

$T - \Gamma$ . При этом имеются в виду такие точки отрыва, в которых  $dp/dx > 0$  (в точках присоединения это заведомо так). Вывод согласуется с известными экспериментальными данными о появлении продольных вихревых структур, а также нашими измерениями. Следует, однако, указать, что в некоторых типах отрывных течений, например на конусах с изломом образующей поверхности, возникают вихревые структуры другого типа [16].

Измерения различных характеристик течения, в том числе и коэффициентов теплообмена, показывают, что вихри типа  $T - \Gamma$  наряду с обнаруженными продольными структурами тонкого пристенного слоя существуют как установившееся вторичное течение, перераспределяющее процессы переноса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бражко В. Н. Периодическая структура течения и теплопередачи в области присоединения сверхзвуковых потоков // Уч. зап. ЦАГИ.— 1979.— Т. 10, № 2.
2. Глотов Г. Ф., Мороз Э. К. Продольные вихри в сверхзвуковых течениях с отрывными зонами // Уч. зап. ЦАГИ.— 1977.— Т. 8, № 4.
3. Хоничев В. И., Мезенцев А. В., Ермолаев И. К. Теплообмен в зоне присоединения сверхзвукового турбулентного пограничного слоя с продольными вихревыми структурами // Теплообмен.— Минск, 1988.— Ч. 1.
4. Желтоволов А. А., Меклер Л. Ч., Шилейн Э. Х. Особенности развития отрывных течений в углах сжатия за волнами разрежения.— Новосибирск, 1987.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 10—87).
5. Трофимов В. М. Исследование процессов газодинамики и теплообмена в турбулентных отрывных течениях: Дис. ... канд. техн. наук.— Новосибирск, 1987.
6. Ингер. Трехмерные особенности процессов тепло- и массообмена в зоне присоединения высокоскоростного потока // РТК.— 1977.— Т. 15, № 3.
7. Мезенцев А. В., Хоничев В. И., Шебанов С. М., Ермолаев И. К. Трехмерные эффекты теплообмена в поверхностном аблирующем слое высокоскоростных каналов // Теплообмен-VII.— Минск, 1984.— Т. 3.
8. Зауличный Е. Г., Трофимов В. М. Исследование теплообмена в отрывных областях, обтекаемых сверхзвуковым потоком в сопле Лавала // ПМТФ.— 1986.— № 1.
9. Зайковский В. Н., Зауличный Е. Г., Меламед Б. М., Сенюв Ю. М. Экспериментальное исследование локальных коэффициентов теплообмена на стенках клапанного устройства // ПМТФ.— 1982.— № 2.
10. Желтоволов А. А., Зауличный Е. Г., Трофимов В. М., Яковлев В. Н. Исследование теплообмена и турбулентности в сжимаемых отрывных течениях.— Новосибирск, 1987.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 22—87).
11. Чжен П. Отрывные течения. Т. 1—3.— М.: Мир, 1972—1973.
12. Зукоски. Отрыв турбулентного пограничного слоя перед ступенькой // РТК.— 1967.— Т. 5, № 10.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
14. Taneda S. The main structure of turbulent boundary layers // J. Phys. Soc. Japan.— 1983.— V. 52, N 12.
15. Kline S. I., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W. The structure of boundary layers // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 30, pt 4.
16. Реддинг, Гюнтер, Эрикссон, Лефф. Отсутствие осесимметричности отрывного течения // РТК.— 1969.— Т. 7, № 7.

г. Новосибирск

Поступила 31/III 1989 г.,  
в окончательном варианте — 25/VIII 1989 г.

УДК 532.51

Ю. Я. Трифионов

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНО БЕГУЩИХ ВОЛН НА ВЕРТИКАЛЬНО СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Известно, что практически при всех числах Рейнольдса  $Re$  поверхность стекающего по вертикальной трубе слоя жидкости покрыта волнами. Это связано с тем, что течение пленки с гладкой свободной поверхностью неустойчиво [1]. Без соблюдения специальных мер предосторожности, связанных с созданием однородных по периметру трубы условий на входе, волны трехмерные и нерегулярные [2], к тому же пленка

чрезвычайно чувствительна к внешним возмущениям. Как теоретическое, так и экспериментальное изучение стекания пленки вследствие этого чрезвычайно затруднительно.

