

ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В [1—5] показано, что для корректного учета предварительных (начальных) напряжений в неоднородных телах метод усреднения должен применяться непосредственно к исходному телу. Работы [1—5] ограничиваются констатацией этого факта и иллюстрирующими его примерами. Методы реализации теоретических результатов в [1—5] применительно к конкретным объектам не рассматривались. Исключение составляет работа [4], посвященная слоистым средам.

В данной работе изложен способ учета начальных напряжений в применении к конечномерным конструкциям (фермам, рамам и т.п.), широко распространенным в практике. Получены расчетные формулы, сводящие задачу к решению системы линейных уравнений. Учет предварительных (начальных) напряжений, вызванных в основном весом, играет существенную роль при рассмотрении устойчивости и динамических свойств таких конструкций.

1. Постановка задачи, некоторые сведения об усреднении неоднородных напряженных сред. Рассмотрим упругое неоднородное тело периодической структуры с ячейкой периодичности (ЯП) P_ϵ , находящееся под действием сил F , вызывающих в нем перемещения v и напряжения $\sigma_{ij}^\epsilon(0)(v)$, называемые далее предварительными (или начальными). Пусть тело вдобавок к указанным может испытывать дополнительные перемещения u^ϵ . В общем виде вопрос об описании тел с начальными напряжениями рассмотрен в [6], и для их описания были получены (рис. 1) задача, описывающая основное (начальное) состояние:

$$(1.1) \quad L_\epsilon(0)v = F \text{ в } Q_\epsilon, \sigma_{ij}^\epsilon(0)(v)n_j = 0 \text{ на } \Gamma_\epsilon, v = 0 \text{ на } \Gamma_2;$$

задача для определения дополнительных перемещений:

$$(1.2) \quad L_\epsilon(\sigma)u^\epsilon = \rho u_{,i}^\epsilon \text{ в } Q_\epsilon, \sigma_{ij}^\epsilon(\sigma)(u^\epsilon)n_j = 0 \text{ на } \Gamma_\epsilon, u^\epsilon = 0 \text{ на } \Gamma_2.$$

Здесь $L_\epsilon(\sigma)v = [(c_{ijkl}(x/\epsilon) + \sigma_{ik}^\epsilon(\sigma)(v)\delta_j^i)u_{k,i}]_j$ — оператор теории упругости с учетом начальных напряжений [6]; $L_\epsilon(0)u = [c_{ijkl}(x/\epsilon)u_{k,i}]_j$ — оператор теории упругости без начальных напряжений;

$$\sigma_{ij}^\epsilon(\sigma)(u) = (c_{ijkl}(x/\epsilon) + \sigma_{ji}^\epsilon(\sigma)\delta_k^i)u_{k,i};$$

$\sigma_{ij}^\epsilon(0)(u) = c_{ijkl}(x/\epsilon)u_{k,i}$ — напряжения;
 $\sigma_{ij}^\epsilon = \sigma_{ij}^\epsilon(0)(v)$; $c_{ijkl}(x/\epsilon)$ — упругие постоянные; $\rho(x/\epsilon)$ — плотность (эти функции периодичны по x с ЯП P_ϵ); δ_j^i — дельта Кронекера. Область Q_ϵ и ее границы $\Gamma_\epsilon, \Gamma_2$ показаны на рис. 1, n — нормаль к ∂Q_ϵ .

Согласно [7—13], рассматриваемое тело периодической структуры при $\epsilon \rightarrow 0$ может быть заменено подобным ему по механическому поведению однородным телом. Соответственно решения задач (1.1), (1.2) могут быть аппроксимированы решениями задач вида [1—5]

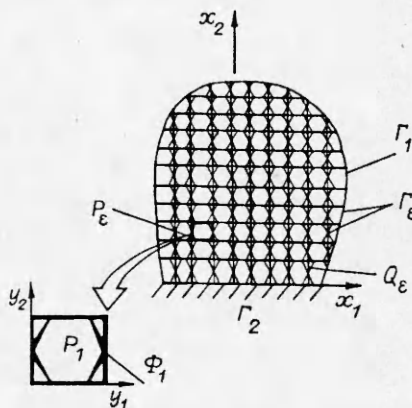


Рис. 1

$$(1.3) \quad \hat{L}(0)v = \mu F \text{ в } Q, \hat{\sigma}_{ij}(0)n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1, v = 0 \text{ на } \Gamma_2;$$

$$(1.4) \quad \hat{L}(\sigma)u = \mu \rho u_\mu \text{ в } Q, \hat{\sigma}_{ij}(\sigma)n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1, u = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

где $(\hat{L}(\sigma)u)_i = (a_{ijkl}(\sigma)u_{k,l})_{,j}$ (при $\sigma_{ij}^e = 0$ получаем усредненную задачу для ненапряженного тела); $\hat{\sigma}_{ij}(\sigma)(u) = a_{ijkl}(\sigma)u_{k,l}$ — усредненные напряжения; $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(0)(v)$; $\langle \cdot \rangle = (\text{mes } P_\epsilon)^{-1} \int_{\Phi_\epsilon} \cdot dx = (\text{mes } P_1)^{-1} \int_{\Phi_1} \cdot dy$, $y = x/\epsilon$ — среднее по ЯП (рис. 1); μ — объемное содержание материала ($\mu = 1$ для монолитных тел, $0 < \mu < 1$ для пористых): $\mu = \text{mes } \Phi_1 / \text{mes } P_1$.

