УДК 532, 536.66

ЛОКАЛЬНОЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛАВУЧЕСТИ НА ЛОКАЛЬНЫЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ТЕЧЕНИИ НА ПОРИСТОМ КЛИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА И ОТСОСА (ВДУВА)

И. Мухэймин, Р. Кэндэзэми, П. Логанатан*, П. Пуви Арасу*

Университет Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Джохор, Малайзия
* Университет Анны, Ченнай, Тамилнад, Индия
E-mails: muh003@yahoo.com, future990@gmail.com

Исследован тепломассоперенос в случаях свободной, вынужденной и смешанной конвекции в течении вдоль пористого клина при наличии источника тепла и равномерного отсоса или вдува. Проведен анализ течения в пограничном слое при воздействии тепловой и концентрационной плавучести. С использованием метода Рунге — Кутты — Джилля, метода стрельбы и метода локальной неавтомодельности анализируются характеристики поля течения. При учете силы плавучести, степенного закона температуры и концентрации, а также наличия отсоса (вдува) на стенке клина поле течения является локально-неавтомодельным. Выполнены численные расчеты до третьего порядка разложения по неавтомодельности при различных значениях безразмерных параметров. Исследовано влияние сил плавучести, наличия отсоса, источника тепла и неоднородных полей температуры и концентрации на безразмерные скорость, температуру и концентрацию. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с известными данными.

Ключевые слова: локальная неавтомодельность, отсос, вдув, сила плавучести, источник тепла.

Введение. В последнее время проводится большое количество исследований конвективного тепломассообмена и течения жидкости в пористых средах. В большинстве ранних работ использовался закон Дарси, согласно которому средняя по объему скорость пропорциональна градиенту давления. Естественные конвективные течения в пористых средах исследовались во многих работах (см., например, [1–7]). Конвективный теплоперенос применяется в химическом производстве, в нагревателях и охладителях электрических и механических устройств, при смазке деталей машин и т. д. Одними из первых работ в этой области являются работы [8, 9], в которых получены автомодельные решения для свободноконвективного течения на вертикальной и горизонтальной поверхностях соответственно. В [10, 11] эта задача изучена для случая наклонной поверхности и клина. Многие задачи тепломассопереноса не имеют автомодельных решений [12–14]. Неавтомодельность пограничных слоев может быть обусловлена различными факторами, такими как массообмен на поверхности, неоднородность температуры и концентрации на стенке, неоднородность градиента давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке MOSTI (гранты № FRGS0405, FRGS0406).

Разработаны численные методы получения неавтомодельных решений в пограничных слоях. Среди этих методов одним из наиболее известных является метод локальной неавтомодельности [15, 16], используемый при решении различных неавтомодельных задач о пограничном слое [17–19]. Численная схема была применена при решении нескольких характерных задач анализа пограничного слоя [20–22]. Установлено, что полученные результаты хорошо согласуются. Однако в опубликованных работах по этой теме не показаны возможности использования метода локальной неавтомодельности для решения любой задачи неавтомодельного конвективного тепломассопереноса в пограничном слое на клине. По-видимому, не было изучено влияние вдува и отсоса на смешанную конвекцию вдоль проницаемого клина с переменным потоком тепла на поверхности, погруженного в пористую среду Дарси.

Целью данной работы является исследование влияния сил плавучести на течение в пограничном слое на пористом клине при наличии источника тепла, однородного отсоса или вдува и неравномерного градиента давления. Определяющие уравнения получены в терминах локальных неавтомодельных уравнений. Численные решения найдены с использованием метода локальной неавтомодельности и метода Рунге — Кутты — Джилля. Для того чтобы были выполнены краевые условия на границе пограничного слоя, использовался метод стрельбы. Таким образом, следует ожидать, что локальный неавтомодельный подход даст более точные результаты (поля скорости, температуры и концентрации), чем локальная модель подобия. Результаты исследования позволят предсказывать течения, процессы тепломассопереноса и распределения растворенного вещества или концентрации вблизи интрузивных тел, таких как соляные купола, магнитные включения, трубопровод и др.

1. Математическая модель. Рассматривается двумерное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое на пористом клине (рис. 1). Предполагается, что жидкость является ньютоновской и изменение ее свойств при изменении температуры зависит от плотности и вязкости. В уравнении импульса учитываются изменение плотности и эффекты плавучести (приближение Буссинеска). Ось x направлена вдоль образующей клина, ось y — по нормали к ней. Эффект вязкой диссипации и джоулево тепло не учитываются, поскольку жидкость имеет конечную проводимость. На поверхности клина задается постоянный отсос или вдув. В соответствии с этими предположениями определяющие уравнения задачи имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad (1)$$

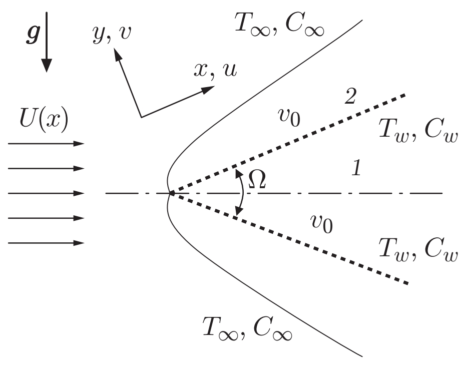


Рис. 1. Схема течения вдоль грани клина:
1 — клин, *2* — пористая стенка

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+U_\infty\,\frac{dU_\infty}{dx}+[g\beta(T-T_\infty)+g\beta^*(C-C_\infty)]\sin\frac{\Omega}{2}-\frac{\nu}{K}(u-U); \qquad (2)$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x}+v\,\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{Q_0}{\rho c_p}\,(T-T_\infty), \qquad u\,\frac{\partial C}{\partial x}+v\,\frac{\partial C}{\partial y}=D\,\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

