

УДК 539.376

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО НАГРУЖЕНИЯ

Л. В. Степанова, Е. М. Адылина

Самарский государственный университет, 443011 Самара, Россия

E-mails: stepanova@sam-su.ru, adylinaem@sam-su.ru

Предложен метод вычисления собственных значений класса нелинейных задач на собственные значения, следующих из задач определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в материалах, свойства которых описываются степенными определяющими уравнениями, во всем диапазоне смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига. С помощью предлагаемого подхода найдены собственные значения задачи, отличающиеся от известного собственного значения, соответствующего решению Хатчинсона — Райса — Розенгрена. Полученная асимптотика поля напряжений представляет собой автомодельное промежуточное асимптотическое решение задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного нагружения. С использованием новой асимптотики поля напряжений путем введения автомодельной переменной получено асимптотическое решение задачи о трещине в среде с поврежденностью и построены области диспергированного материала вблизи трещины.

Ключевые слова: смешанное деформирование, автомодельное представление решения, автомодельность второго рода, промежуточная асимптотика.

Введение. Как известно, элементы реальных конструкций подвержены действию различных механических нагрузок (в современном оборудовании крайне редко реализуется линейное одноосное напряженное состояние) и эксплуатируются в условиях сложного напряженного состояния при наличии дефектов, ориентированных в различных направлениях [1–3]. В инженерной практике несовпадение направлений внешней нагрузки и нормали к трещине является скорее правилом, чем исключением, поэтому задачи смешанного деформирования образцов с трещинами и дефектами являются предметом исследования современной нелинейной механики разрушения [3–5]. Особый интерес представляет изучение задач о наклонных трещинах и трещинах, находящихся под действием одновременно приложенных нормального растягивающего напряжения и поперечного сдвига.

В механике разрушения выделяются три вида трещин, соответствующие трем типам нагружения: 1) трещины нормального отрыва; 2) трещины поперечного сдвига; 3) трещины продольного (антиплоского) сдвига [1, 2]. Суперпозиция решений задач о распределении напряжений в окрестности вершины трещины, полученных для трех типов нагружения, представляет собой решение, справедливое вблизи вершины трещины, в случае произволь-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-08-00390).

ного нагружения тела с дефектом:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta).$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины; K_I, K_{II}, K_{III} — коэффициенты интенсивности напряжений для трещин нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига соответственно; $f_{ij}^k(\theta)$ — функции, зависящие от полярного угла и определяемые при решении краевой задачи для соответствующего типа нагружения (отрыв или сдвиг) [1].

Указанные типы нагружения элемента конструкции с трещинами в линейно-упругих и идеально пластических материалах изучены достаточно хорошо [6, 7]. Однако распределение напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины дефекта в условиях смешанного нагружения трещины в нелинейных материалах (материалах, упрочняющихся по степенному закону, и материалах, свойства которых описываются степенным законом Нортон теория установившейся ползучести) изучено недостаточно. По-видимому, в литературе отсутствуют результаты исследования влияния накопления рассеянных повреждений на направление развития трещин в условиях смешанного нагружения. Существуют различные критерии определения направления развития трещины, например локальные критерии, основанные на асимптотическом распределении напряжений в окрестности вершины трещины или острого надреза. Поэтому асимптотическое исследование полей вблизи вершины в условиях смешанного нагружения трещины представляет собой важную задачу современной нелинейной механики разрушения, которая активно изучается российскими и зарубежными исследователями [4–7].

Впервые смешанные формы деформирования рассмотрены в работе [8] при изучении полей напряжений и деформаций вблизи вершины трещины, находящейся под действием растягивающей и сдвиговой нагрузок (смешанное нагружение, соответствующее трещинам типов I и II). В [8] также введен параметр смешанного нагружения M^P , определяемый равенством

$$M^P = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, 0)}{\sigma_{r\theta}(r, 0)} \right|. \quad (1)$$

В случае чистого поперечного сдвига параметр смешанного нагружения принимает значение $M^P = 0$, в случае нормального отрыва — $M^P = 1$, для всех промежуточных типов приложенной нагрузки $0 < M^P < 1$. В [8] приведены распределения напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины в материале, свойства которого описываются степенным законом деформационной теории пластичности, при различных значениях параметра смешанного нагружения в условиях плоской деформации. Систематические расчеты угловых распределений напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины в указанном материале при различных значениях параметра смешанного нагружения приведены в работе [4], в которой разработан метод и представлены результаты расчетов упругопластических коэффициентов интенсивности напряжений для всех смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига. Это позволило рассмотреть состояние произвольно ориентированной прямолинейной трещины в виде математического разреза при двухосном нагружении различной интенсивности. На основе выполненных расчетов определен характер влияния типа смешанных форм нагружения и пластических свойств материала, описываемых показателем деформационного упрочнения, на распределение напряжений. В [9] приведены известные результаты, полученные для смешанных форм деформирования.

В настоящей работе предложен численный метод определения всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из задачи опреде-

ления напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования материала, свойства которого описываются степенными определяющими уравнениями (степенным законом деформационной теории пластичности и степенным законом установившейся ползучести). Предлагаемый метод применяется для построения промежуточного асимптотического автомодельного представления поля напряжений в связанной задаче о трещине в условиях смешанного нагружения в материале, свойства которого описываются степенными определяющими уравнениями теории установившейся ползучести, с учетом его ползучести и поврежденности. Следует отметить, что необходимость исследования нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, обусловлена использованием их в многомасштабных, многоуровневых моделях, в которых рассматривается совокупность областей в окрестности вершины трещины с различными асимптотиками поля напряжений $\sigma_{ij} \sim r^s$ и выполняется процедура асимптотического сращивания получаемых решений. Для корректного построения всех промежуточных зон с той или иной асимптотикой и выполнения процедуры сращивания нужно получить весь спектр собственных значений. Однако задачи определения всего спектра собственных значений до сих пор не решены. Известны только две математически полностью реализованные процедуры сращивания: классическое решение Райса для трещины антиплоского сдвига [10] и аналитическое решение задачи о трещине конечной длины в бесконечной пластине [11]. Определение всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения позволит описать структуру материала в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования и построить область полностью поврежденного материала, окружающую вершину трещины.