Согласно [10],

$$(1.5) \quad \langle \sigma_{ij}^e \rangle = \hat{\sigma}_{ij}(0)(v).$$

Отметим, что в общем случае (см. [1—5, 8, 11] и примеры там же)

$$(1.6) \quad a_{ijkl}(\sigma) \neq a_{ijkl}(0) + \hat{\sigma}_{ij}(0)(v)\delta_k^i.$$

Правая часть (1.6) возникает при использовании так называемого «промежуточного» усреднения, проводимого по следующей схеме: усредняется неоднородное тело без напряжений, рассчитываются усредненные напряжения в нем, а затем составляется оператор, который должен был возникнуть [6] при описании реально существующего однородного тела с указанными упругими постоянными и начальными напряжениями. К «промежуточному» усреднению приводит, в частности, феноменологический подход к неоднородному телу. Из (1.6) следует, что «промежуточное» усреднение в общем случае ведет к неправильному результату. Математически это связано со специфическими свойствами G -предела суммы [14], с механической точки зрения объясняется тем, что при приложении однородных усредненных напряжений в неоднородной среде возникает напряженно-деформированное состояние общего вида.

Таким образом, процедура усреднения в общем случае не сохраняет структуру оператора $L_\epsilon(\sigma)$ линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями.

2. Случай малых начальных напряжений. Данная работа посвящена рассмотрению напряженных конструкций. Для них естественным образом возникает ограничение на начальные (предварительные) напряжения, а именно σ_{ij}^e не превышают предела прочности материала элементов конструкции. В свою очередь, предел прочности для реальных материалов мал по сравнению с упругими постоянными [14]. Следовательно, реализуется случай малых начальных напряжений, для которого в [1, 5] получена формула для вычисления коэффициентов усредненного оператора:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} a_{ijkl}(\sigma) &= a_{ijkl}(0) + \hat{\sigma}_{ij}^e \delta_k^i + l_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{\alpha\beta}) = \\ &= a_{ijkl}(0) + \hat{\sigma}_{ij}^e \delta_k^i + \langle \sigma_{qm}^e N_{p,my}^{kl} N_{p,qy}^{ij} + \\ &\quad + \sigma_{qt}^e N_{k,qy}^{ij} + \sigma_{mj}^e N_{i,my}^{kl} \rangle. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2.1. В формуле (2.1) учтено, что $\langle \sigma_{ij}^e \rangle = \hat{\sigma}_{ij}(0)(v)$ (см. [10], при этом используемую в [10] нормировку в определении среднего следует для получения (1.5) заменить на стандартную), а индекс i, y означает $\partial / \partial y_i$, где $y = x/\epsilon$ — локальные переменные.

Формула (2.1) получается путем разложения общей формулы для $a_{ijkl}(\sigma)$ из [1, 5] по степеням малого параметра σ/c (σ и c — характерные значения начальных напряжений σ_{ij}^e и упругих постоянных c_{ijkl}) при сохранении линейного члена. При желании можно удержать члены более высокого порядка (подробности см. в [1]). Общая формула для $a_{ijkl}(\sigma)$ приведена в [1, 5], здесь она не приводится, так как не используется непосредственно в дальнейших исследованиях.

В формуле (2.1) функции $\bar{N}^{\alpha\beta}$ — это решения так называемой ячеечной задачи (ЯЗ) теории упругости для тела без начальных напряжений (см. [7—9, 12])

$$(2.2) \quad (c_{ijkl}(y)(N_k^{\alpha\beta} + y_\alpha \delta_\beta^k)_{,j})_{,i} = 0 \text{ в ЯП } \Phi_1 = \varepsilon^{-1}\Phi_\varepsilon$$

с условием периодичности $\bar{N}^{\alpha\beta}$ и условием нормировки $\langle N^{\alpha\beta} \rangle = 0$ (последнее можно заменить любым другим, исключающим смещения тела как твердого тела).

Как вытекает из [7—10], начальные напряжения σ_{ij}^e связаны с усредненными начальными напряжениями формулой

$$(2.3) \quad \sigma_{ij}^e = (c_{ij\alpha\beta} + c_{ijpq} N_{p,\Phi}^{\alpha\beta}) \sigma_{\alpha,\beta} = (c_{ij\alpha\beta} + c_{ijpq} N_{p,\Phi}^{\alpha\beta}) J_{\alpha\beta mn} \hat{\sigma}_{mn}$$

($J_{\alpha\beta mn}$ — тензор, обратный к $a_{ijkl}(0)$ (усредненный тензор податливости)).

