных значениях параметров  $\Gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $Bi$  приведены на рис. 5. При увеличении параметра реакции  $\Gamma$  температура жидкости увеличивается (см. рис. 5,а). Это объясняется тем, что с увеличением  $\Gamma$  значительно увеличивается интенсивность реакции, поэтому в уравнении энергии увеличивается слагаемое, соответствующее вязкому нагреву.

На рис. 5,б представлено распределение температуры жидкости по координате  $y$  при различных значениях параметра вязкого нагрева  $\alpha$ . Так же как при увеличении параметра реакции  $\Gamma$ , при увеличении параметра вязкого нагрева  $\alpha$  температура потока увеличивается, но в меньшей степени. Параметр  $\alpha$  в уравнении переноса тепла (18) входит только в слагаемое, обусловленное наличием вязкого нагрева, но не входит в экспоненциально возрастающее слагаемое, обусловленное наличием реакции. Этим объясняется то, что при увеличении параметра  $\alpha$  температура  $T$  возрастает медленнее, чем при увеличении параметра  $\Gamma$ .

С увеличением параметра пористости  $\beta$  температура жидкости также увеличивается (см. рис. 5,в). Как и следовало ожидать, с увеличением параметра энергии активации  $\varepsilon$  температура жидкости уменьшается (см. рис. 5,г). Это объясняется тем, что экспоненциальная функция, учитывающая вклад экзотермической реакции, уменьшается с увеличением параметра  $\varepsilon$ . Профили температуры  $T$  при различных значениях числа Био  $Bi$  приведены на рис. 5,д. С увеличением числа Био увеличивается интенсивность процесса конвективного охлаждения через стенки канала, что приводит к уменьшению температуры на них и, следовательно, к уменьшению температуры основного потока.

На рис. 6 приведена зависимость числа Нуссельта  $Nu$ , характеризующего скорость теплообмена на стенках канала, от параметра  $\Gamma$  при различных значениях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $Bi$ . Видно, что число Нуссельта является возрастающей функцией параметра  $\Gamma$ . С увеличением параметров  $\alpha$  и  $\beta$  число Нуссельта увеличивается (см. рис. 6,а,б), а с увеличением параметра  $\varepsilon$  и числа Био  $Bi$  — уменьшается (см. рис. 6,в,г).

В целом параметры, вызывающие увеличение (уменьшение) температуры, соответствуют параметрам, обуславливающим увеличение (уменьшение) скорости теплообмена на стенках канала.

**Заключение.** Предложена математическая модель перистальтического течения реагирующей вязкой жидкости через насыщенную пористую среду. Изучен процесс теплопереноса при условиях симметричного конвективного охлаждения на стенках канала. Построено точное решение гидродинамической задачи. Уравнение теплопроводности решено методом возмущений.