1. Математическая постановка задачи и основные уравнения. Для определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в двумерной постановке задачи в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины необходимо решить уравнения равновесия

$$r\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta,\theta} + r\sigma_{r\theta,r} + 2\sigma_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

с условиями совместности деформаций

$$2(r\varepsilon_{r\theta,\theta})_{,r} = \varepsilon_{rr,\theta\theta} - r\varepsilon_{rr,r} + r(r\varepsilon_{\theta\theta})_{,rr} \quad (3)$$

и определяющие уравнения, задающие степенную связь между деформациями и напряжениями: $\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$ (B , n — материальные константы, определяемые экспериментально; s_{ij} — компоненты тензора девиатора напряжений). В случае плоского деформированного состояния определяющие уравнения принимают форму

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/4, \quad \varepsilon_{r\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}/2,$$

где $\sigma_e = \sqrt{3}[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2}/2$ — интенсивность напряжений. Граничные условия задачи представляют собой условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \pm\pi) = 0. \quad (4)$$

2. Асимптотическое решение задачи. Одним из наиболее распространенных методов определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод разложения по собственным функциям, в соответствии с которым асимптотическое представление функции напряжений Эри $\chi(r, \theta)$ при $r \rightarrow 0$ записывается в форме

$$\chi(r, \theta) = Kr^{\lambda+1}f(\theta), \quad (5)$$

при этом компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta} = Kr^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda f(\theta), \quad \sigma_{rr} = Kr^{\lambda-1}[(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)], \quad \sigma_{r\theta} = -Kr^{\lambda-1}\lambda f'(\theta).$$

Асимптотическое представление интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины запишем в форме $\sigma_e(r, \theta) = Kr^{\lambda-1}f_e(\theta)$, где $f_e^2 = [f'' + (1 - \lambda^2)f]^2 + 4\lambda^2 f'^2$. Тогда компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = -\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = K^n Br^{(\lambda-1)n} \varepsilon_{rr}^{(0)}(\theta), \quad \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = K^n Br^{(\lambda-1)n} \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta), \quad (6)$$

где $\varepsilon_{rr}^{(0)}(\theta) = 3f_e^{n-1}[f'' + (1 - \lambda^2)f]/4$; $\varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) = -3f_e^{n-1}\lambda f'(\theta)/2$.

Подставляя выражения (6) для компонент тензора деформаций в условие совместности (3), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$

$$2[(\lambda-1)n+1]\varepsilon_{r\theta, \theta}^{(0)} = \varepsilon_{rr, \theta\theta}^{(0)} - (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]\varepsilon_{rr}^{(0)}, \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{IV} \{ (n-1)[(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \} + \\ & + (n-1)(n-3) \{ [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + (n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f'' + 4\lambda^2(f''^2 + f' f''')] \} [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + 2(n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & + C_1(n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \} f' + \\ & + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2) f'' = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где $C_1 = 4\lambda[(\lambda-1)n+1]$; $C_2 = (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]$.

Решение уравнения (8) должно удовлетворять краевым условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины (4):

$$f(\pm\pi) = 0, \quad f'(\pm\pi) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, сформулирована следующая нелинейная задача на собственные значения: необходимо найти собственные значения λ , соответствующие нетривиальным решениям уравнения (8), удовлетворяющим краевым условиям (9). При исследовании трещин нормального отрыва и поперечного сдвига для получения численного решения уравнения (8) используются условия симметрии или антисимметрии. С учетом этих условий уравнение (8) интегрируется на отрезке $[0, \pi]$ со следующими начальными условиями:

— для трещины нормального отрыва

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = A_2, \quad f'''(0) = 0; \quad (10)$$

— для трещины поперечного сдвига

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = A_3 \quad (11)$$

(A_2, A_3 — постоянные, определяемые в ходе численного интегрирования уравнения (8) с помощью метода пристрелки из условий при $\theta = \pi$). Таким образом, двухточечная краевая задача (8), (9) заменяется начальной задачей (8), (10) или (8), (11), неизвестные постоянные A_2, A_3 определяются в процессе численного анализа. Одно собственное значение сформулированной задачи известно и соответствует классической задаче Хатчинсона — Райса — Розенгрена [12, 13]: $\lambda = n/(n+1)$. Однако в настоящее время при разработке многоуровневых моделей разрушения и построения областей, окружающих вершину трещины, представляет интерес определение других собственных значений, отличающихся от

собственных чисел, соответствующих задаче Хатчинсона — Райса — Розенгрена [14, 15]. Для вычисления всего спектра собственных значений можно использовать один из методов Рунге — Кутты и метод пристрелки. В этом случае необходимо подобрать две величины: собственное значение λ и значение производной второго порядка $f''(0) = A_2$ для трещины нормального отрыва или производной третьего порядка $f'''(0) = A_3$ для трещины поперечного сдвига, так чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины (при $\theta = \pi$). Описанный подход использовался в работах [14, 15], в которых найдены собственные значения, отличающиеся от собственных значений $\lambda = n/(n+1)$ для трещин типов I и II.