Граничные условия:

$$u=0,\quad v=-v_0,\quad T=T_w(x)=T_\infty+b_1x^n,\quad C=C_w(x)=C_\infty+b_2x^n\quad \text{при}\quad y=0,$$
$$u=U(x),\quad T=T_\infty,\quad C=C_\infty\quad \text{при}\quad y=\infty.$$

Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях осей x, y соответственно; U_∞ — скорость потока на внешней границе пограничного слоя; ν — кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент линейного расширения; β^* — температурный коэффициент объемного расширения; T, T_w, T_∞ — температура жидкости в тепловом пограничном слое, температура пластины и температура жидкости в свободном потоке соответственно; C, C_w, C_∞ — соответствующие концентрации; Ω — угол раствора клина; K — проницаемость стенки клина; α — теплопроводность жидкости; D — эффективный коэффициент диффузии; v_0 — скорость отсоса (вдува); член $Q_0(T_\infty-T)$ представляет собой количество тепла, выделившегося (поглощенного) в единичном объеме; Q_0 — постоянная, которая может иметь положительное или отрицательное значение. В случае если температура стенки T_w превышает температуру свободного потока T_∞, источниковый член является источником тепла при $Q_0<0$ и стоком при $Q_0>0$. Третий и последующие члены в правой части уравнения (2) представляют собой силу плавучести и пористость стенки клина, действующие на элементы жидкости.

Следуя работе [23], выполним замену переменных

$$\psi(x,\eta)=\sqrt{\frac{2U\nu x}{1+m}}\,f(x,\eta), \qquad \eta=y\sqrt{\frac{(1+m)U}{2\nu x}}, \qquad \theta(x,\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}$$

($U=ax^m$; $m=\beta_1/(2-\beta_1)\geqslant 0$; $\beta_1=\Omega/\pi$ — параметр градиента давления Хартри; Ω — угол раствора клина).

Уравнение неразрывности (1) выполняется, если ввести функцию тока $\psi(x,y)$, такую что

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Компоненты скорости могут быть представлены в следующем виде:

$$u=U\,\frac{\partial f}{\partial\eta}, \qquad v=-\Big(\frac{2}{1+m}\,\frac{\nu U}{x}\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{2}\,f+\frac{1}{2}\,\frac{x}{U}\,\frac{dU}{dx}\,f+\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}+x\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big).$$

Вводя параметр плавучести $\gamma_1=\mathrm{Gr}_x\,/\,\mathrm{Re}_x^2$ и параметр клина $\xi=kx^{(1-m)/2}=|-v_0|[(m+1)x/(2\nu U)]^{1/2}$, определяющие дифференциальные уравнения задачи в частных производных можно записать в виде

$$f'''+ff''+\frac{2m}{1+m}\,(1-f'^2)+\frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}(\theta+N\varphi)\sin\frac{\Omega}{2}-\frac{2}{1+m}\,\xi^2\lambda(f'-1)=$$
$$=\frac{1-m}{1+m}\,\xi\Big(\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial f}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\Big),$$
$$\theta''-\frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,f'\theta+\mathrm{Pr}\,f\theta'-\frac{2}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\delta\xi^2\theta=\frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\xi\Big(\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big), \qquad (3)$$
$$\varphi''-\frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,f'\varphi+\mathrm{Sc}\,f\varphi'=\frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,\xi\Big(\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big).$$

Граничные условия:

$$\eta = 0\colon \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad f = \frac{2}{1+m}\,\xi, \quad \theta(0) = 1, \quad \varphi(0) = 1,$$

$$\eta \to \infty\colon \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad \theta(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

Здесь штрихи обозначают частные производные по η; Sc — число Шмидта; Pr — число Прандтля; Re_x — число Рейнольдса; Gr_x — число Грасгофа; Gr_C, Gr_T — модифицированные числа Грасгофа для концентрации и температуры; N — отношение плавучести; γ_1 — параметр плавучести; δ — параметр источника тепла; λ — параметр пористости:

$$\mathrm{Gr}_C = \frac{\nu g\beta^*(C - C_\infty)}{U^3}, \qquad \mathrm{Gr}_T = \frac{\nu g\beta(T - T_\infty)}{U^3}, \qquad \mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2},$$

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}, \quad N = \frac{\mathrm{Gr}_C}{\mathrm{Gr}_T}, \quad \gamma_1 = \frac{g\beta b_1}{ak^{2(n+1-2m)/(1-m)}}, \quad \delta = \frac{Q_0}{a\rho c_p}, \quad \lambda = \frac{\nu}{Ka}.$$

Заметим, что уравнения (3) после преобразования остаются дифференциальными уравнениями в частных производных с членами в правой части, содержащими $\partial/\partial\xi$. Из этой системы уравнений следует, что неавтомодельность задачи содержится в членах с частными производными по ξ. Сформулированная задача не допускает автомодельных решений. Таким образом, для получения решения системы уравнений, в которой сохранены члены с производными по ξ, необходимо использовать численную схему для дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Решение методом локальной неавтомодельности. В данном пункте используется метод локальной неавтомодельности, развитый в работе [16] и применяемый для решения различных неавтомодельных краевых задач. Сформулируем систему уравнений для локальной неавтомодельной модели для рассматриваемой задачи.