З а м е ч а н и е 2.2. Локальные напряжения σ_{ij}^e удовлетворяют равенству

$$(2.4) \quad \sigma_{ij,j}^e = 0,$$

для получения которого достаточно продифференцировать (2.3) по локальным переменным и воспользоваться (2.2). С учетом симметрии тензора начальных напряжений, интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\Phi_1} \sigma_{ij}^e N_{k,m}^{\alpha\beta} dy = \int_{\Phi_1} \sigma_{iq}^e N_{k,\Phi}^{\alpha\beta} dy = - \int_{\Phi_1} \sigma_{ia,m}^e N_k^{\alpha\beta} dy + \int_{\partial\Phi_1} \sigma_{iq}^e n_q^1 N_k^{\alpha\beta} dy = 0$$

(n^1 — нормаль к $\partial\Phi_1$). Первый интеграл в представленной выше сумме равен нулю в силу (2.4), а второй (по $\partial\Phi_1$) — в силу периодичности $N^{\alpha\beta}$, σ_{iq}^e и противоположности вектора нормали на противоположных гранях ЯП. В результате (2.1) принимает вид

$$(2.5) \quad a_{ijkl}(\sigma) = a_{ijkl}(0) + \hat{\sigma}_{jl} \delta_i^k + \langle \sigma_{qm}^e N_{p,my}^{kl} N_{p,\Phi}^{ij} \rangle.$$

Эта формула будет основой для дальнейших исследований.

Из (2.2) в силу симметрии упругих постоянных [14] вытекает, что функции $N^{\alpha\beta}$ симметричны по верхним индексам и несимметричность $a_{ijkl}(\sigma)$ связана только с членом $\sigma_{ik} \delta_l^j$ (величины $a_{ijkl}(0)$, как известно [7—10], обладают симметриями, присущими упругим постоянным). Отметим, что вывод относится только к случаю малых начальных напряжений (некоторые формулы для не малых начальных напряжений см. в [4, 5]).

Подставляя в (2.5) вместо σ_{ij}^e последнее выражение из (2.3), получаем

$$(2.6) \quad l_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{\alpha\beta}) = \langle \sigma_{qm}^e N_{p,my}^{kl} N_{p,\Phi}^{ij} \rangle = \hat{l}_{ijkl\alpha\beta}(N^{\alpha\beta}) J_{\alpha\beta mn} \hat{\sigma}_{mn},$$

где

$$(2.7) \quad \hat{l}_{ijkl\alpha\beta}(N^{\alpha\beta}) = \langle c_{qvcd} N_{c,dy}^{\alpha\beta} N_{p,sy}^{kl} N_{p,\Phi}^{ij} + c_{q\alpha\beta} N_{p,sy}^{kl} N_{p,\Phi}^{ij} \rangle;$$

по повторяющимся индексам проводится суммирование.

3. Конструкции из прямолинейных / плоских элементов. Рассмотрим конструкции периодического строения, образованные из балок, пластинок и т.п. Они являются частным случаем высокопористых каркасных конструкций [2, 10, 11]. Для них ЯЗ теории упругости (2.2) может быть заменена предложенными в [12, 13] методами на ЯЗ для соответствующей ячеечной конструкции (ЯК), образованной системой балок и /или пластинок.

Обратимся к ЯЗ (2.2). Ее можно рассмотреть как задачу относительно $U^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} + y_\alpha e_\beta$. При этом, согласно [12, 13], ЯЗ теории балок /пластинок естественным образом формулируется в терминах $U^{\alpha\beta}$ в том смысле, что используемые кинематические гипотезы связывают перемещения элементов ЯК именно с $U^{\alpha\beta}$ (см. (2.2)). С учетом сказанного получим формулу (2.7) в терминах $U^{\alpha\beta}$:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} l_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{\alpha\beta}) &= \langle \sigma_{qm}^e (U_{p,my}^{kl} - \delta_p^k \delta_m^l) (U_{p,qy}^{ij} - \delta_p^i \delta_q^j) \rangle = \\ &= \langle \sigma_{qm}^e U_{p,my}^{kl} U_{p,qy}^{ij} - \sigma_{qi}^e U_{p,qy}^{kl} - \sigma_{jm}^e U_{p,qy}^{kl} + \sigma_{ji}^e \delta_p^k \delta_q^l \rangle \end{aligned}$$

и соответственно

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{l}_{ijkl\alpha\beta}(N^{p\delta}) &= \langle c_{qacd} (U_{c,dy}^{\alpha\beta} - \delta_c^\alpha \delta_d^\beta) (U_{p,xy}^{kl} - \delta_p^k \delta_x^l) \times \\ &\times (U_{p,qy}^{ij} - \delta_p^i \delta_q^j) + c_{qs\alpha\beta} (U_{p,xy}^{kl} - \delta_p^k \delta_x^l) (U_{p,qy}^{ij} - \delta_p^i \delta_q^j) \rangle. \end{aligned}$$

Раскрытие скобок в (3.2) не упрощает формулу.