В экспериментах в целях регуляризации волнового течения применялись искусственно наложенные пульсации расхода жидкости, а также создавались равномерные условия на входе течения [2, 3]. В этих условиях существовал участок двумерных (кольцевых) регулярных волн, длина которого существенно зависела от свойств жидкости и ее расхода [3]. В дальнейшем течение эволюционирует к трехмерному [3].

Накладывая пульсации различных частот, можно было реализовывать двумерные волны с разными длинами, причем существовало два резко различающихся по свойствам типа волн — «квазигармонические» и «одиночные» [2, 3]. В теоретических работах [4, 5] на основе модельной системы уравнений [6] для определения мгновенных толщин и расхода жидкости рассчитаны различные двумерные нелинейные стационарно бегущие волновые режимы, некоторые из них количественно хорошо согласуются с экспериментом. В [7—9] исследована устойчивость найденных режимов относительно плоских, бесконечно малых возмущений и проведен бифуркационный анализ. Выделенными в смысле устойчивости оказались волны двух типов, в дальнейшем 1-е и 2-е семейства, которые соответствуют в экспериментах режимам «квазигармонических» и «одиночных» волн.

В [10], осредняя уравнения движения поперек слоя (координата  $y$ ) и закладывая определенный вид профилей скорости в  $x$ -направлении (вдоль вектора силы тяжести) и  $z$ -направлении, получили систему уравнений, обобщающую систему [6] на случай трехмерных возмущений:

$$(1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qQ}{h} \right) = - \frac{3\nu q}{h^2} + g\dot{h} + \frac{\sigma h}{\rho} \left( \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 1,2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{qQ}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q^2}{h} \right) = - \frac{3\nu Q}{h^2} + \frac{\sigma h}{\rho} \left( \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial z \partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Здесь  $h$  — мгновенная толщина пленки;  $q$  — мгновенный расход в пленке в  $x$ -направлении;  $Q$  — мгновенный расход в  $z$ -направлении;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho$  — плотность жидкости.

Цель данной работы — исследование устойчивости двумерных периодических стационарно бегущих решений системы (1) относительно трехмерных возмущений.

Впервые задача об устойчивости стационарно бегущих двумерных волн на пленке относительно плоских возмущений сформулирована в [7]. Там же в окрестности линии нейтральной устойчивости исследована устойчивость волн 1-го семейства и получено, что при умеренно больших значениях  $Re$  они неустойчивы к плоским возмущениям. В [8, 9] с использованием численных методов исследованы на устойчивость относительно плоских возмущений волны 2-го семейства, а также волны 1-го семейства в более широких, чем в [7], диапазонах по волновым числам и числам Рейнольдса. Найдены зоны устойчивых волновых режимов волн обоих семейств при умеренных значениях  $Re$ . Основной интерес и новизна данной работы заключаются прежде всего в изучении устойчивости двумерных нелинейных волн из диапазона устойчивости к плоским возмущениям относительно трехмерных возмущений.

Рассчитанные в [5, 8] двумерные периодические волновые режимы здесь обозначим как  $h_0(\xi)$ ,  $q_0(\xi)$  ( $\xi = x - ct$ ,  $c$  — фазовая скорость волны). Подставляя в систему (1)  $h(x, z, t) = h_0(\xi) + \tilde{h}(\xi, z, t)$ ,  $q(x, z, t) = q_0(\xi) + \tilde{q}(\xi, z, t)$ ,  $Q(x, z, t) = Q'(\xi, z, t)$  и линеаризуя ее, для исследования устойчивости решений  $(h_0, q_0, 0)$  получим

$$(2) \quad \frac{\partial \tilde{q}'}{\partial t} + A \frac{\partial \tilde{q}'}{\partial \xi} + Bq' + K \frac{\partial \tilde{h}'}{\partial \xi} + Dh' - 3h_0 \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \xi^3} + 1,2 \frac{q_0}{h_0} \frac{\partial Q'}{\partial z} - 3h_0 \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \xi \partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{h}'}{\partial t} - c \frac{\partial \tilde{h}'}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{q}'}{\partial \xi} + \frac{\partial Q'}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + A_1 \frac{\partial Q'}{\partial \xi} + B_1 Q' - 3h_0 \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial z^3} - 3h_0 \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial z \partial \xi^2} = 0,$$