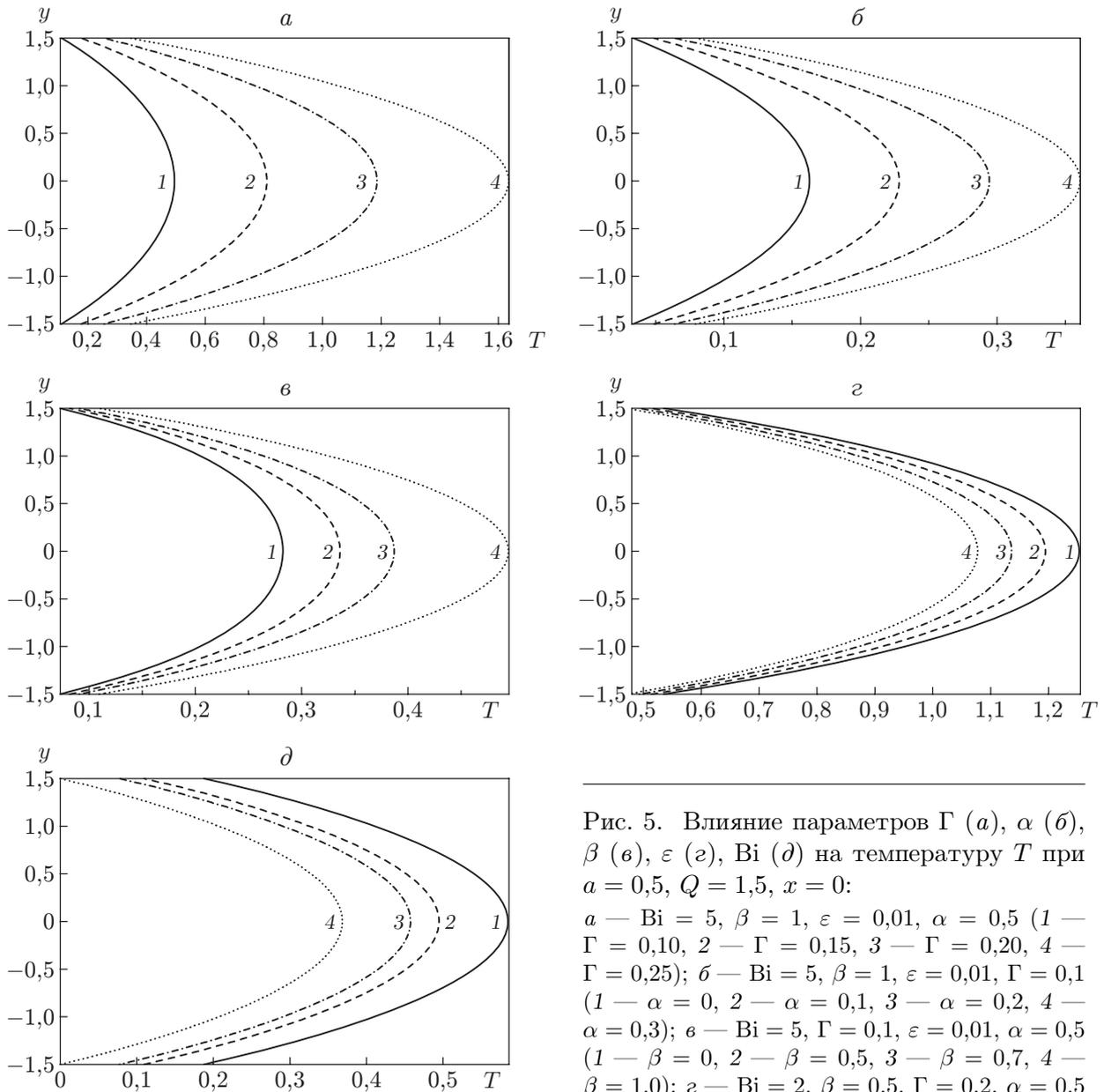


Рис. 5. Влияние параметров  $\Gamma$  (*a*),  $\alpha$  (*б*),  $\beta$  (*в*),  $\varepsilon$  (*г*),  $Bi$  (*д*) на температуру  $T$  при  $a = 0,5$ ,  $Q = 1,5$ ,  $x = 0$ :

*a* —  $Bi = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 0,5$  (1 —  $\Gamma = 0,10$ , 2 —  $\Gamma = 0,15$ , 3 —  $\Gamma = 0,20$ , 4 —  $\Gamma = 0,25$ ); *б* —  $Bi = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\Gamma = 0,1$  (1 —  $\alpha = 0$ , 2 —  $\alpha = 0,1$ , 3 —  $\alpha = 0,2$ , 4 —  $\alpha = 0,3$ ); *в* —  $Bi = 5$ ,  $\Gamma = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 0,5$  (1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 0,5$ , 3 —  $\beta = 0,7$ , 4 —  $\beta = 1,0$ ); *г* —  $Bi = 2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\Gamma = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$  (1 —  $\varepsilon = 0$ , 2 —  $\varepsilon = 0,3$ , 3 —  $\varepsilon = 0,6$ , 4 —  $\varepsilon = 0,9$ ); *д* —  $\beta = 1$ ,  $\Gamma = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\alpha = 0,5$  (1 —  $Bi = 3$ , 2 —  $Bi = 5$ , 3 —  $Bi = 7$ , 4 —  $Bi = \infty$ )