Теории балок / пластинок устанавливают связь перемещений элементов ЯК (рассматриваемых как одно- или двумерные объекты) с $U^{i\alpha\beta}$ (перемещения элементов, рассматриваемых как трехмерные тела) в наиболее простом виде в естественной (связанной с элементами ЯК) системе координат [15]. Введем систему координат $\{l, n, \tau\}_I$, связанную с I -м телом. Для балок и пластинок n будем считать вектором нормали, для балок l — направляющим вектором.

Формулы (3.1), (3.2) в связанной с I -м элементом системе координат (γ_a^i обозначают направляющие косинусы системы координат $\{l, n, \tau\}_I$ относительно системы координат $Oy_1y_2y_3$, $i = 1, 2, 3$, $a = l, n, \tau$) запишем как

$$(3.3) \quad \begin{aligned} l_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{\alpha\beta}) &= \langle \sigma_{qm}^e U_{p,my}^{kl} U_{p,qy}^{ij} - \gamma_{al}^k \gamma_{nb}^l \sigma_{qb}^e U_{a,qy}^{ij} - \\ &- \gamma_{al}^i \gamma_{nb}^j \sigma_{bm}^e U_{a,my}^{kl} + \gamma_{al}^i \gamma_{nb}^j \gamma_{\alpha}^k \gamma_{\beta}^l \sigma_{b\beta}^e \delta_{\alpha}^a \rangle; \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \hat{l}_{ijkl\alpha\beta}(N^{p\delta}) &= \langle c_{qacd} (U_{c,dy}^{\alpha\beta} - \delta_c^\alpha \delta_d^\beta) (U_{p,xy}^{kl} - \delta_p^k \delta_x^l) (U_{p,qy}^{ij} - \delta_p^i \delta_q^j) + \\ &+ \gamma_{al}^{\alpha} \gamma_{nb}^{\beta} c_{qlab} (U_{p,xy}^{kl} - \delta_p^k \delta_x^l) (U_{p,qy}^{ij} - \delta_p^i \delta_q^j) \rangle. \end{aligned}$$

В (3.3), (3.4) нижние индексы принимают значения n, l, τ , верхние 1, 2, 3. Среднее по ЯП P_1 в рассматриваемом случае имеет вид

$$\langle \cdot \rangle = (\text{mes} P_1)^{-1} \sum_{l=1}^N \int_{L_l} \cdot dy,$$

где N — число элементов в ЯК; интегрирование ведется по области L_l , занятой I -м элементом ЯК. С учетом принимаемых гипотез теории балок / пластинок интегралы могут быть вычислены в явном виде.

3.1. Балочные конструкции (рамы). В системе координат, связанной с I -й балкой (материал балки считаем однородным и изотропным, балку — имеющей постоянное сечение), запишем следующие соотношения для напряжений и деформаций [15—17]:

$$(3.5) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{ll}^e &\neq 0, \sigma_{ab} = 0 \text{ при } ab \neq ll, \\ U_{l,l}^{\alpha\beta} &\neq 0, U_{n,n}^{\alpha\beta} = U_{\tau,\tau}^{\alpha\beta} = -\nu U_{l,l}^{\alpha\beta} \\ U_{a,b}^{\alpha\beta} &= 0 \text{ при } a \neq b \end{aligned} \right\} \text{ для любых } \alpha, \beta.$$

Формулы (3.3), (3.4) с учетом (3.5) представим как

$$(3.6) \quad \begin{aligned} l_{ij\alpha\beta}(\sigma_{mn}^e, N^{p\delta}) &= (\text{mes} P_1)^{-1} \sum_{l=1}^N \int_{L_l} \sigma_{ll}^e [U_{l,l}^{\alpha\beta} U_{l,l}^{ij} - \\ &- \gamma_l^\alpha \gamma_l^\beta (U_{l,l}^{ij} + U_{l,l}^{\alpha\beta}) + \gamma_l^\alpha \gamma_l^\beta \gamma_l^\alpha \gamma_l^\beta |dl| dnd\tau. \end{aligned}$$

С учетом того что в рассматриваемом случае $\sigma_{ll}^e = \hat{\sigma}_{ab} \nu_{a,b}$ (ср. с (2.3)), $\hat{\sigma}_{ab} = E_l U_{l,l}^{\alpha\beta}$ (E_l — модуль Юнга материала I -й балки), откуда

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \hat{l}_{ij\alpha\beta ab}(N^{p\delta}) &= (\text{mes} P_1)^{-1} \sum_{l=1}^N \int_{L_l} E_l [U_{l,l}^{\alpha\beta} U_{l,l}^{ij} - \\ &- \gamma_l^\alpha \gamma_l^\beta U_{l,l}^{\alpha\beta} (U_{l,l}^{ij} + U_{l,l}^{\alpha\beta}) + \gamma_l^\alpha \gamma_l^\beta \gamma_l^\alpha \gamma_l^\beta U_{l,l}^{\alpha\beta} |dl| dnd\tau. \end{aligned}$$

Напряжения и деформации в (3.5), складывающиеся из деформации растяжения — сжатия и изгиба, имеют вид $A + Bn + C\tau$, где $A, B, C = \text{const}$. Вычисление выражений в (3.5) сводится к интегрированию функций вида $n^k \tau^L$ по площади поперечного сечения балки. Для нетонких балок должны использоваться соответствующие кинематические гипотезы.