где  $A = 2,4 \frac{q_0}{h_0} - c$ ;  $B = 2,4 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{q_0}{h_0} \right) + \frac{p}{h_0^2}$ ;

$$A_1 = 1,2 \frac{q_0}{h_0} - c$$
;  $B_1 = 1,2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{q_0}{h_0} \right) + \frac{p}{h_0^2}$ ;

$$K = -1,2 \frac{q_0^2}{h_0^2}; \quad D = - \left( 1,2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{q_0^2}{h_0^2} \right) + 2p \frac{q_0}{h_0^3} + F + 3 \frac{d^3 h_0}{d\xi^3} \right).$$

В (2) переменные обезразмерены аналогично [8]. Определяющий параметр  $p = (27\text{Fi}/\text{FrRe}^{10})^{1/6}$  ( $\text{Fi} = (\sigma/\rho)^3/gv^4$ ,  $\text{Fr} = \langle q_0 \rangle^2/g\langle h_0 \rangle^3$ ,  $\text{Re} = \langle q_0 \rangle/v$ , угловые скобки означают среднее по длине волны). Критерий  $F$  и фазовая скорость  $c$  рассчитаны в [5, 7].

Так как переменные  $(t, z)$  в систему (2) явно не входят, то ее решения представимы в виде

$$(3) \quad (h', q', Q') = (h_1, q_1, Q_1)e^{-\gamma t + i\beta z} + \text{к. с.}$$

(к. с. означает комплексное сопряжение,  $\beta$  — вещественный параметр).

Подстановка (3) в (2) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими по  $\xi$  коэффициентами

$$(4) \quad \widehat{L}(q_1, h_1, Q_1) = \gamma(q_1, h_1, Q_1)$$

( $\widehat{L}$  — матричный дифференциальный оператор). В дальнейшем рассматривается устойчивость относительно ограниченных по координате  $\xi$  возмущений. Из теоремы Флоке следует, что решения (4) имеют вид

$$(5) \quad (q_1, h_1, Q_1) = e^{i\alpha L\xi} (\psi(\xi), \varphi(\xi), \chi(\xi)).$$

Здесь  $(\psi, \varphi, \chi)$  — периодические функции с тем же периодом  $\lambda = 2\pi/\alpha'$ , что и изучаемое на устойчивость решение  $(h_0, q_0)$ ;  $L$  — вещественный параметр, изменяющийся от 0 до 1.

Задача исследования устойчивости после подстановки (5) в (4) сводится к нахождению таких  $\gamma$ , при которых получившаяся система имеет периодические решения. Численный алгоритм аналогичен изложенному в [8]. Волновой режим  $(h_0, q_0, 0)$  устойчив, если для всех значений  $\beta$  и  $L$  вещественные части всех  $\gamma$  больше нуля ( $\text{Real}(\gamma) \geq 0$ ).

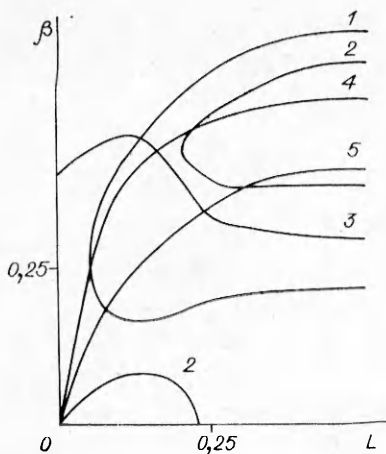
В [8] при анализе устойчивости относительно плоских возмущений ( $\beta = 0$ ) получено, что волны 1-го семейства, ответвляющиеся от плоскопараллельного течения при  $\alpha = 1$ , устойчивы ко всем плоским возмущениям только в узком диапазоне по волновым числам (и то лишь при достаточно больших  $p \geq 4$  (малые  $\text{Re}$ )).

Как показали результаты данной работы, к пространственным возмущениям волны 1-го семейства неустойчивы во всей области их существования по волновым числам и при всех значениях  $p$ .