3. Численное решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряжений вблизи вершины трещины, в условиях смешанного деформирования. Поскольку в случае смешанного деформирования условия симметрии и антисимметрии не могут быть использованы, необходимо искать решение уравнения (8) на отрезке $[-\pi, \pi]$, который можно разбить на два отрезка: $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Сначала уравнение (8) интегрируется на отрезке $[0, \pi]$, при этом двухточечная краевая задача сводится к задаче Коши с начальными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -(\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), \quad f''(0) = A_2, \quad f'''(0) = A_3. \quad (12)$$

Значение производной первого порядка находится с учетом типа смешанного нагружения (значение параметра смешанного нагружения (1), задающего тип нагружения, известно). Неизвестные постоянные A_2 и A_3 определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины:

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = 0. \quad (13)$$

Затем уравнение (8) интегрируется на отрезке $[-\pi, 0]$. При этом двухточечная краевая задача для уравнения (8) с условиями

$$f(-\pi) = 0, \quad f'(-\pi) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = -(\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2) \quad (14)$$

заменяется задачей Коши с начальными условиями

$$f(-\pi) = 0, \quad f'(-\pi) = 0, \quad f''(-\pi) = B_2, \quad f'''(-\pi) = B_3. \quad (15)$$

Неизвестные постоянные B_2 и B_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче $\theta = 0$. Уравнения равновесия данного элемента справедливы, если непрерывны компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на луче $\theta = 0$, а следовательно, и функции $f(\theta)$ и $f'(\theta)$ при $\theta = 0$, т. е. выполняются краевые условия (14). Поэтому неизвестные постоянные B_2 и B_3 определяются таким образом, чтобы решение на отрезке $[-\pi, 0]$ удовлетворяло краевым условиям при $\theta = 0$. Угловые распределения компонент тензора напряжений, найденные в результате применения описанного подхода для различных значений показателя упрочнения, приведены в [4, 8]. При построении численного решения и угловых распределений напряжений в [4, 8] априори предполагалось, что $\lambda = n/(n+1)$, т. е. собственное значение известно и совпадает с собственным значением в задаче Хатчинсона — Райса — Розенгрена.

Если нужно найти другие собственные значения задачи, отличающиеся от $\lambda = n/(n+1)$, или весь спектр собственных значений, то необходимо использовать дополнительные физические или математические условия. Если считать, что λ — искомая величина, то при интегрировании уравнения (8) имеется три неизвестных параметра (λ , A_2 и A_3) и только два условия (13), из которых они могут быть определены. Очевидно, что для вычисления собственного значения λ необходимо использовать дополнительное условие. Для определения всего спектра собственных значений λ можно проанализировать поведение радиальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, \theta)$ [4, 8]. Результаты

Таблица 1

Собственные значения при $n = 2$ и различных значениях параметра смешанного нагружения

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,05	-0,277 383	0,212 914	13,172 900	11,123 80	-5,005 940
0,10	-0,275 935	0,162 144	5,700 720	5,918 65	-2,618 340
0,20	-0,272 740	0,051 311	2,229 110	3,304 80	-1,423 600
0,30	-0,271 672	-0,031 622	1,164 410	2,431 93	-1,030 650
0,40	-0,274 875	-0,081 945	0,633 297	2,006 17	-0,846 276
0,50	-0,282 565	-0,097 775	0,293 679	1,753 26	-0,743 140
0,60	-0,290 857	-0,074 799	0,044 030	1,562 52	-0,663 002
0,70	-0,302 004	-0,028 899	-0,168 206	1,418 90	-0,602 043
0,80	-0,306 883	-0,016 024	-0,338 521	1,264 16	-0,527 263
0,90	-0,309 309	-0,010 655	-0,492 138	1,110 00	-0,447 280
0,95	-0,309 875	-0,009 488	-0,566 444	1,031 79	-0,404 607

Таблица 2

Собственные значения при $n = 3$ и различных значениях параметра смешанного нагружения

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,05	-0,262 025 9	1,715 020	9,241 630	14,337 000	-10,959 200
0,10	-0,250 783 0	1,208 650	3,922 910	7,771 991	-5,880 720
0,20	-0,235 040 9	0,689 215	1,490 620	4,425 133	-3,300 030
0,30	-0,227 669 0	0,427 800	0,694 287	3,291 540	-2,437 720
0,40	-0,222 675 9	0,283 135	0,270 648	2,720 220	-2,012 810
0,50	-0,230 512 5	0,221 522	-0,026 934	2,363 551	-1,754 966
0,60	-0,224 064 0	0,242 293	-0,295 340	2,142 481	-1,605 673
0,70	-0,248 870 0	0,237 327	-0,499 586	1,933 300	-1,459 421
0,80	-0,256 052 0	0,231 799	-0,676 516	1,736 700	-1,319 388
0,90	-0,260 520 0	0,229 168	-0,840 622	1,547 066	-1,179 299
0,95	-0,261 580 0	0,228 567	-0,920 801	1,452 840	-1,107 937

анализа показывают, что эта компонента является непрерывной функцией полярного угла при всех значениях параметра смешанного нагружения и показателя упрочнения материала, хотя при построении решения условие непрерывности этой компоненты не задавалось (т. е. до начала построения численного решения было выбрано значение $\lambda = n/(n + 1)$ и поэтому компонента $\sigma_{rr}(r, \theta)$ оказалась непрерывной для всех значений параметра смешанного нагружения и показателя нелинейности материала). Таким образом, при вычислении собственных значений, отличающихся от собственных чисел задачи Хатчинсона — Райса — Розенгрена, следует потребовать, чтобы при $\theta = 0$ радиальная компонента тензора напряжений была непрерывной.

В табл. 1–4 приведены значения λ и $f''(0)$, $f'''(0)$, $f''(-\pi)$, $f'''(-\pi)$, полученные при различных значениях параметра смешанного нагружения и показателя нелинейности материала n . Угловые распределения компонент тензора напряжений (построенные с помощью собственной функции, соответствующей полученному собственному значению λ) и деформаций ползучести для вычисленных собственных значений при различных значениях параметра смешанного нагружения представлены на рис. 1.