3.2. *Фермы периодической структуры.* Пусть изгибными напряжениями и деформациями в ЯК можно пренебречь. Тогда $\sigma_{mn}^e, U_{d,d}^{uu}$ ($d = l, n, \tau$) в (3.5) — (3.7) являются постоянными [15—17] и формулы (3.6), (3.7) принимают вид

$$(3.8) \quad L_{ij\alpha\beta}(\sigma_{mn}^e, U^{p\delta}) = (\text{mes}P_1)^{-1} \sum_{I=1}^N N_I |e_I^{\alpha\beta} e_I^{\eta} - \gamma_I^\alpha \gamma_I^\beta (e_I^\eta + e_I^{\alpha\beta}) + \gamma_I^i \gamma_I^j \gamma_I^\alpha \gamma_I^\beta l_I|;$$

$$(3.9) \quad \hat{L}_{ij\alpha\beta}(\mathbf{N}^{p\delta}) = (\text{mes}P_1)^{-1} \sum_{I=1}^N \mathcal{E}_I |e_I^{\alpha\beta} e_I^{\eta} e_I^{\eta} - \gamma_I^\alpha \gamma_I^\beta e_I^{\alpha\beta} (e_I^\eta + e_I^{\alpha\beta}) + \gamma_I^i \gamma_I^j \gamma_I^\alpha \gamma_I^\beta l_I|,$$

где N_I — осевое усилие (σ_{mn}^e , умноженное на площадь поперечного сечения балки); e_I^{η} — осевая деформация; l_I — длина; \mathcal{E}_I — жесткость на растяжение I -го стержня.

3.3. *Конструкции, содержащие пластины.* При рассмотрении пластин анализ задачи может быть осуществлен аналогично предыдущему — напряжения и деформации определяются в соответствии с используемыми кинематическими гипотезами, после чего интегрирование по объемам пластин может быть осуществлено в явном виде.

3.4. *Полумонококовые конструкции.* Пусть в ЯК стержневой каркас воспринимает растяжения/сжатия (см. п. 3.2), а пластины работают только на сдвиг [6]. В этом случае в системе координат, связанной с пластинкой,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ab}^e = \text{const} \\ N_{a,b}^{ij} = \text{const} = \Gamma^{\gamma} \end{array} \right\} \text{ при } ab = ln, \dots, \left. \begin{array}{l} \sigma_{ab}^e = 0 \\ N_{a,b}^{ij} = 0 \end{array} \right\} \text{ при } ab \neq ln, nl.$$

В результате для пластинок

$$(3.10) \quad \begin{aligned} L_{ij\alpha\beta}^i(\sigma_{mn}^e, \mathbf{N}^{p\delta}) &= (\text{mes}P_1)^{-1} \sum_{I=1}^N S_I [\Gamma_I^{\alpha\beta} \Gamma_I^{ij} - \\ &- \Gamma_I^i \gamma_n^\alpha \gamma_l^\alpha - \Gamma_I^{\alpha\beta} \gamma_n^i \gamma_l^j + \gamma_n^i \gamma_n^\alpha \gamma_l^\beta S_I \delta_a^a] \mathcal{L}_I, \quad a, b = l, n. \end{aligned}$$

Здесь S_I — сдвиговые усилия (σ_{mn}^e , умноженное на толщину пластинки); $\Gamma_I^{\alpha\beta}$ — сдвиговая деформация; \mathcal{L}_I — площадь в плане I -й пластинки. Суммирование в (3.10) ведется по числу пластинок в ЯК. Для получения окончательного выражения $L_{ij\alpha\beta}$ следует сложить (3.10) с (3.8).

4. *Методы решения ЯЗ.* Наиболее общим методом определения величин σ_{ij}^e и $\hat{\mathbf{N}}^{p\delta}$ является решение ЯЗ (2.2) численно. Примеры использования метода конечных элементов для решения ЯЗ см., например, в [18]. Однако, если ЯК образована тонкостенными элементами и имеет сложную геометрию, стандартные численные методы оказываются неэффективными и логичным представляется применение методов, явно учитывающих тонкостенность элементов ЯК. Предложенный в [12, 13] подход — один из таких методов. Кроме того, предложенный в [12, 13] метод замены ЯЗ теории упругости на ЯЗ теории балок/пластинок согласуется с методом анализа конечномерных конструкций, хорошо разработанным как в смысле теоретического анализа, так и в смысле наличия программного обеспечения. Рассмотрим применение последнего метода к ЯЗ. Введем обобщенные смещения узлов ЯК ($\mathbf{u}_1, \mathbf{m}_1, \dots$), где \mathbf{u}_1, \dots — собственно смещения, \mathbf{m}_1, \dots — остальные компоненты вектора обобщенных смещений (например, углы поворота концов балок и т.п.). ЯЗ принимает вид

$$(4.1) \quad T\mathbf{W}^{\alpha\beta} = 0 \text{ во внутренних узлах};$$

$$(4.2) \quad (tW^{\alpha\beta})_{a+} = (tW^{\alpha\beta})_{a-} \text{ в граничных узлах;}$$

$$(4.3) \quad (W^{\alpha\beta} - y_{\alpha} e_{\beta})_{a+} = (W^{\alpha\beta} - y_{\alpha} e_{\beta})_{a-} \text{ в граничных узлах;}$$