На первом уровне усечения системы (3) члены, содержащие $\xi\,\partial/\partial\xi$, являются малыми. Это, в частности, справедливо при $\xi \ll 1$. Следовательно, члены с $\xi\,\partial/\partial\xi$ в правой части уравнений (3) можно отбросить. В результате получаем систему уравнений

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{1+m}\,(1 - f'^2) + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\,(\theta + N\varphi)\sin\frac{\Omega}{2} - \frac{2}{1+m}\,\xi^2\lambda(f' - 1) = 0,$$

$$\theta'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,f'\theta + \mathrm{Pr}\,f\theta' - \frac{2}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\delta\xi^2\theta = 0, \qquad (4)$$

$$\varphi'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,f'\varphi + \mathrm{Sc}\,f\varphi' = 0.$$

Уравнения (4) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f, θ, φ. Переменная ξ рассматривается как параметр. На следующем уровне усечения введем функции

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad \theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \qquad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi},$$

$$f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \qquad \theta_2 = \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi}, \qquad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}.$$

В результате получим уравнения вплоть до третьего уровня усечения:

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{1+m}\,(1 - f'^2) + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\,(\theta + N\varphi)\sin\frac{\Omega}{2} -$$

$$- \frac{2}{1+m}\,\xi^2\lambda(f' - 1) = \frac{1-m}{1+m}\,\xi(f'f_1' - f_1 f''),$$

$$\theta'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,f'\theta + \mathrm{Pr}\,f\theta' - \frac{2}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\delta\xi^2\theta = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\xi(f'\theta_1 - \theta' f_1), \tag{5}$$

$$\varphi'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,f'\varphi + \mathrm{Sc}\,f\varphi' = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,\xi(f'\varphi_1 - \varphi' f_1);$$

$$f_1''' + f_1 f'' + f f_1'' - \frac{4m}{1+m}\,f' f_1' + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1 \xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\Big(\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-1}(\theta + N\varphi) + (\theta_1 + N\varphi_1)\Big)\sin\frac{\Omega}{2} - \frac{2}{1+m}\,\lambda(2\xi(f'-1) + \xi^2 f_1') = \frac{1-m}{1+m}\,(f' f_1' - f'' f_1 + \xi(f_1' f_1' - f_1'' f_1)),$$

$$\theta_1'' - \frac{2n}{m+1}\,\mathrm{Pr}\,(f_1'\theta + f'\theta_1) + \mathrm{Pr}(f_1\theta' + f\theta_1') - \frac{2}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\delta(\xi^2\theta_1 + 2\xi\theta) = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,(f'\theta_1 - \theta' f_1 + \xi(f_1'\theta_1 - \theta_1' f_1)), \tag{6}$$

$$\varphi_1'' - \frac{2n}{m+1}\,\mathrm{Sc}\,(f_1'\varphi + f'\varphi_1) + \mathrm{Sc}\,(f_1\varphi' + f\varphi_1') = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,(f'\varphi_1 - \varphi' f_1 + \xi(f_1'\varphi_1 - \varphi_1' f_1));$$

$$f_2''' + f_2 f'' + 2 f_1 f_1'' + f f_2'' - \frac{4m}{1+m}\,(f' f_2' + f_1' f_1') + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\,\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\,\xi^{-1} \times$$
$$\times\Big(\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-1}(\theta + N\varphi) + (\theta_1 + N\varphi_1)\Big)\sin\frac{\Omega}{2} + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)} \times$$
$$\times\Big(-\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-2}(\theta + N\varphi) + (\theta_1 + N\varphi_1) + \frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-1}(\theta_1 + N\varphi_1) + (\theta_2 + N\varphi_2)\Big)\sin\frac{\Omega}{2} - \frac{2}{1+m}\,\lambda(2(f'-1) + 4\xi f_1' + \xi^2 f_2') =$$
$$= \frac{1-m}{1+m}\,(f' f_2' + f_1' f_1' - f_1'' f_1 - f'' f_2 + \xi(2 f_1' f_2' - f_1'' f_2 - f_2'' f_1)),$$

$$\theta_2'' - \frac{2n}{m+1}\,\mathrm{Pr}\,(2f_1'\theta_1 + f_2'\theta + f'\theta_2) + \mathrm{Pr}\,(2f_1\theta_1' + f_2\theta' + f\theta_2') - \frac{2}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\delta(\xi^2\theta_2 + 4\xi\theta_1 + 2\theta) = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,(f'\theta_2 + f_1'\theta_1 - \theta' f_2 - \theta_1' f_1 + \xi(f_1'\theta_2 + f_2'\theta_1 - \theta_1' f_2 - \theta_2' f_1)), \tag{7}$$

$$\varphi_2'' - \frac{2n}{m+1}\,\mathrm{Sc}\,(2f_1'\varphi_1 + f_2'\varphi + f'\varphi_2) + \mathrm{Sc}\,(2f_1\varphi_1' + f_2\varphi' + f\varphi_2') = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,(f'\varphi_2 + f_1'\varphi_1 - \varphi' f_2 - \varphi_1' f_1 + \xi(f_1'\varphi_2 + f_2'\varphi_1 - \varphi_1' f_2 - \varphi_2' f_1)).$$

Система уравнений (6) получена дифференцированием системы уравнений (5) по ξ. В правой части уравнений системы (6) сохранены все члены. Вновь дифференцируя уравнения (6) по ξ, получаем систему уравнений (7), в которой не учитываются производные по ξ от функций f_2, θ_2, φ_2. Полученные системы уравнений удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} f(\xi,0)=\frac{2}{1+m}\,s, \qquad f'(\xi,0)=0, \qquad \theta(\xi,0)=\varphi(\xi,0)=1,\\ f_1(\xi,0)=f_1'(\xi,0)=\theta_1(\xi,0)=\varphi_1(\xi,0)=0,\\ f_2(\xi,0)=f_2'(\xi,0)=\theta_2(\xi,0)=\varphi_2(\xi,0)=0,\\ f'(\xi,\infty)=1, \qquad \theta(\xi,\infty)=\varphi(\xi,\infty)=f_1'(\xi,\infty)=\theta_1(\xi,\infty)=\varphi_1(\xi,\infty)=0,\\ f_2'(\xi,\infty)=\theta_2(\xi,\infty)=\varphi_2(\xi,\infty)=0. \end{gathered} \tag{8}$$