В случае если параметр смешанного нагружения равен нулю (случай чистого сдвига), найденные собственные значения совпадают с собственными значениями, приведенными в [15], что подтверждает достоверность полученных результатов. Для всех промежуточных форм деформирования найдены новые собственные значения (см. табл. 1–4).

Таблица 3

Собственные значения при $n = 4$ и различных значениях параметра смешанного нагружения

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,05	-0,249 125	2,587 723	7,980 687 0	16,155 590 0	-14,4980
0,10	-0,233 549	1,719 647	3,371 281 0	8,739 529 3	-7,7396
0,20	-0,215 000	0,978 250	1,178 846 7	5,002 886 9	-4,3600
0,30	-0,206 711	0,635 351	0,454 702 8	3,687 031 1	-3,1900
0,40	-0,204 499	0,450 211	0,065 261 9	3,064 554 3	-2,6462
0,50	-0,206 815	0,376 605	-0,226 999 0	2,655 462 0	-2,2977
0,60	-0,214 375	0,381 905	-0,496 003 0	2,395 667 0	-2,0866
0,70	-0,220 462	0,359 169	-0,693 196 9	2,149 751 2	-1,8824
0,80	-0,227 500	0,341 902	-0,868 176 9	1,928 233 3	-1,6987
0,90	-0,234 528	0,335 559	-1,038 674 0	1,723 020 7	-1,5271
0,95	-0,236 000	0,333 577	-1,121 558 0	1,617 435 1	-1,4353

Таблица 4

Собственные значения при $n = 5$ и различных значениях параметра смешанного нагружения

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,05	-0,237 872	3,080 269	7,474 145	17,168 290	-16,591 01
0,10	-0,221 158	2,007 918	3,081 809	9,286 569	-8,848 90
0,20	-0,202 342	1,142 387	0,988 910	5,316 140	-4,985 11
0,30	-0,194 812	0,753 230	0,302 029	3,972 174	-3,700 51
0,40	-0,192 320	0,546 480	-0,068 735	3,263 461	-3,033 92
0,50	-0,194 290	0,472 467	-0,364 145	2,830 609	-2,636 12
0,60	-0,200 055	0,463 181	-0,626 727	2,539 084	-2,375 34
0,70	-0,204 759	0,430 847	-0,818 362	2,269 456	-2,132 55
0,80	-0,210 625	0,405 497	-0,988 799	2,029 076	-1,916 25
0,90	-0,218 248	0,394 459	-1,159 518	1,811 569	-1,721 95
0,95	-0,221 500	0,394 789	-1,248 002	1,707 946	-1,627 92

4. Автомодельное решение задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования. Промежуточная автомодельная асимптотика. В данном пункте найденная асимптотика поля напряжений используется при решении задачи о стационарной трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного нагружения, строится автомодельное промежуточное асимптотическое решение задачи о трещине в связанной постановке с учетом ползучести и поврежденности материала. Определяющие уравнения строятся на основе степенного закона ползучести с использованием эффективного (истинного) напряжения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (3/2)B(\sigma_e/\psi)^{n-1}s_{ij}/\psi. \quad (16)$$

Здесь ψ — параметр сплошности, эволюционирующий в соответствии со степенным законом накопления повреждений Качанова — Работнова:

$$\dot{\psi} = -A(\sigma_e/\psi)^m, \quad (17)$$

A , m — материальные константы, определяемые в эксперименте. Особенностью задач о трещинах в связанной постановке с учетом ползучести и поврежденности материала является существование в окрестности вершины трещины области полностью поврежденного (диспергированного, разрыхленного) материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. На некотором расстоянии от зоны накопления повреждений параметр сплошности стремится к единице, что соответствует