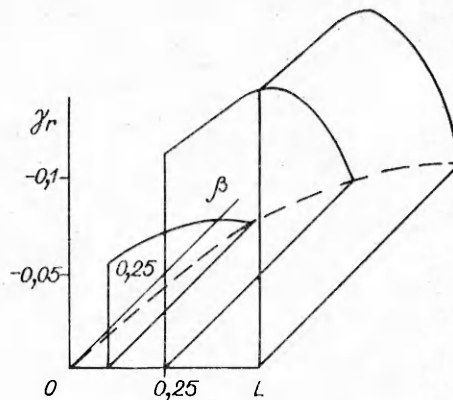
На рис. 1 приведены линии 1—5, ограничивающие области нарастающих пространственных возмущений, для волновых режимов с  $\alpha = 0,79$ ; 0,75; 0,6; 0,74; 0,55 (линии 1—3 для  $p = 10$ , 4, 5 для  $p = 1$ ). Возмущения с  $\beta \geq 0,7$  затухающие. Области неустойчивости практически симметричны относительно линии  $L = 0,5$  и здесь полностью не приводятся.

Расчеты показали также, что в зависимости от значения волнового числа режимы неустойчивы к возмущениям разного типа, что хорошо иллюстрируется рис. 1, где при  $\alpha = 0,75$  (линии 2) существуют сразу две области неустойчивости. Аналогичный результат получен в [11], где была исследована устойчивость волн 1-го семейства к пространственным возмущениям на основе уравнения, справедливого при  $\text{Re} \leq 1$  (большие  $p$ ). Результаты наших расчетов при  $p \geq 100$  количественно согласуются с расчетами [11], что подтверждает в какой-то мере справедливость модельных уравнений (1).

В отличие от результатов [11], как показали наши расчеты, на всех границах зоны устойчивости обращаются в нуль только вещественные части соответствующих собственных значений, исключая в некоторых случаях выделенные точки  $L = 0,5$  и 0, где могут обращаться в нуль также и мнимые части собственных значений. На рис. 1 такими точками являются  $L = 0,5$  на линиях 1, 2, 4 и  $L = 0$  на линии 3, стартуя с которых можно ответить пространственные периодические стационарно бегущие волновые режимы.



Р и с. 1



Р и с. 2

На рис. 2, 3 при  $p = 1$  для волновых режимов с  $\alpha = 0,7$  и  $0,55$  соответственно приведены величины инкрементов нарастающих возмущений  $\gamma_r$ . Самыми опасными являются возмущения с  $L = 0,5$ .

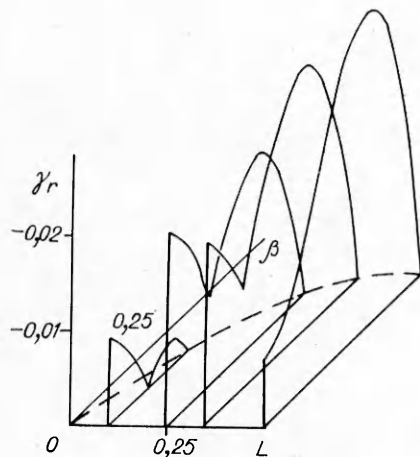
Дальнейшие результаты касаются устойчивости волн 2-го семейства. Как видно из расчетов [8], в отличие от волн 1-го семейства оно имеет множество зон, устойчивых к плоским возмущениям волновых режимов. В данной работе показано, что к пространственным возмущениям волны этого семейства также неустойчивы во всей области их существования по волновым числам и числам Рейнольдса.

На рис. 4 при  $p = 10$  линии 1—3 ограничивают области нарастающих возмущений для трех волновых режимов:  $\alpha = 0,52$ ;  $0,48$ ;  $0,46$ . Значение  $\alpha = 0,52$  отвечает практически верхней границе существования волн 2-го семейства. Расчет устойчивости режимов с  $\alpha \leq 0,4$  довольно затруднителен, так как исходная волна представляется большим числом гармоник. Поэтому с использованием аналитических методов была исследована устойчивость к длиннопromодулированным возмущениям (малые  $\beta$  и  $L$ ).