Так же как и на более низких уровнях усечения, система уравнений (5)–(7) с граничными условиями (8) содержит девять взаимосвязанных функций f, f_1, f_2, θ, θ_1, θ_2, φ, φ_1, φ_2. Порядок этой системы равен 21. При заданных значениях параметров задачи эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения, которые содержат параметр ξ. Из полученных уравнений найдем решения только для функций f, θ, φ и их производных. Система уравнений (5)–(7) решается с использованием метода Рунге — Кутты — Джилля и метода стрельбы. Подробно вычислительный метод обсуждался в работах [24, 25]. Следует отметить, что для достижения сходимости к решению с точностью до 10^{-6} требовалось выполнить 5–7 итераций.

3. Результаты исследования и их обсуждение. В данной работе результаты получены двумя методами, а именно методом Рунге — Кутты — Джилля совместно с методом стрельбы и методом локальной неавтомодельности с третьим уровнем усечения. Двухточечная краевая задача для неавтомодельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений получена преобразованием Фолкнер — Скэна. Данная система обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями с учетом поверхностного трения и скорости тепломассопереноса интегрировалась методом Рунге — Кутты — Джилля. Зависимости безразмерных скорости, температуры и концентрации от η при различных заданных параметрах представлены в виде графиков. Численные расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $\mathrm{Pr}=0{,}72$, $N=1$, $\mathrm{Sc}=0{,}62$, $\lambda=0{,}1$, показатель в степенном законе изменения температуры и концентрации $n=0{,}4$. С целью проверки предлагаемого метода проведено сравнение значений поверхностного трения $f''(0)$ и скорости теплообмена $-\theta'(0)$, полученных при различных значениях $\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^2$ (табл. 1), с данными работы [26]. Установлено, что эти результаты хорошо согласуются.

На рис. 2 показано влияние параметра плавучести на профили безразмерных скорости и температуры в пограничном слое при наличии источника тепла и отсоса, направленного под углом 72° к горизонтальной оси. Положительные значения параметра плавучести

Таблица 1

Значения величин $f''(\xi,0)$ и $-\theta'(\xi,0)$ при различных значениях $\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^2$

$\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^2$	Данные работы [26]		Данные настоящей работы	
	$f''(\xi,0)$	$-\theta'(\xi,0)$	$f''(\xi,0)$	$-\theta'(\xi,0)$
0	0,332 06	0,292 68	0,332 06	0,292 68
0,2	0,557 13	0,332 13	0,557 07	0,332 25
0,4	0,750 41	0,358 79	0,750 07	0,359 10
0,6	0,925 25	0,379 37	0,924 49	0,379 86
0,8	1,087 92	0,396 40	1,087 00	0,396 85
1,0	1,241 70	0,411 06	1,240 62	0,411 49
2,0	1,928 15	0,465 24	1,926 89	0,465 51
10,0	5,937 27	0,649 56	5,936 65	0,649 59

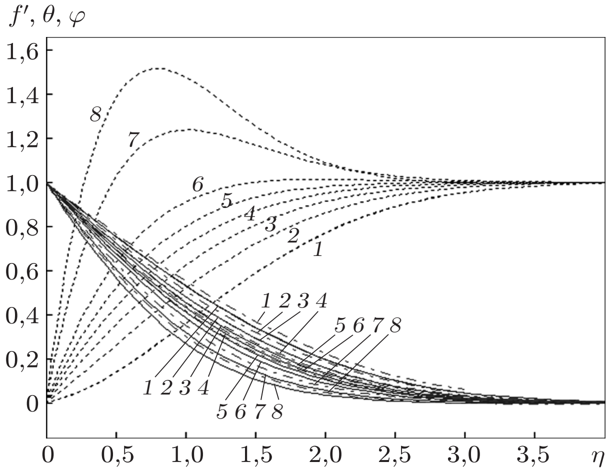


Рис. 2. Влияние параметра плавучести на профили скорости (штриховые линии), температуры (сплошные) и концентрации (штрихпунктирные) при $m = 0{,}6667$, $S = \xi = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$:
1 — $\gamma_1 = -2$; *2* — $\gamma_1 = -1{,}5$; *3* — $\gamma_1 = -1$; *4* — $\gamma_1 = -0{,}5$; *5* — $\gamma_1 = 0{,}1$; *6* — $\gamma_1 = 1$; *7* — $\gamma_1 = 5$; *8* — $\gamma_1 = 10$

соответствуют сопутствующему течению на клине, тогда как отрицательные значения — встречному течению. В сопутствующем течении при $\gamma_1 < 1$ конвективная мода определяется вынужденной конвекцией, при $\gamma_1 > 1$ — свободной конвекцией и при $\gamma_1 = 1$ — смешанной конвекцией. На рис. 2 видно, что с увеличением значений параметра плавучести γ_1 скорость жидкости в пограничном слое увеличивается, а температура и концентрация уменьшаются, в то время как с уменьшением параметра плавучести скорость жидкости в пограничном слое уменьшается, а температура и концентрация увеличиваются. Отметим также, что мода, определяемая свободной конвекцией, оказывает более существенное влияние на профиль скорости по сравнению с модами, определяемыми смешанной и вынужденной конвекцией.

В табл. 2 приведены значения поверхностного трения и скорости тепломассопереноса. Из табл. 2 следует, что с увеличением параметра плавучести поверхностное трение увеличивается, тогда как скорость тепломассопереноса уменьшается.