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^N W_i^{\alpha\beta} - y_{\alpha} e_{\beta} = \sum_{i=1}^N m_i^{\alpha\beta} = 0,$$

$$W^{\alpha\beta} = (u_1^{\alpha\beta}, m_1^{\alpha\beta}, \dots, u_N^{\alpha\beta}, m_N^{\alpha\beta}).$$

Здесь (4.1) — уравнения равновесия (T — матрица влияния) [6, 19]; (4.2), (4.3) — условия периодичности (индексами $a+$ и $a-$ помечены соответствующие друг другу узлы на противоположных гранях ЯП); $tW^{\alpha\beta}$ — усилия в граничных узлах; (4.4) — аналог уравнения $\langle N^{\alpha\beta} \rangle = 0$; N — число элементов ЯК; $y_{\alpha} e_{\beta}$ принимает значения в узлах ЯП. Задача (4.1) — (4.4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, однозначно разрешимую вследствие условия (4.4).

Решив задачу (4.1) — (4.4), на основании принимавшихся кинематических гипотез можно восстановить $U^{\alpha\beta}$ в областях L_j , занятых элементами ЯК, и подсчитать l_{ijk} или $l_{ijkl\alpha\beta}$ согласно формулам, приведенным выше. Для типовых конструктивных элементов (стержни, балки, пластины) можно получить явные выражения l_{ijk} и $l_{ijkl\alpha\beta}$ через обобщенные перемещения их концов.

Отметим, что имеет место формула

$$(4.5) \quad a_{ijk}(0) = \sum_{a \in I_j} (tW^{kl})_i,$$

где суммирование ведется по узлам j -й грани ЯП.

Таким образом, для подсчета величин l_{ijk} и $l_{ijkl\alpha\beta}$, характеризующих влияние начальных напряжений в конечномерных конструкциях, эффективным является матричный метод [6, 19].

З а м е ч а н и е 4.1. Матричный метод может быть применен к конструкции в целом (по поводу учета начальных напряжений и деформаций в конечномерных конструкциях см., например, [6]). При этом возникает большая система линейных уравнений, для анализа которой могут применяться аналоги метода усреднения. Когда есть основания считать (по тем или иным причинам) конструкцию не допускающей усредненного описания, также могут быть применены прямые методы исследования возникающей указанным способом системы уравнений.

5. Примеры.

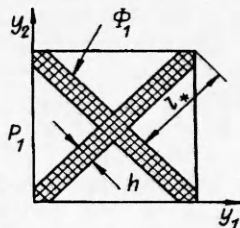
Пример 1 (X-образная ЯП (рис. 2)). Для представленной на рис. 2 балочной ЯК решение ЯЗ может быть получено в явном виде. Пользуясь симметрией ЯК, рассмотрим одну балку (1/4 ЯК). Для нахождения функции U^{11} надо решить для указанной балки задачу об изгибе — растяжении с краевыми условиями

$$w'(0) = w'(l_*) = \alpha(0) = 0, \quad w(l_*) = \alpha(l_*), \quad w(l_*) + \alpha(l_*) = 1/\sqrt{2},$$

где w — нормальный прогиб; v — осевое перемещение (в локальной системе координат); координата l отсчитывается от нуля (центр ЯК); l_* — длина балки.

При использовании классических уравнений [15] получаем

$$w = \frac{1}{\sqrt{2} l_*^3} (l^3 - \frac{3}{2} l_* l^2), \quad v = \frac{1}{2} l.$$



Р и с. 2

Состыковка на гранях ЯП элементов, выходящих на две грани ЯП сразу (рис. 2), требует некоторой модификации методов из [12, 13]. В рассматриваемом

случае в силу симметрии ЯК векторы нормальных усилий нормальны граням ЯП и (см. (4.5))

$$(5.1) \quad \begin{aligned} a_{1111}(0) &= 2(N + Q)/\sqrt{2} = \mathcal{E} + 12D, \\ a_{2211}(0) &= 2(N - Q)/\sqrt{2} = \mathcal{E} - 12D \end{aligned}$$

(\mathcal{E} , D — жесткости балки на растяжение и изгиб, N , Q — осевая и поперечная силы [15]).