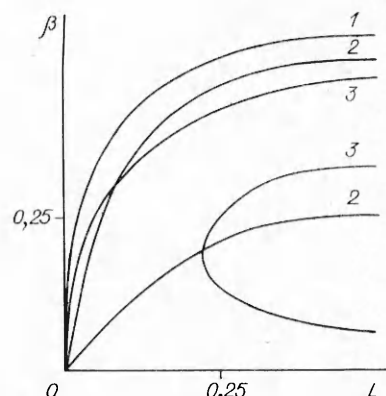
Вводя малый параметр  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 L^2}$ ,  $\beta = \varepsilon \sin \theta$ ,  $\alpha L = \varepsilon \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) и представляя решение системы (4), (5) в виде рядов

$$(\psi, \varphi, \chi) = \sum_{n=0}^3 (\psi_n, \varphi_n, \chi_n) \varepsilon^n; \quad \gamma = \sum_{n=0}^3 \gamma_n \varepsilon^n,$$

в нулевом порядке по  $\varepsilon$  получим уравнение



Р и с. 3



Р и с. 4

$$(6) \quad \bar{L}_0(\psi_0, \varphi_0, \chi_0) = \gamma_0(\psi_0, \varphi_0, \chi_0)$$

( $\bar{L}_0$  — матричный дифференциальный оператор). Решение системы (6) запишем как

$$(\psi_0, \varphi_0, \chi_0) = \left( \frac{dq_0}{d\xi}, \frac{dh_0}{d\xi}, 0 \right), \quad \gamma_0 = 0.$$

В порядке  $\varepsilon^1$ :

$$(7) \quad \bar{L}_0(\psi_1, \varphi_1, \chi_1) = \gamma_1(\psi_0, \varphi_0, \chi_0) + i \cos \theta (f_1, f_2, 0) + i \sin \theta (0, 0, f_3)$$

( $f_1, f_2, f_3$  — известные периодические функции). Условие разрешимости системы (7) — ортогональность правой части к решениям однородной, сопряженной к (6) задаче, одно из нетривиальных решений которой имеет вид

$$(8) \quad (\psi^*, \varphi^*, \chi^*) = (0, 1, 0).$$

Численно проверялось, что других нетривиальных решений сопряженной задачи в неособых точках нет.

Все три слагаемые в правой части (7) ортогональны (8), и ее решение представимо в виде

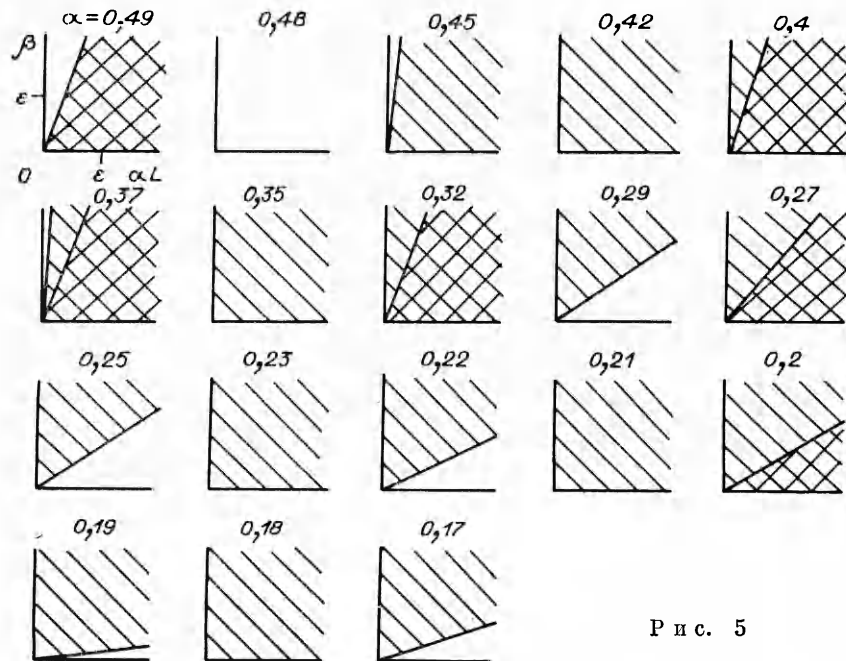
$$(9) \quad (\psi_1, \varphi_1, \chi_1) = -\gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) + i \cos \theta (\beta_1, \beta_2, 0) + i \sin \theta (0, 0, r),$$