На рис. 3 показано влияние показателя в степенном законе изменения скорости свободного потока вблизи передней кромки ($\xi = 1$) на тепломассоперенос в конвективном течении

Таблица 2

Значения поверхностного трения и скорости тепломассопереноса при $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $N = 1$, $\mathrm{Sc} = 0{,}62$, $m = 2/3$, $n = 0{,}4$, $S = 0{,}1$, $\xi = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$

γ_1	$f''(\xi,0)$	$\theta'(\xi,0)$	$\varphi'(\xi,0)$	$f''(0,\eta)$	$\theta'(0,\eta)$	$\varphi'(0,\eta)$
−2,0	0,123 672	−0,504 939	−0,476 211	−6,836 902	1,475 289	1,357 969
−1,5	0,480 123	−0,569 138	−0,534 981	−3,822 628	0,602 907	0,563 315
−1,0	0,776 502	−0,611 620	−0,573 934	−2,225 439	0,291 086	0,277 659
−0,5	1,043 462	−0,644 848	−0,604 438	−1,018 297	0,111 728	0,112 787
0,1	1,339 282	−0,677 709	−0,634 625	0,188 519	−0,030 944	−0,018 700
1,0	1,749 301	−0,718 189	−0,671 859	1,732 609	−0,174 579	−0,151 439
5,0	3,313 301	−0,839 868	−0,783 977	7,045 659	−0,485 509	−0,440 071
10,0	4,968 368	−0,938 448	−0,876 607	12,331 609	−0,663 532	−0,602 591

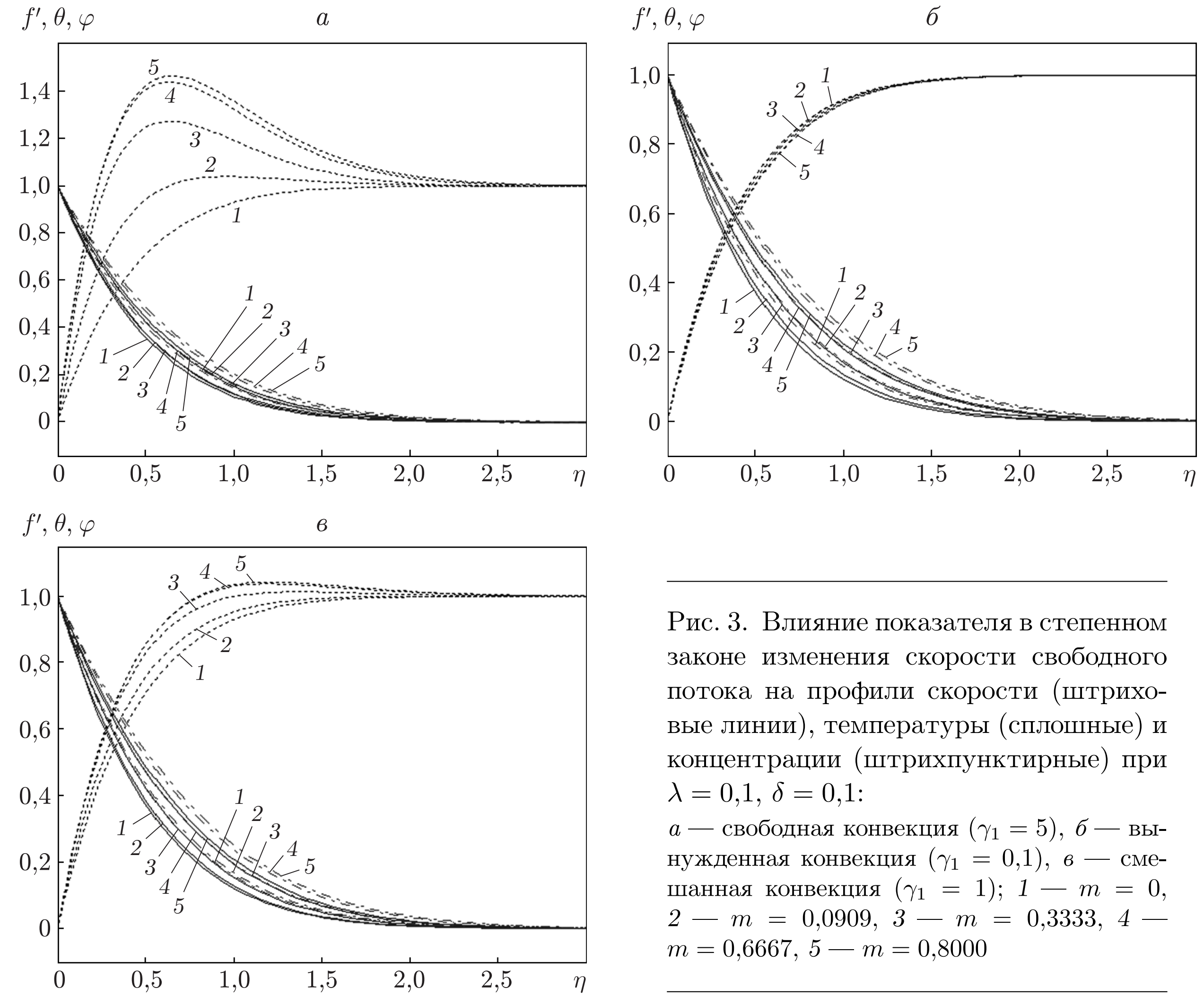


Рис. 3. Влияние показателя в степенном законе изменения скорости свободного потока на профили скорости (штриховые линии), температуры (сплошные) и концентрации (штрихпунктирные) при $\lambda = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$:

а — свободная конвекция ($\gamma_1 = 5$), *б* — вынужденная конвекция ($\gamma_1 = 0{,}1$), *в* — смешанная конвекция ($\gamma_1 = 1$); *1* — $m = 0$, *2* — $m = 0{,}0909$, *3* — $m = 0{,}3333$, *4* — $m = 0{,}6667$, *5* — $m = 0{,}8000$

на пористом клине при наличии силы плавучести и отсоса. Показатель степени m в законе изменения скорости свободного потока оказывает различное влияние на скорость в пограничном слое в случае свободной, вынужденной и смешанной конвекции. Установлено, что с увеличением m скорость жидкости в пограничном слое в случаях свободной и смешанной конвекции увеличивается (см. рис. 3,*а,в*), тогда как в случае вынужденной конвекции незначительно уменьшается (см. рис. 3,*б*). Кроме того, увеличение показателя степени m в законе изменения скорости свободного потока приводит к уменьшению температуры и концентрации в пограничном слое для всех конвективных мод (свободной, вынужденной и смешанной конвекции).

На рис. 4 показано изменение профилей скорости, температуры и концентрации в случаях вынужденной и свободной конвекции при наличии источника тепла для различных значений параметра отсоса $S > 0$. Безразмерный параметр клина ξ связан с параметром отсоса соотношением $\xi = |S|$, где $S = -v_0((m+1)/(2\nu a))^{1/2} x^{(1-m)/2}$; $v_0 > 0$. На рис. 4 видно, что с увеличением параметра отсоса S скорость жидкости в пограничном слое увеличивается, в то время как температура и концентрация уменьшаются.

На рис. 5 показано влияние параметра источника тепла на профили скорости, температуры и концентрации вблизи передней кромки ($\xi = 1$) на тепломассоперенос в случаях

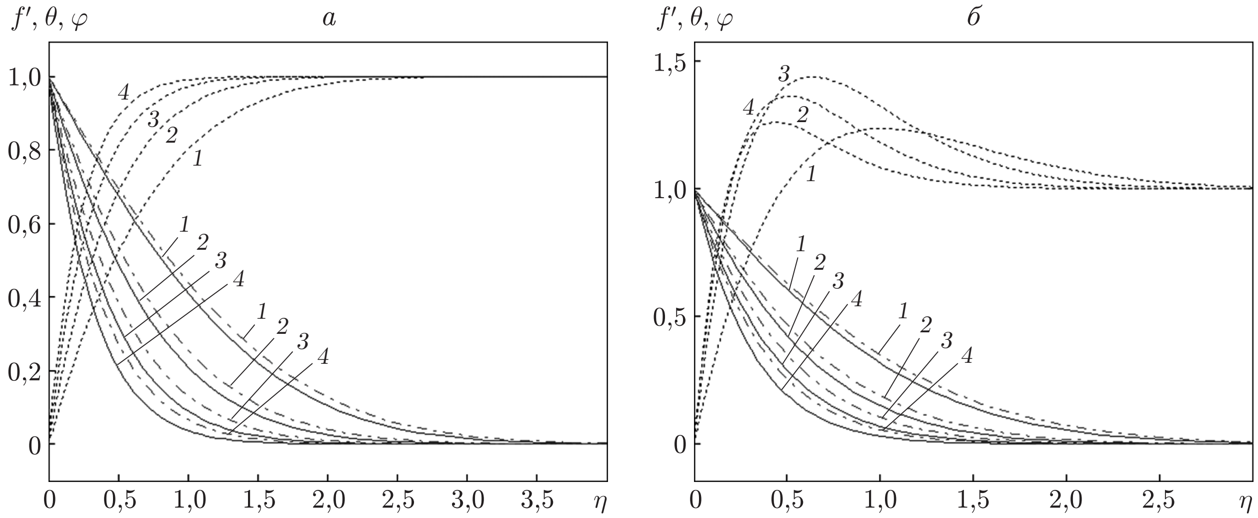
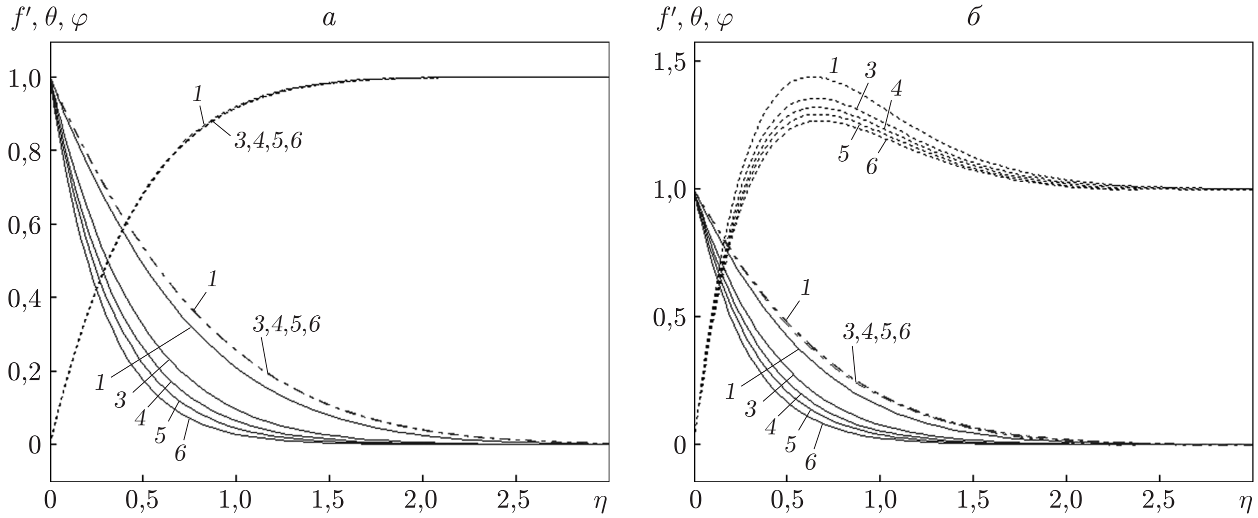