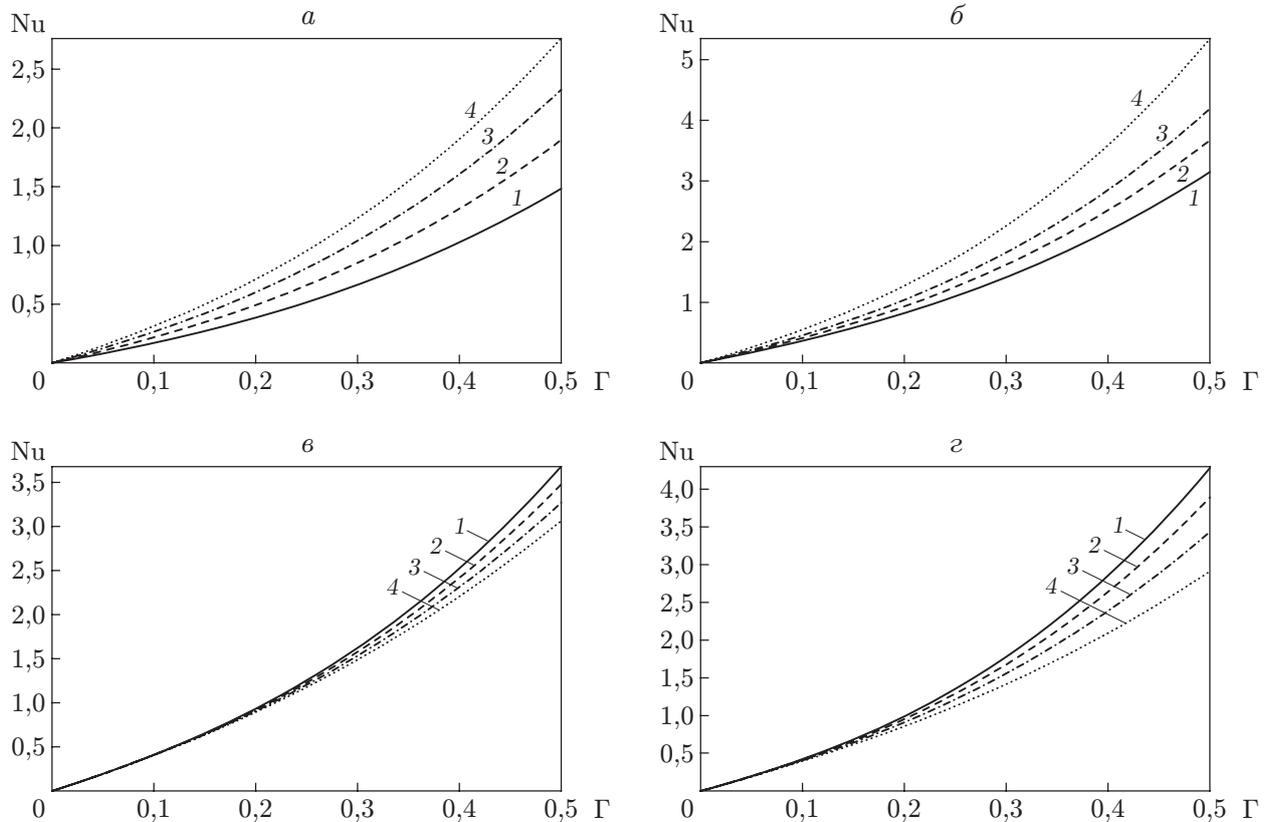


Рис. 6. Влияние параметров  $\alpha$  (а),  $\beta$  (б),  $\varepsilon$  (в),  $Bi$  (г) на число Нуссельта при  $a = 0,5$ ,  $Q = 1,5$ ,  $x = 0$ :

