

УДК 534.121/122

ВЯЗКОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Н. А. Чернышов, А. Д. Чернышов

Воронежская государственная технологическая академия, 394000 Воронеж

Рассматривается задача об установившихся колебаниях вязкоупругой пластины, имеющей форму правильного треугольника. Колебания происходят вследствие действия равномерно распределенной нагрузки, которая изменяется по гармоническому закону, и колебаний свободно опертой границы пластины как жесткого целого с той же частотой. Исследованы линии уровней амплитуды колебаний, приведены графики распределения амплитуды по высоте треугольника.

Методом конечных элементов в [1] решена задача о поперечных колебаниях упругой пластины, покрытой вязкоупругим демпфирующим слоем. Изучено влияние параметров вязкоупругого слоя, температуры и модулей упругости пластины на затухание свободных колебаний. В [2] проведено аналитическое исследование показателей устойчивости сжатых вязкоупругих прямоугольных пластин со свободно опертыми краями на вязкоупругом основании. Разработана модель рассматриваемой задачи устойчивости и выведены определяющие дифференциальные уравнения для описания процесса вязкоупругого деформирования пластины. В [3] предложен метод расчета вынужденных поперечных колебаний прямоугольных тонких пластин с учетом энергетических потерь в циклически деформируемом материале при силовом гармоническом возбуждении. Аналитическое исследование колебаний неконсервативной упругой пластинчатой системы в [3] проводится на основе асимптотических методов нелинейной механики. Точное решение задачи о колебаниях упругой пластины треугольной формы получено в [4], там же приведены выражения для резонансных частот.

1. Постановка задачи. Для вязкоупругого тела при линейном напряженном состоянии зависимость между тензором напряжений σ_{ij} и тензором деформаций e_{ij} и скоростью деформаций ε_{ij} можно представить в виде [5]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda_e(e_x + e_y) + 2\mu_e e_x + \lambda_\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu_\nu \varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda_e(e_x + e_y) + 2\mu_e e_y + \lambda_\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu_\nu \varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = 2\mu_e e_{xy} + 2\mu_\nu \varepsilon_{xy},\end{aligned}$$

где λ_e, μ_e — упругие коэффициенты Ламе; λ_ν, μ_ν — коэффициенты вязкости. Следуя [5], эти формулы перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_x + \nu e_y) + \frac{E\nu}{1-\nu_\nu^2}(\varepsilon_x + \nu_\nu \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_y + \nu e_x) + \frac{E\nu}{1-\nu_\nu^2}(\varepsilon_y + \nu_\nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G e_{xy} + G_\nu \varepsilon_{xy}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\lambda_e + 2\mu_e &= \frac{E}{1-\nu^2}, & \lambda_e &= \frac{E\nu}{1-\nu^2}, & G &= 2\mu_e, \\ \lambda_\nu + 2\mu_\nu &= \frac{E\nu}{1-\nu_\nu^2}, & \lambda_\nu &= \frac{E\nu\nu_\nu}{1-\nu_\nu^2}, & G_\nu &= 2\mu_\nu.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Использование в (1.1) одинакового представления для вязких и упругих постоянных позволяет записать динамическое уравнение движения пластины относительно прогиба W в удобной форме

$$D_e \nabla^4 W + D_\nu \nabla^4 W_t = q - \rho H W_{tt}, \quad D_e = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_\nu = \frac{E_\nu H^3}{12(1-\nu_\nu^2)}. \quad (1.2)$$

Пусть равносторонняя вязкоупругая треугольная пластина подвержена действию равномерно распределенной нагрузки, которая изменяется по закону $q = q_0 \cos \omega t$. Граница свободно опертой пластины как жесткое целое совершает гармонические колебания:

$$W|_\Gamma = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} \Big|_\Gamma = 0. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.2) представим в виде

$$W = U(x, y) \cos \omega t + V(x, y) \sin \omega t. \quad (1.4)$$

Подставляя W из (1.4) в уравнение (1.2), для U и V получим систему дифференциальных уравнений

$$D_e \nabla^4 U + D_\nu \omega \nabla^4 V = q_0 + \rho H \omega^2 U, \quad D_e \nabla^4 V - D_\nu \omega \nabla^4 U = \rho H \omega^2 V, \quad (1.5)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Для того чтобы исключить $\nabla^4 V$ и V из второго дифференциального уравнения (1.5), выразим $\nabla^4 V$ из первого уравнения:

$$\nabla^4 V = \frac{q_0 + \rho H \omega^2 U - D_e \nabla^4 U}{D_\nu \omega}. \quad (1.6)$$