Рис. 4. Влияние параметра отсоса на профили скорости (штриховые линии), температуры (сплошные) и концентрации (штрихпунктирные) при $n = 0{,}4$, $\lambda = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$:
а — вынужденная конвекция, *б* — свободная конвекция; *1* — $S = 0{,}1$, *2* — $S = 1$, *3* — $S = 2$, *4* — $S = 3$



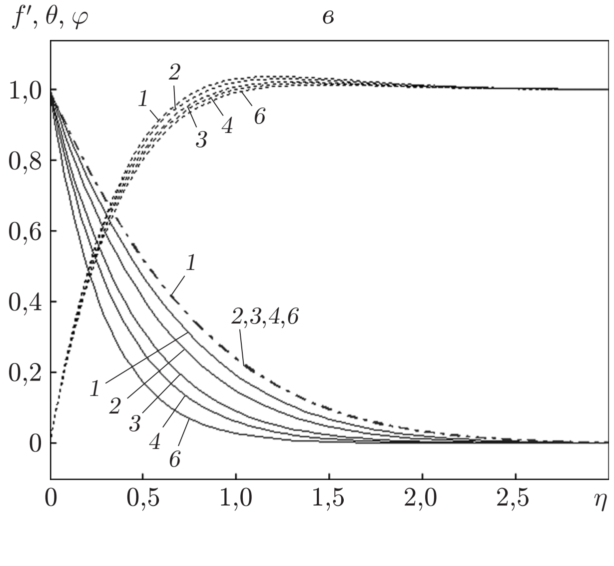


Рис. 5. Влияние параметра источника тепла на профили скорости (штриховые линии), температуры (сплошные) и концентрации (штрихпунктирные) при $m = 0{,}6667$, $n = 0{,}4$, $\lambda = 0{,}1$:
а — $\gamma_1 = 0{,}1$, *б* — $\gamma_1 = 5$, *в* — $\gamma_1 = 1$; *1* — $\delta = 0{,}1$, *2* — $\delta = 1$, *3* — $\delta = 3$, *4* — $\delta = 5$, *5* — $\delta = 7$, *6* — $\delta = 10$

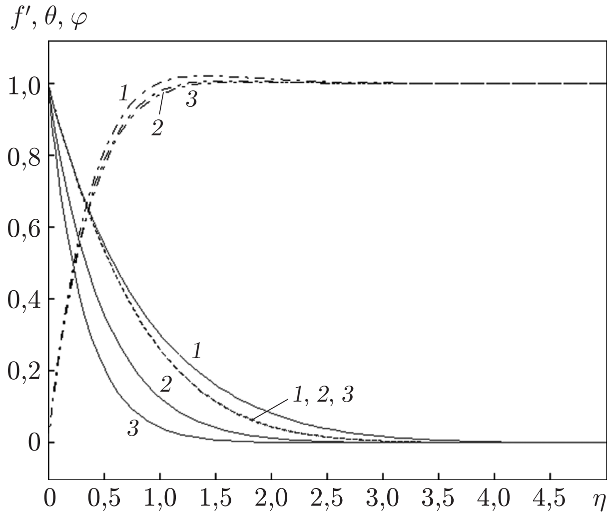


Рис. 6. Влияние числа Шмидта на профили скорости (штрихпунктирные линии), температуры (штриховые) и концентрации (сплошные) при $N = 1$, $\lambda = 0{,}1$, $\gamma_1 = 1{,}0$, $n = 0{,}4$, $\xi = 0{,}1$:
1 — Sc = 0,32; *2* — Sc = 0,62; *3* — Sc = 1,00

вынужденной, свободной и смешанной конвекции на пористом клине при наличии отсоса ($S = 1$). Видно, что с увеличением параметра источника тепла в случае свободной и смешанной конвекции скорость жидкости в пограничном слое уменьшается (см. рис. 5,*б*,*в*), а в случае вынужденной конвекции остается постоянной (см. рис. 5,*а*). Кроме того, с увеличением параметра источника тепла температура жидкости в пограничном слое для всех конвективных мод значительно уменьшается, при этом концентрация жидкости в пограничном слое остается постоянной (см. рис. 5).

На рис. 6 показано влияние числа Шмидта на профили скорости, температуры и концентрации. Видно, что с увеличением числа Шмидта концентрация жидкости уменьшается, тогда как скорость и температура меняются несущественно. Это приводит к уменьшению концентрационной плавучести, обусловливающему незначительное уменьшение скорости жидкости. Влияние увеличения числа Шмидта на уменьшение концентрации можно показать, например, заменяя водород (Sc = 0,32) водяным паром (Sc = 0,62) и аммиаком (Sc = 1,00) в указанной последовательности. Уменьшение концентрации вследствие увеличения Sc можно объяснить совместным действием магнитного поля и силы плавучести на стенке клина.