а —  $Bi = 5$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,01$  (1 —  $\alpha = 0$ , 2 —  $\alpha = 0,1$ , 3 —  $\alpha = 0,2$ , 4 —  $\alpha = 0,3$ ); б —  $Bi = 5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,01$  (1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 0,5$ , 3 —  $\beta = 0,7$ , 4 —  $\beta = 1,0$ ); в —  $Bi = 5$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$  (1 —  $\varepsilon = 0$ , 2 —  $\varepsilon = 0,2$ , 3 —  $\varepsilon = 0,4$ , 4 —  $\varepsilon = 0,6$ ); г —  $\beta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,01$  (1 —  $Bi = 3$ , 2 —  $Bi = 4$ , 3 —  $Bi = 7$ , 4 —  $Bi = \infty$ )

Из результатов проведенного исследования следует, что с увеличением параметра пористости  $\beta$  составляющая скорости  $u$  уменьшается, а скорость перистальтического откачивания увеличивается. Однако в случае свободного потока и в случае перистальтического накачивания справедлива обратная зависимость. При больших значениях параметра  $\beta$  расход жидкости  $Q$  увеличивается.

С увеличением параметров  $\Gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  температура жидкости увеличивается, а с увеличением параметра  $\varepsilon$  и числа Био  $Bi$  — уменьшается. Увеличение (уменьшение) одних и тех же параметров приводит к увеличению (уменьшению) как скорости теплообмена на стенках канала, так и температуры жидкости. Из результатов данной работы можно получить результаты для случая непористой среды при  $\beta \rightarrow 0$ ,  $Bi \rightarrow \infty$  и постоянной температуре стенок канала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Latham T. W.** Fluid motion in a peristaltic pump: MS thesis. Cambridge: Massachusetts Inst. of Technol., 1966.
2. **El-Shehawy E. F., Husseny S. Z. A.** Peristaltic transport of a magneto-fluid with porous boundaries // Appl. Math. Comput. 2002. V. 129. P. 421–440.