Деформации и напряжения в балке, рассматриваемой как трехмерное тело [15—17] в локальной системе координат $\{l, n, \tau\}$, таковы:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} N_{l,l}^{11} &= \sigma' + n w'' = \frac{1}{2\sqrt{2}} + n \frac{6l - 3l_*}{2l_*^2}, \\ N_{n,n}^{11} &= N_{\tau\tau}^{11} = -\nu N_{l,l}^{11}, \quad N_{a,b}^{11} = 0 \text{ при } a \neq b, \\ \sigma_{ii}^e &= E N_{l,l}^{11}, \quad \sigma_{ab}^e = 0 \text{ при } ab \neq ll. \end{aligned}$$

В результате приходим к формулам (3.6), (3.7) с $N_{l,l}^{ab}$, σ_{ij}^e , даваемыми (5.2).

Пусть усредненное напряжение имеет вид $\hat{\sigma}_{11} \neq 0$, $\hat{\sigma}_{ij} = 0$ при $ij \neq 11$. С учетом (5.1) вычисляем усредненные деформации (т.е. $J_{\alpha\beta mn} \hat{\sigma}_{mn}$)

$$e_{11} = \frac{a_{1111}(0)}{\Delta} \hat{\sigma}_{11}, \quad e_{22} = \frac{a_{1122}(0)}{\Delta} \hat{\sigma}_{11},$$

где $\Delta = 24\mathcal{E}D$; $e_{ij} = 0$ при $ij \neq 11, 22$. Величина $\frac{1}{4} l_{111111}$ для 1/4 ЯК (т.е. для балки) есть

$$E \int_{-h/2}^{h/2} \int [(N_{l,l}^{11})^3 - (N_{l,l}^{11})^2 + \frac{1}{2} N_{l,l}^{11}] dl dn.$$

Подставляя сюда $N_{l,l}^{11}$ согласно (5.2) и интегрируя, находим (для всей ЯК)

$$l_{111111} = 4 \frac{5 - 2\sqrt{2}}{32} \hat{\sigma} l_* = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{8} \mathcal{E} l_*.$$

Для подсчета l_{111122} достаточно заметить, пользуясь симметрией ЯК, что N^{22} вычисляется аналогично N^{11} в системе координат, повернутой на 90° . В результате для балки

$$N_{l,l}^{22} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - n \frac{6l - 3l_*}{2l_*^2},$$

а для подсчета l_{111122} следует вычислить интеграл

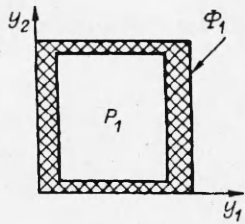
$$E \int_{-h/2}^{h/2} \int [N_{l,l}^{22} (N_{l,l}^{11})^2 - N_{l,l}^{22} N_{l,l}^{11} + \frac{1}{2} N_{l,l}^{22}] dl dn.$$

После интегрирования имеем

$$l_{111122} = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{8} \mathcal{E}.$$

Окончательно для рассматриваемого случая получаем

$$(5.3) \quad \begin{aligned} a_{1111}(\sigma) &= \mathcal{E} + 12D + \left[\frac{5 - 2\sqrt{2}}{8} \frac{\mathcal{E} + 12D}{24D} + 2h\sqrt{2} \right] \hat{\sigma}_{11}, \\ a_{1122}(\sigma) &= \mathcal{E} - 12D + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{8} \frac{\mathcal{E} + 12D}{24D} \hat{\sigma}_{11} = a_{2211}(\sigma), \end{aligned}$$



Р и с. 3

$$a_{2222}(\sigma) = \mathcal{E} + 12D + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{8} \frac{\mathcal{E} + 12D}{24D} \hat{\sigma}_{11}$$

Последнее равенство вытекает из симметрии ЯК.

Применение «промежуточного» усреднения дало бы для величин из (5.3) следующие значения:

$$(5.4) \quad \mathcal{E} + 12D + \hat{\sigma}_{11}, \mathcal{E} - 12D, \mathcal{E} + 12D.$$

Невязки между (5.3) и (5.4) имеют порядок D ($D + h$ для $a_{1111}(\sigma)$), что объясняется тем, что отличие деформаций, соответствующих $U^{\alpha\beta}$ (т.е. локальных деформаций), от однородных деформаций, соответствующих перемещению $y_\alpha e_\beta$, связано именно с изгибными деформациями.

Пример 2 (прямоугольная ЯП (рис. 3)). Пусть усредненная нагрузка направлена вдоль оси (например, вес). В этом случае при $\alpha\beta = 11,22$ имеем $U^{\alpha\beta} = y_\alpha e_\beta$, в результате чего $l_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{\alpha\beta}) = 0$.

Таким образом, отличие $l_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, \tilde{N}^{\alpha\beta})$ от нуля связано с несовпадением локальных деформаций, определяемых из решения ЯЗ, с однородными деформациями, отвечающими глобальным деформациям.

6. Приложение результатов.