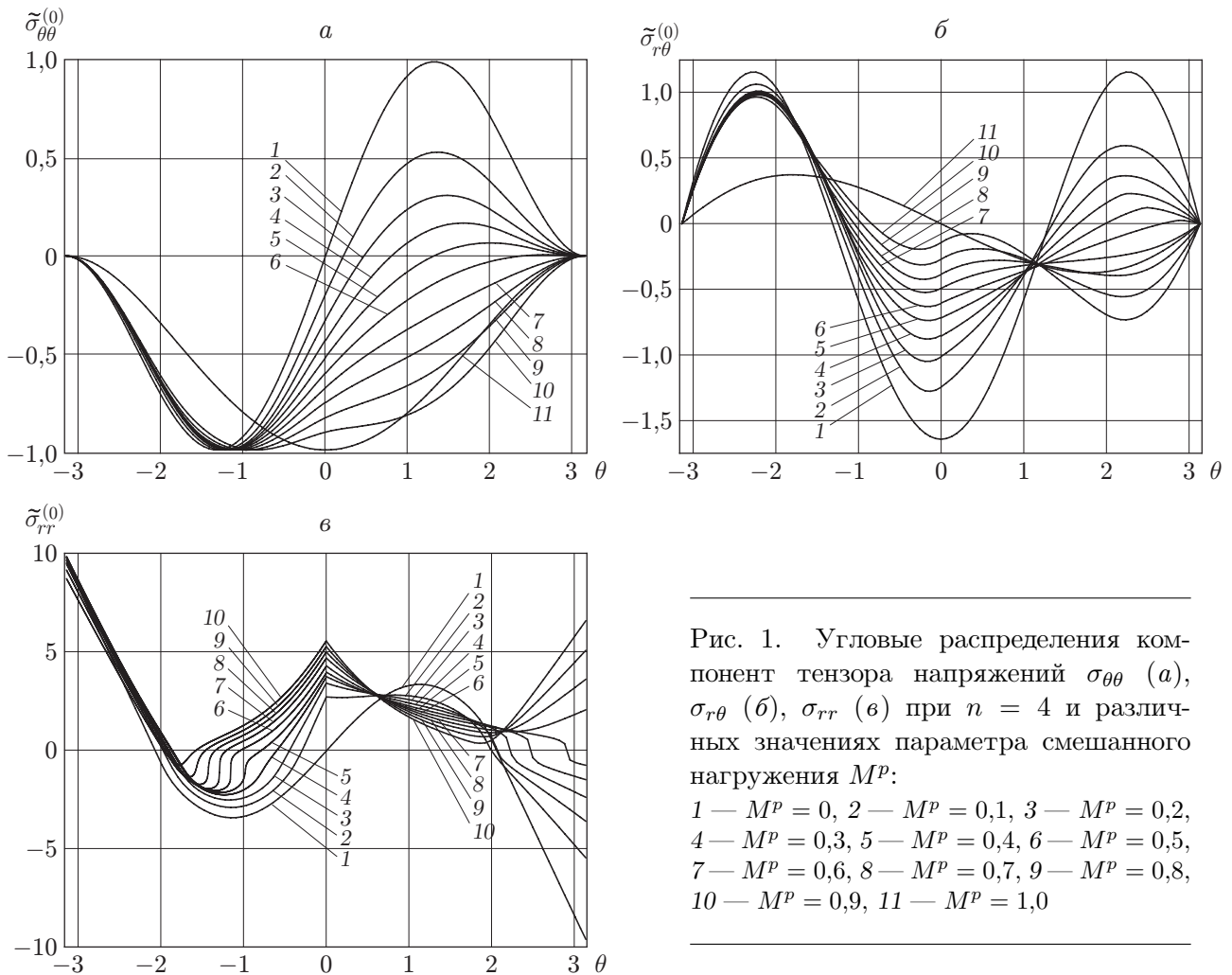


Рис. 1. Угловые распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (а), $\sigma_{r\theta}$ (б), σ_{rr} (в) при $n = 4$ и различных значениях параметра смешанного нагружения M^p :

1 — $M^p = 0$, 2 — $M^p = 0,1$, 3 — $M^p = 0,2$,
 4 — $M^p = 0,3$, 5 — $M^p = 0,4$, 6 — $M^p = 0,5$,
 7 — $M^p = 0,6$, 8 — $M^p = 0,7$, 9 — $M^p = 0,8$,
 10 — $M^p = 0,9$, 11 — $M^p = 1,0$

неповрежденному материалу. Поэтому асимптотическое граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена для степенных определяющих уравнений (16), где $\psi \equiv 1$ (таким образом, рассматривается окрестность вершины трещины). В соответствии с гипотезой о маломасштабной поврежденности на больших расстояниях от вершины трещины (больших по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но очень малых по сравнению с длиной трещины и характерным линейным размером образца) поле напряжений определяется решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена (решением аналогичной задачи без учета накопления повреждений):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(r, \theta, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (18)$$

(C^* — инвариантный интеграл в теории установившейся ползучести; I_n — безразмерный C^* -интеграл). Начальное условие при $t = 0$ и граничное условие в бесконечно удаленной точке (18) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi \equiv 1$. Анализ размерности величин, входящих в уравнения (16)–(18), позволяет установить, что для определяющих соотношений (16), кинетического уравнения (17), начальных и граничных условий (18) существует автомодельная переменная $R = r(At)^{-(n+1)/m} BI_n / C^*$ и

система уравнений задачи допускает автомодельное представление решения $\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta)$, $\psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta)$.

Следует отметить, что граничное условие в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано в более общей по сравнению с (18) форме

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(r, \theta, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (19)$$

где показатель степени s определяется в ходе решения задачи; \tilde{C} — амплитуда поля напряжений на бесконечности, определяемая геометрией реального образца и приложенными нагрузками. Для степенных определяющих соотношений (16), кинетического уравнения (17) и более общих граничных условий (19) существует автомодельная переменная $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/(sm)}$ (автомодельные решения, основанные на введении автомодельных переменных, степени которых должны быть определены в ходе решения задачи, являются автомодельными решениями второго рода). После введения автомодельной переменной уравнения равновесия (2), определяющие уравнения (16), условие совместности (3) сохраняют свою форму, а кинетическое уравнение накопления повреждений принимает вид $R\hat{\psi}_{,R} = -sm(\hat{\sigma}_e/\hat{\psi})^m$ (далее индекс “ \wedge ”, которым отмечены безразмерные величины, опускается).

Асимптотическое решение задачи вне области диспергированного материала, формирующейся вблизи вершины трещины (на больших расстояниях от вершины трещины $R \rightarrow \infty$), записывается в виде

$$\begin{aligned} \chi(R, \theta) &= R^{\lambda+1} f_0(\theta) + R^{\lambda_1+1} f_1(\theta) + R^{\lambda_2+1} f_2(\theta) + R^{\lambda_3+1} f_3(\theta) + R^{\lambda_4+1} f_4(\theta) + o(R^{\lambda_4+1}), \\ \psi(R, \theta) &= 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) - R^{\gamma_3} g_3(\theta) - R^{\gamma_4} g_4(\theta) + o(R^{\gamma_4}), \end{aligned} \quad (20)$$