3. **Mishra M., Rao A. R.** Peristaltic transport of a Newtonian fluid in an asymmetric channel // *Z. angew. Math. Phys.* 2003. Bd 54. S. 532–550.
4. **Abd Elmaboud Y., Mekheimer Kh. S.** Nonlinear peristaltic transport of a second-order fluid through a porous medium // *Appl. Math. Modelling.* 2011. V. 35. P. 2695–2710.
5. **Hayat T., Abbasi F. M., Hendi A. A.** Heat transfer analysis for peristaltic mechanism in variable viscosity fluid // *Chinese Phys. Lett.* 2011. V. 28. 044701.
6. **Ebaid A.** Effects of magnetic field and wall slip conditions on the peristaltic transport of a Newtonian fluid in an asymmetric channel // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 4493–4499.
7. **Ali N., Hussain Q., Hayat T., Asghar S.** Slip effects on the peristaltic transport of MHD fluid with variable viscosity // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 1477–1489.
8. **Jamil M., Fetecau C.** Helical flows of Maxwell fluid between coaxial cylinders with given shear stresses on the boundary // *Nonlinear Anal.: Real World Applicat.* 2010. V. 11. P. 4302–4311.
9. **Mekheimer Kh. S., Haroun M. H., El Kot M. A.** Influence of heat and chemical reactions on blood flow through an anisotropically tapered elastic arteries with overlapping stenosis // *Appl. Math. Inform. Sci.* 2012. V. 6. P. 281–292.
10. **Wang S., Tan W. C.** Stability analysis of solet-driven double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2011. V. 32. P. 88–94.
11. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Alsaedi A.** Radiative flow with variable thermal conductivity in porous medium // *Z. Naturforsch. Ser. A.* 2012. Bd 67a. S. 153–159.
12. **Rao A. R., Mishra M.** Peristaltic transport of a power-law fluid in a porous tube // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2004. V. 121. P. 163–174.
13. **Hayat T., Javed M., Ali N.** MHD peristaltic transport of a Jeffery fluid in a channel with compliant walls and porous space // *Transport. Porous. Media.* 2008. V. 74. P. 259–274.
14. **Mekheimer Kh. S.** Nonlinear peristaltic transport through a porous medium in an inclined planar channel // *J. Porous Media.* 2003. V. 6. P. 189–201.
15. **Hayat T., Ali N., Asghar S.** Hall effects on peristaltic flow of a Maxwell fluid in a porous medium // *Phys. Lett. A.* 2007. V. 363. P. 397–403.
16. **Pandey S. K., Chaube M. K.** Peristaltic flow of a micropolar fluid through a porous medium in the presence of an external magnetic field // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011. V. 16. P. 3591–3601.
17. **Srinivas S., Kothandapani M.** Peristaltic transport in an asymmetric channel with heat transfer — A note // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 35. P. 514–522.
18. **Kothandapani M., Srinivas S.** On the influence of wall properties in the MHD peristaltic transport with heat transfer and porous medium // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 4586–4591.
19. **Hayat T., Hina S., Ali N.** Effect of wall properties on the magnetohydrodynamic peristaltic flow of a Maxwell fluid with heat transfer and porous medium // *Numer. Methods Partial Differential Equations.* 2010. V. 26. P. 1099–1114.
20. **Mekheimer Kh. S., Husseny S. Z. A., Abd Elmaboud Y.** Effects of heat transfer and space porosity on peristaltic flow in a vertical asymmetric channel // *Numer. Methods Partial Differential Equations.* 2010. V. 26. P. 747–770.
21. **Vajravelu K., Sreenadh S., Lakshminarayana P.** The influence of heat transfer on peristaltic transport of a Jeffrey fluid in a vertical porous stratum // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011. V. 16. P. 3107–3125.
22. **Tripathi D.** Study of transient peristaltic heat flow through a finite porous channel // *Math. Comput. Modelling.* 2013. V. 57. P. 1270–1283.
23. **Joseph D. D., Nield D. A., Papanicolaou G.** Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium // *Water Resources Res.* 1982. V. 18. P. 1049–1052.

24. **Dalen K. V.** Multi-component acoustic characterization of porous media: Springer Thesis. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
25. **Al-Hadhrami A. K., Elliott L., Ingham D. B.** A new model for viscous dissipation in a porous media across a range of permeability values // *Transport Porous Media*. 2003. V. 53. P. 117–122.
26. **Makinde O. D.** Thermal stability of a reactive viscous flow through a porous-saturated channel with convective boundary conditions // *Appl. Thermal Engng.* 2009. V. 29. P. 1773–1777.
27. **Kobo N. S., Makinde O. D.** Second law analysis for a variable viscosity reactive Couette flow under Arrhenius kinetics // *Math. Probl. Engng.* 2010. V. 2010. 278104.
28. **Srivastava L. M., Srivastava V. P.** Peristaltic transport of a power law fluid: Applications to the ductus efferentes of the reproductive tract // *Rheol. Acta*. 1988. V. 27. P. 428–433.
29. **Lew H. S., Fung Y. C., Lowenstein C. B.** Peristaltic carrying and mixing of chyme // *J. Biomech.* 1971. V. 4. P. 297–315.
30. **Eytan O., Elad D.** Analysis of intra-uterine fluid motion induced by uterine contractions // *Bull. Math. Biol.* 1999. V. 61. P. 221–238.
31. **Strohmer H., Obruca A., Rander K. M., Feichtinger W.** Relationship of the individual uterine size and the endometrial thickness in stimulated cycles // *Fertil. Steril.* 1994. V. 61. P. 972–975.
32. **Nayfeh A. H.** Problems in perturbation. N. Y.: J. Wiley and Sons, 1985.

*Поступила в редакцию 17/VI 2013 г.,  
в окончательном варианте — 19/XI 2013 г.*

---