Заключение. В настоящей работе при исследовании влияния силы плавучести на течение в пограничном слое на пористом клине при наличии источника тепла выполнены численные расчеты с использованием метода Рунге — Кутты — Джилля совместно с методом стрельбы и метода локальной неавтомодельности с третьим уровнем усечения. Представлены результаты численных расчетов в широком диапазоне параметров задачи. В частности, установлено, что положительный знак параметра плавучести способствует увеличению скорости потока жидкости, тогда как отрицательный знак этого параметра обусловливает замедление потока жидкости. Встречное течение вызовет уменьшение градиента давления и отрыв пограничного слоя. Кроме того, с увеличением показателя степени в законе изменения скорости свободного потока для всех видов конвекции температура и концентрация в пограничном слое увеличиваются. С увеличением параметра источника тепла скорость жидкости в пограничном слое существенно уменьшается в режиме свободной конвекции, незначительно уменьшается в случае смешанной конвекции и остается постоянной в случае вынужденной конвекции. При наличии источника тепла и отсоса на стенке сила плавучести оказывает существенное влияние на поле течения и тем самым на скорость тепломассопереноса от пластины в жидкость. Предложен метод решения нелинейной задачи о пограничном слое Фолкнер — Скэна. Такого рода численное решение с третьим уровнем усечения для течения на пористом клине получено впервые.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Combarnous M. A., Bories S. A.** Hydro-thermal convection in saturated porous media // Adv. Hydrosci. 1975. V. 10. P. 231–307.
2. **Catton I.** Natural convection heat transfer in porous media // Intern. J. Engng Sci. 1985. V. 33. P. 131–138.
3. **Cheng P., Minkowycz W. J.** Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike // J. Geophys. Res. 1977. V. 82. P. 2040–2048.
4. **Bejan A.** The method of scale analysis: natural convection in porous media // Natural convection: fundamentals and applications / Ed. by W. Aung, S. Kakac, S. Viskanta. Washington: Hemisphere, 1985. P. 548–572.
5. **Nield D. A.** Convection in porous media. 2nd ed. / D. A. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer, 1999.
6. **Kandasamy R., Muhaimin, Hashim I., Ruhaila.** Thermophoresis and chemical reaction effects on non-Darcy mixed convective heat and mass transfer past a porous wedge with variable viscosity in the presence of suction or injection // Nuclear Engng Design. 2008. V. 238. P. 2699–2705.
7. **Muhaimin, Kandasamy R., Hashim I., Ruhaila.** Influence of thermal stratification and variable viscosity on non-Darcy mixed convective heat transfer past a porous wedge in the presence of viscous dissipation // Intern. J. Appl. Math. Stat. 2008. V. 13. P. 9–23.
8. **Gebhart B., Pera L.** The nature of vertical natural convection flows resulting from the combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1971. V. 14. P. 2025–2050.
9. **Pera L., Gebhart B.** Natural convection boundary layer over horizontal and slightly inclined surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 16. P. 1131–1146.
10. **Chen T. S., Yuh C. F.** Combined heat and mass transfer in mixed convection along vertical and inclined plates // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1980. V. 23. P. 527–537.
11. **Kandasamy R., Devi S. P. A.** Effects of chemical reaction, heat and mass transfer on non linear laminar boundary-layer flow over a wedge with suction or injection // J. Comput. Appl. Mech. 2004. V. 5. P. 21–31.
12. **Yih K. A.** MHD forced convection flow adjacent to non-isothermal wedge // Intern. Commun. Heat Mass Transfer. 1999. V. 26. P. 819–827.
13. **Watanabe T., Funazaki K., Taniguchi H.** Theoretical analysis on mixed convection boundary layer flow over a wedge with uniform suction or injection // Acta Mech. 1994. V. 105. P. 133–141.
14. **Kafoussias N. G., Nanousis N. D.** Magnetohydrodynamic laminar boundary layer flow over a wedge with suction or injection // Canad. J. Phys. 1997. V. 75. P. 733–745.
15. **Sparrow E. M., Quack H., Boerner C. J.** Local nonsimilarity boundary layer solution // AIAA J. 1970. V. 8. P. 1936–1942.
16. **Sparrow E. M., Yu H. S.** Local nonsimilarity thermal boundary layer solutions // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1971. V. 93. P. 328–334.

17. **Minkowycz W. J., Sparrow E. M.** Local nonsimilarity solutions for natural convection on a vertical cylinder // J. Heat Transfer. 1974. V. 96. P. 178–183.
18. **Novotny J. L., Bankston J. D., Lloyd J. R.** Local nonsimilarity applied to free convection boundary layers with radiation interaction // Progr. Astronaut. Aeronaut. 1975. V. 39. P. 309–330.
19. **Mucoglu A., Chen T. S.** Mixed convection on inclined surfaces // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1979. V. 101. P. 422–426.
20. **Minkowycz W. J., Sparrow E. M.** Numerical solution scheme for local nonsimilarity boundary layer analysis // Numer. Heat Transfer. 1978. V. 1. P. 69–85.
21. **Kafoussias N. G., William E. W.** An improved approximation technique to obtain numerical solutions of a class of two-point boundary value similarity problems in fluid mechanics // Intern. J. Numer. Methods Fluid. 1993. V. 17. P. 145–162.
22. **Risbeck W. R., Chen T. S., Armaly B. F.** Laminar mixed convection on horizontal flat plates with variable surface heat flux // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37. P. 699–704.
23. **Watanabe T.** Thermal boundary layer over a wedge with uniform suction or injection in forced flow // Acta Mech. 1990. V. 83. P. 119–126.
24. **Hossain M. A., Nakayama A.** Non-Darcy free convection flow along a vertical cylinder embedded in a porous medium with surface mass flux // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1993. V. 14. P. 385–390.
25. **Hossain M. A., Banu N., Nakayama A.** Non-Darcy forced convection flow over a wedge embedded in a porous medium // Numer. Heat Transfer. A. 1994. V. 26. P. 399–414.
26. **Minkowycz W. J.** Handbook of numerical heat transfer / W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, G. E. Schneider, R. H. Pletcher. N. Y.: John Wiley and Sons, 1988.

Поступила в редакцию 14/VIII 2010 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2011 г.