где величины λ , λ_k , γ , γ_k , $f_k(\theta)$, $g_k(\theta)$ определяются в ходе решения задачи. В силу (20) асимптотическое представление компонент тензора напряжений вне области диспергированного материала имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(R, \theta) &= R^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda f_0 + R^{\lambda_1-1}(\lambda_1+1)\lambda_1 f_1 + R^{\lambda_2-1}(\lambda_2+1)\lambda_2 f_2 + \\ &\quad + R^{\lambda_3-1}(\lambda_3+1)\lambda_3 f_3 + R^{\lambda_4-1}(\lambda_4+1)\lambda_4 f_4 + \dots, \\ \sigma_{R\theta}(R, \theta) &= -R^{\lambda-1}\lambda f'_0 - R^{\lambda_1-1}\lambda_1 f'_1 - R^{\lambda_2-1}\lambda_2 f'_2 - R^{\lambda_3-1}\lambda_3 f'_3 - R^{\lambda_4-1}\lambda_4 f'_4 - \dots, \\ \sigma_{RR}(R, \theta) &= R^{\lambda-1}[(\lambda+1)f_0 + f''_0] + R^{\lambda_1-1}[(\lambda_1+1)f_1 + f''_1] + \\ &\quad + R^{\lambda_2-1}[(\lambda_2+1)f_2 + f''_2] + R^{\lambda_3-1}[(\lambda_3+1)f_3 + f''_3] + R^{\lambda_4-1}[(\lambda_4+1)f_4 + f''_4] + \dots \end{aligned}$$

Асимптотический анализ уравнений задачи позволяет установить справедливость равенств $\lambda_k - \lambda = k(\lambda_1 - \lambda)$ для всех k . При этом асимптотическое представление интенсивности касательных напряжений принимает форму

$$\sigma_e = R^{\lambda-1} \sigma_e^{(0)}(\theta) [1 + R^{\lambda_1-\lambda} \sigma_e^{(1)}(\theta) + R^{2(\lambda_1-\lambda)} \sigma_e^{(2)}(\theta) + R^{3(\lambda_1-\lambda)} \sigma_e^{(3)}(\theta) + R^{4(\lambda_1-\lambda)} \sigma_e^{(4)}(\theta)] + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_e^{(0)} &= \sqrt{[(1-\lambda^2)f_0 + f''_0]^2 + 4\lambda^2(f'_0)^2}, \\ \sigma_e^{(1)} &= f_e^{(1)}/(\sigma_e^{(0)})^2, \quad f_e^{(1)} = [(1-\lambda^2)f_0 + f''_0][(1-\lambda_1^2)f_1 + f''_1] + 4\lambda\lambda_1 f'_0 f'_1, \\ \sigma_e^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_e^{(2)} &= [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1'']^2 + 2[(1 - \lambda^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + 4\lambda_1^2 f_1^2 + 8\lambda\lambda_2 f_1' f_2', \\
\sigma_e^{(3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_e^{(3)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \frac{f_e^{(1)} f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^4} + \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^3 \right], \\
f_e^{(3)} &= 2[(1 - \lambda^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''] + 2[(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''][(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + \\
&\quad + 8\lambda\lambda_3 f_0' f_3' + 8\lambda_1\lambda_2 f_1' f_2', \\
\sigma_e^{(4)} &= \frac{1}{8} \left[-5 \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^4 + 6 \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 \frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \left(\frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 - 4 \frac{f_e^{(1)} f_e^{(3)}}{(\sigma_e^{(0)})^4} + 4 \frac{f_e^{(4)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right], \\
f_e^{(4)} &= [(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2'']^2 + 2[(1 - \lambda^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_4^2)f_4 + f_4''] + \\
&\quad + 2[(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''][(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''] + 4\lambda_2^2 (f_2')^2 + 8\lambda\lambda_4 f_0' f_4' + 8\lambda_1\lambda_3 f_1' f_3'.
\end{aligned}$$

Кинетическое уравнение накопления повреждений и гипотеза о том, что порядки малости слагаемых, последовательно появляющихся в правой и левой частях этого уравнения, равны, позволяют установить связь между показателями степеней в асимптотических разложениях функции напряжений Эри и в уравнениях (20): $\gamma = (\lambda - 1)m$, $\gamma_k = (\lambda - 1)m + k(\lambda_1 - \lambda)$. Результаты анализа асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести показывают, что $\lambda_1 - \lambda = \gamma = (\lambda - 1)m$. Из полученного уравнения можно найти $\gamma_k = k(\lambda - 1)m$ и следующие асимптотические представления компонент тензора скоростей деформаций ползучести вне области полностью поврежденного (диспергированного) материала:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{RR}(R, \theta) &= R^{(\lambda-1)n} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda-1)(n+m)} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda-1)(n+2m)} \varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) + \\
&\quad + R^{(\lambda-1)(n+3m)} \varepsilon_{RR}^{(3)}(\theta) + R^{(\lambda-1)(n+4m)} \varepsilon_{RR}^{(4)}(\theta) + \dots, \\
\dot{\varepsilon}_{R\theta}(R, \theta) &= R^{(\lambda-1)n} \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda-1)(n+m)} \varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda-1)(n+2m)} \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) + \\
&\quad + R^{(\lambda-1)(n+3m)} \varepsilon_{R\theta}^{(3)}(\theta) + R^{(\lambda-1)(n+4m)} \varepsilon_{R\theta}^{(4)}(\theta) + \dots
\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta)$, $\varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta)$ — угловые распределения главного члена асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций ползучести:

$$\varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) = (\sigma_e^{(0)})^{n-1} [(1 - \lambda^2)f_0 + f_0''], \quad \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) = -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \lambda f_0',$$

$\varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta)$, $\varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta)$ — коэффициенты первого слагаемого в асимптотическом разложении компонент тензора скоростей деформаций ползучести:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{ [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] + [(1 - \lambda^2)f_0 + f_0''] [(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] \}, \\
\varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) &= -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \{ \lambda_1 f_1' + \lambda f_0' [(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] \},
\end{aligned}$$

$\varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta)$, $\varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta)$ — коэффициенты второго слагаемого в асимптотическом разложении компонент тензора скоростей деформаций ползучести:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left[[(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] [(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] + \right. \\
&\quad \left. + [(1 - \lambda^2)f_0 + f_0''] \left(\frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) = & -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left[\lambda_2 f_2' + \lambda_1 f_1' [(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \right. \\ & \left. + \lambda f_0' \left(\frac{n-1}{2} [(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2} [(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right) \right]. \end{aligned}$$

Коэффициенты третьего и четвертого слагаемых в асимптотическом разложении компонент тензора скоростей деформаций не приводятся вследствие их громоздкости.