вещественные периодические функции  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, r$  находились численно. Из условия разрешимости в следующем по  $\varepsilon$  приближении для определения  $\gamma_1 = \gamma_{1r} + i\gamma_{1i}$  получается квадратное уравнение с решением

$$(10) \quad \gamma_{1r}^2 = -\tilde{R}_x = -R_x \cos^2 \theta + \langle r \rangle \sin^2 \theta,$$

$$R_x = \frac{\langle \beta_1 \rangle - c \langle \beta_2 \rangle}{\langle \alpha_2 \rangle} - \frac{(\langle \beta_2 \rangle - c \langle \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_1 \rangle)^2}{4 \langle \alpha_2 \rangle^2}.$$

Здесь угловые скобки означают осреднение  $\left( \langle \alpha_2 \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \alpha_2(\xi) d\xi \right)$ ;  $\lambda$  — длина волны решения ( $q_0, h_0$ ). Если  $\tilde{R}_x < 0$ , то из (10) вытекает, что режим



Р и с. 5

$(q_0, h_0)$  неустойчив к длинным возмущениям. Если  $\tilde{R}_x > 0$ , то величина  $\gamma_1$  чисто мнимая, и в этом случае необходимо рассмотреть следующее по  $\varepsilon$  приближение.

Из условия разрешимости для определения  $\gamma_2 = \gamma_{2r} + i\gamma_{2i}$  получается довольно громоздкое линейное уравнение, причем ввиду того что (10) имеет два решения, находятся два значения  $\gamma_{2r}^{1,2}(0)$ . Волновой режим  $(q_0, h_0)$  устойчив, если оба значения  $\gamma_{2r}$  больше нуля.

На рис. 5 при  $p = 5$  для различных волн 2-го семейства (волновые числа приведены на рис. 5) заштрихованы области нарастающих длинно-промодулированных возмущений. Области, где инкремент неустойчивости  $\sim \varepsilon$  ( $\tilde{R}_x < 0$ ), обозначены двойной штриховкой. Волновой режим с  $\alpha = 0,48$  устойчив к возмущениям с малыми  $\beta$  и  $L$ , но, как показали дополнительные расчеты, он неустойчив к возмущениям с большими  $\beta$  и  $L$  (аналогично волне 1-го семейства при  $\alpha = 0,79$  на рис. 1).

Как следует из рис. 5, а также расчетов при других значениях  $p$ , практически все волновые режимы 2-го семейства неустойчивы к длинно-промодулированным пространственным возмущениям, хотя и существуют много зон устойчивости к плоским возмущениям ( $\varepsilon \beta = 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chia-Shun Yih. Stability of liquid flow down on inclined plane // Phys. Fluids.— 1963.— V. 6, N 3.
2. Капица П. Л. Волновые течения тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ.— 1948.— Т. 18, вып. 1.
3. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // ИФЖ.— 1976.— Т. 30, № 5.
4. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.
5. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке // ПМТФ.— 1985.— № 5.
6. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1967.— № 1.
7. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1968.— № 2.
8. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Стационарные двумерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости и их устойчивость // ИФЖ.— 1988.— Т. 54, № 1.
9. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. О ветвлении стационарно бегущих волновых режимов вязкой пленки жидкости // ПМТФ.— 1988.— № 4.
10. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 5.
11. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // Гидродинамика: Сб. науч. тр.— Пермь, 1974.— Вып. 5.

г. Новосибирск

Поступила 28/III 1989 г.,  
в окончательном варианте — 21/XII 1989 г.

УДК 532.573; 532.52

М. В. Извеков, В. А. Музин

### ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЮЩЕЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЦИЛИНДР

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование волнообразования на поверхности пленки жидкости, обтекающей горизонтальный цилиндр. При больших скоростях движения жидкости на поверхности пленки под воздействием центробежных сил образуются стационарные поперечные волны. Теоретическое решение задачи о развитии таких волн получено с учетом малой толщины пленки, оно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Известно [1—3], что на поверхности пленки жидкости, обтекающей горизонтальный цилиндр, образуются волны разных видов. В случае малых скоростей движения жидкости на нижней образующей горизонталь-