6.1. Собственные колебания напряженных конструкций. Уравнения собственных колебаний получаются из (1.2) заменой ρu_i^e на $\lambda^2 \rho u_i^e$ для исходной конструкции и $\langle \rho \rangle u_{ii}$ на $\lambda^2 \langle \rho \rangle u$ для усредненной. Здесь λ_e и λ — собственные частоты реальной и усредненной конструкций. В рамках [13, 14] при $\epsilon \rightarrow 0$ конечные наборы собственных значений с учетом кратности исходной и усредненной задач сходятся (подробнее см. [20]) при условии сходимости решений исходной и усредненной задач (1.2), (1.4). Обоснование можно провести аналогично [21—24].

6.2. Плоские волны. Исходная задача в общем случае не допускает решения в виде плоских волн. Для усредненной задачи такие решения имеются. В силу (1.4) плоские волны описываются уравнением вида $a_{ijkl}(\sigma) n_j n_l X_k = c^2(\rho) X_i$.

З а м е ч а н и е 6.1. Выше предполагается, что операторы $L_\epsilon(\sigma)$ и $\tilde{L}(\sigma)$ имеют компактные обратные, определенные на всем $H^1(Q_\epsilon)$ и $H^1(Q)$ соответственно. Это условие может быть нарушено. В частности, встает вопрос о потере устойчивости напряженных конструкций по «усредненным формам». Заранее можно сказать, что для этой задачи «промежуточное» усреднение будет неприменимо.

З а м е ч а н и е 6.2. Для тонких тел начальные напряжения в ряде случаев усредняются в рамках теории балок. При этом определяющую роль играет порядок начальных напряжений по сравнению с диаметром балки [25, 26].

7. Выводы.

1. При рассмотрении напряженных трехмерных конструкций метод усреднения следует применять непосредственно к исходной задаче.

2. Полученные в работе расчетные формулы для случая малых (по сравнению с упругими постоянными) начальных напряжений применимы для большинства искусственных сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков А.Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных тел // Изв. АН СССР. МТТ. — 1989. — № 3.
2. Kolpakov A.G. Mechanics of composite frameworks // Шестой конгр. по теорет. и прикл. мех., Варна, 1989. Резюме.
3. Kolpakov A.G. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // 2nd World Congress on Comput. Mechanics, Stuttgart, 1990: Extended Abstr. Lect.
4. Kolpakov A.G. Dependence of velocity of elastic waves on initial stresses for laminated media // 4th Intern. Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, Engl., July, 1991: Works in Progress.

5. Kolpakov A.G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Computers and Structures. — 1992. — V. 44, N 1/2.
6. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987.
7. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
8. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
9. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
10. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильнонеоднородных упругих сред. — М.: Наука, 1990.
11. Колпаков А.Г., Колпакова I.G. Convex combinations problem and its application for problem of design of laminated composite materials // IMAC'S 91: 13th World Congress on Comput. and Applied Mathematics, Dublin, Ireland, 1991. — V. 4.
12. Колпаков А.Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ. — 1985. — Т. 49, вып. 6.
13. Колпаков А.Г. Усредненные характеристики термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. МТТ. — 1987. — № 6.
14. Marcelline P. Su una convergenza di funzioni convesse // Boll. Unione Mat. Ital. — 1973. — V. 8, N 1.
15. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979.
16. Колпаков А.Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ. — 1991. — Т. 55, вып. 3.
17. Колпаков А.Г. Расчет и проектирование слоистых пластинок // ПМТФ. — 1989. — № 4.
18. Bendse M.Ph., Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng. — 1988. — V. 71. — P. 197—224.
19. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. — М.: Мир, 1988.
20. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
21. Колпаков А.Г. Эффективные жесткости композиционных пластинок // ПММ. — 1982. — Т. 46, вып. 4.
22. Колпаков А.Г. Усреднение в задаче изгиба и колебаний напряженных неоднородных пластинок // ПММ. — 1987. — Т. 51, вып. 1.
23. Колпаков А.Г. Устойчивость неоднородной пластинки при односторонних ограничениях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд.-ние, Ин-т гидродинамики. — 1981. — Вып. 53.
24. Колпаков А.Г. Усредненные характеристики в задаче устойчивости неоднородных пластинок // II Всесоюз. конф. по теории упругости: Тез. докл. — Тбилиси: Менциереба, 1984.
25. Колпаков А.Г. К задаче теории балок с начальными напряжениями // ПМТФ. — 1992. — № 6.
26. Аннин Б.Д., Каламкаров А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. — Новосибирск: Наука, 1993.

г. Новосибирск

Поступила 17/II 1993 г.,
в окончательном варианте — 29/III 1993 г.

УДК 620.178.7

А.Г. Федоренко, А.Г. Шимаров, М.А. Сырунин

РАЗРАБОТКА И ИСПЫТАНИЯ КРЫШКИ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Крышки сосудов высокого давления в основном работают на квазистатическое давление, хотя могут быть случаи и импульсного нагружения (в защитных устройствах и физических установках с взрывным или иным выделением энергии). Здесь ограничимся расчетной оценкой оптимальной

© А.Г. Федоренко, А.Г. Шимаров, М.А. Сырунин, 1994