Из условия совместности деформаций можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения угловых распределений компонент тензора напряжений. Для нахождения функции $f_0(\theta)$ используется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, совпадающее с уравнением (7):

$$2[(\lambda-1)n+1]\varepsilon_{R\theta,\theta}^{(0)} = \varepsilon_{RR,\theta\theta}^{(0)} - (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]\varepsilon_{RR}^{(0)}. \quad (21)$$

Для функций $f_k(\theta)$ ($k \geq 1$) из условия совместности (3) получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2[(\lambda-1)(n+km)+1] \frac{d\varepsilon_{R\theta}^{(k)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{RR}^{(k)}}{d\theta^2} - (\lambda-1)(n+km)[(\lambda-1)(n+km)+2]\varepsilon_{RR}^{(k)}. \quad (22)$$

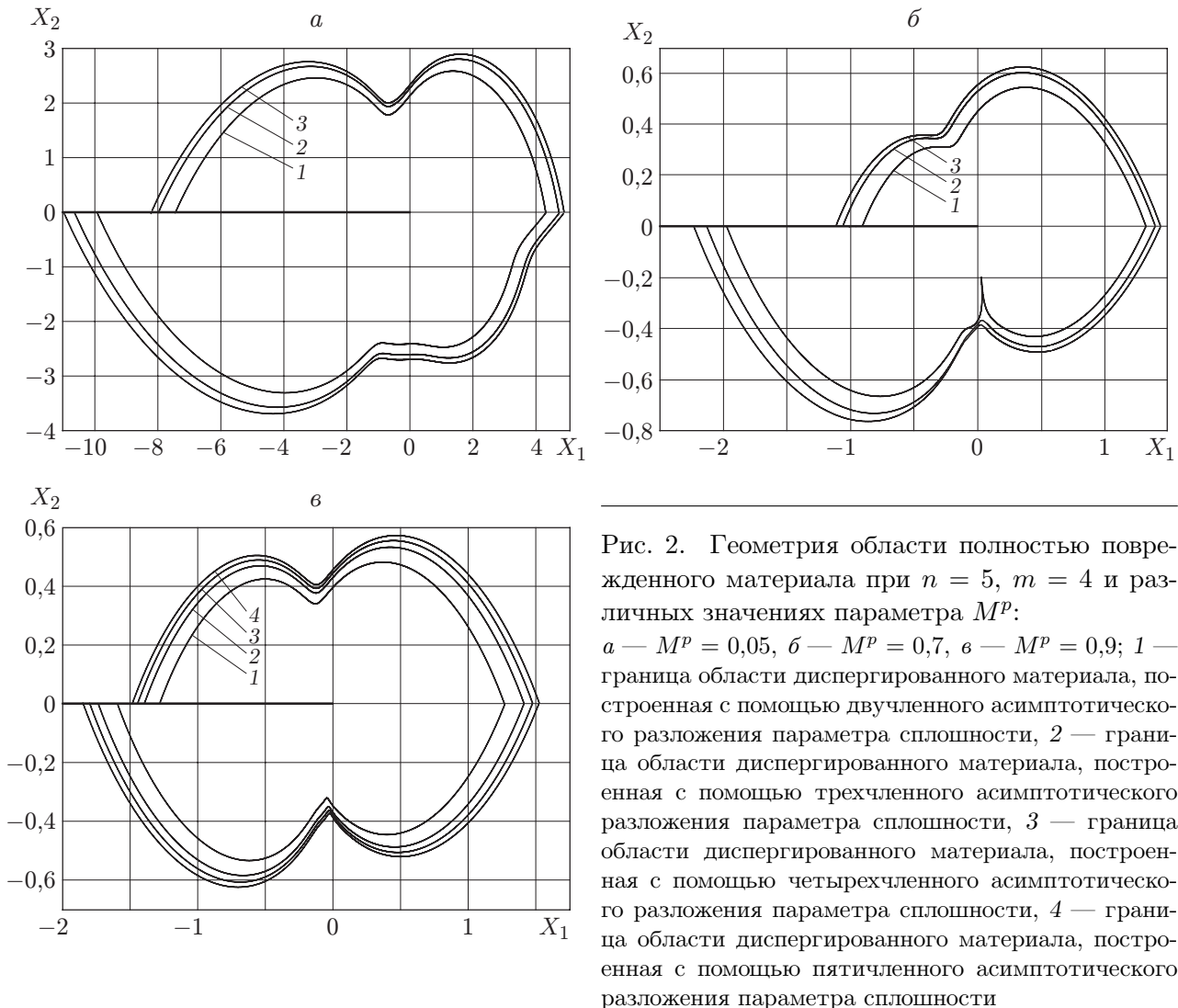
Решение системы уравнений (21), (22) должно удовлетворять граничным условиям $f_k(\pm\pi) = 0$ и $f_k'(\pm\pi) = 0$. Численное решение системы уравнений (21), (22) на отрезке $[-\pi, \pi]$ определялось с помощью описанного выше алгоритма и пакета программ Mathematica V. 5.1. После нахождения численного решения системы уравнений (21), (22) можно определить границу области диспергированного материала в окрестности вершины трещины с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) = 0, \quad \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) = 0, \\ \psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} g_0(\theta) = (\sigma_e^{(0)})^m, \quad g_1(\theta) = m(\sigma_e^{(0)})^m(\sigma_e^{(1)} + g_0)/2, \\ g_2(\theta) = m(\sigma_e^{(0)})^m[\sigma_e^{(2)} + (m-1)(\sigma_e^{(1)})^2/2 + (m+1)g_0^2/2 + g_1]/3. \end{aligned}$$

Аналогично из кинетического уравнения $R\psi_{,R} = -sm(\sigma_e/\psi)^m$ находятся остальные коэффициенты асимптотического разложения параметра сплошности. Краевая задача для уравнения (21) вместе с условиями отсутствия поверхностных усилий сводится к рассмотренной выше нелинейной задаче на собственные значения. Оказалось, что если в качестве условия в бесконечно удаленной точке принять условие асимптотического сближения полученного решения с решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена и предположить, что вне области накопления повреждений решение выходит на асимптотику Хатчинсона — Райса — Розенгрена, то границы области диспергированного материала, построенные с помощью дву- и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности, будут значительно различаться по форме и размерам. Это свидетельствует о том, что разложения (20) не являются асимптотическими, поскольку каждое следующее слагаемое в асимптотическом разложении должно быть малой поправкой к предыдущему. Более того, при построении границы области диспергированного материала с помощью трехчленного асимптотического разложения параметра сплошности (23), где параметры $\gamma = (\lambda-1)m$, $\lambda = n/(n+1)$ соответствуют решению Хатчинсона — Райса — Розенгрена, не удается найти корни уравнения (23), соответствующие области допустимых значений автомобильной переменной R . Однако в предположении, что в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования имеется область с промежуточной асимптотикой



поля напряжений (в которой собственные значения отличаются от собственных значений задачи Хатчинсона — Райса — Розенгрена и приведены в табл. 1–4), асимптотические разложения (20) определяют границы области диспергированного материала, сходящиеся к предельному контуру. Поэтому асимптотическое решение (20) можно рассматривать как автомодельное предельное решение задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного нагружения для всех типов смешанного деформирования от чистого сдвига до нормального отрыва. Формы областей полностью поврежденного материала для полученной асимптотики показаны на рис. 2 ($k = 1, 2, 3, 4$ — граница области диспергированного материала, построенная с помощью $(k+1)$ -членного асимптотического разложения параметра сплошности). Из рис. 2 следует, что граница области полностью поврежденного материала, построенная с помощью $(k+1)$ -членного асимптотического разложения параметра сплошности, близка к границе области полностью поврежденного материала, найденной с помощью k -членного разложения параметра сплошности. Это свидетельствует о том, что разложения (20) являются асимптотическими. На рис. 2 видно, что граница области полностью поврежденного материала быстро сходится к предельному контуру, поэтому отсутствует необходимость построения следующих приближений.

Заключение. В работе предложена процедура вычисления всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из задачи определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в материале, свойства которого описываются степенными определяющими уравнениями, во всем диапазоне смешанных форм деформирования от чистого сдвига до нормального отрыва. С помощью предложенного метода найдены собственные значения, отличающиеся от собственных значений, соответствующих задаче Хатчинсона — Райса — Розенгрена.

Результаты проведенного численного анализа нелинейной задачи на собственные значения использованы при построении автомодельного решения задачи о стационарной трещине в поврежденной среде в связанной постановке задачи с учетом ползучести и поврежденности материала. Показано, что в окрестности вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Установлено, что полученные собственные значения определяют асимптотику дальнего поля напряжений в задаче о трещине в среде с поврежденностью. Найденную асимптотику поля напряжений можно интерпретировать как промежуточную асимптотику поля напряжений и параметра сплошности, справедливую на расстояниях, существенно превышающих характерный линейный размер области поврежденного материала, но значительно меньших по сравнению с длиной трещины и характерным линейным размером образца. С использованием полученной асимптотики дальнего поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения построены области диспергированного материала. Найдены пятичленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений и шестичленные асимптотические разложения скалярного параметра сплошности. Показано, что асимптотические разложения параметра сплошности определяют контур области полностью поврежденного материала, быстро сходящийся к некоторому предельному контуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пестриков В. М.** Механика разрушения / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. СПб.: Профессия, 2012.
2. **Бьюи Х. Д.** Механика разрушения: Обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011.
3. **Шлянников В. Н.** Смешанные моды развития трещин при сложном напряженном состоянии // Завод. лаб. 1990. Т. 56, № 6. С. 77–90.
4. **Шлянников В. Н., Кислова С. Ю.** Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Изв. Саратов. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 77–84.
5. **Шлянников В. Н., Туманов А. В.** Упругие параметры смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины при двухосном нагружении // Изв. Саратов. гос. ун-та. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 73–80.
6. **Pan J., Lin P. C.** Analytical solutions for crack-tip sectors in perfectly plastic Mises materials under mixed in-plane and out-of-plane shear loading conditions // Engng Fracture Mech. 2006. V. 73. P. 1797–1813.
7. **Rahman M., Hancock J. W.** Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress // Intern. J. Solids Struct. 2006. V. 43. P. 3692–3704.
8. **Shih C. F.** Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems: Ph. D. Thesis. Cambridge: Harvard Univ., 1973.
9. **Shlyannikov V. N.** Elastic-plastic mixed-mode fracture criteria and parameters. Berlin: Springer, 2003.

10. **Rice J. R.** Mathematical analysis in mechanics of fracture // Fracture / Ed. by H. Liebowitz. N. Y.: Acad. Press, 1968. V. 2. P. 191–311.
11. **Hello G., Tahar M. B., Roelandt J. M.** Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // Intern. J. Solids Struct. 2012. V. 49. P. 556–566.
12. **Hutchinson J. W.** Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 1. P. 13–31.
13. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 1. P. 1–12.
14. **Степанова Л. В.** О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 173–180.
15. **Степанова Л. В.** Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. № 8. С. 1332–1347.

*Поступила в редакцию 26/IV 2013 г.,
в окончательном варианте — 15/VIII 2013 г.*