Исключим $\nabla^4 V$ из второго уравнения (1.5):

$$D_\nu^2 \omega^2 \nabla^4 U = -D_\nu \rho H \omega^3 V + D_e (q_0 + \rho H \omega^2 U - D_e \nabla^4 U). \quad (1.7)$$

Применим операцию ∇^4 к левой и правой частям уравнения (1.7) и вновь исключим $\nabla^4 V$ из полученного уравнения с использованием (1.6). В результате получим одно дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно неизвестной функции U

$$(D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2) \nabla^8 U - 2\rho H \omega^2 D_e \nabla^4 U + (\rho H \omega^2)^2 U = -\rho H \omega^2 q_0. \quad (1.8)$$

Функция V выражается из (1.7) по следующей формуле:

$$V = \frac{\rho H \omega^2 D_e U - (D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2) \nabla^4 U + D_e q_0}{\rho H \omega^3 D_\nu}. \quad (1.9)$$

Граничные условия для U и V можно найти из (1.3) после подстановки в них (1.4):

$$U|_\Gamma = a, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \Big|_\Gamma = 0, \quad V|_\Gamma = b, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \Big|_\Gamma = 0. \quad (1.10)$$

Полученное дифференциальное уравнение (1.8) имеет восьмой порядок при четырех граничных условиях (1.10). Высокий порядок значительно осложняет нахождение точного решения поставленной задачи.

2. Построение точного решения. Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения для U из (1.8), предполагая, что функция U зависит только от одной геометрической координаты x , т. е. $U = U(x)$. Функцию $U(x)$ назовем фундаментальной и обозначим через $F(x)$. Тогда для $F(x)$ из (1.8) получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2) F^{\text{VIII}} - 2\rho H \omega^2 D_e F^{\text{IV}} + (\rho H \omega^2)^2 F = -\rho H \omega^2 q_0. \quad (2.1)$$

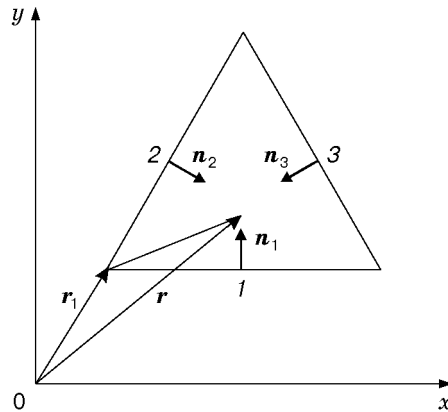


Рис. 1

Найдем общее решение однородного уравнения $(D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2)F^{\text{VIII}} - 2\rho H \omega^2 D_e F^{\text{IV}} + (\rho H \omega^2)^2 F = 0$. Его характеристическое уравнение $(D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2)\alpha^{\text{VIII}} - 2\rho H \omega^2 D_e \alpha^{\text{IV}} + (\rho H \omega^2)^2 = 0$ имеет следующие корни:

$$\alpha_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\rho H \omega^2} \left(\pm \sqrt{D_e + \sqrt{D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2}} + \sqrt[4]{4D_e^2 + 4D_\nu^2 \omega^2} \right)}{\sqrt{8D_e^2 + 8D_\nu^2 \omega^2}}},$$

$$\alpha_{5,6,7,8} = \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{\rho H \omega^2} \left(\pm \sqrt{D_e + \sqrt{D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2}} + \sqrt[4]{4D_e^2 + 4D_\nu^2 \omega^2} \right)}{\sqrt{8D_e^2 + 8D_\nu^2 \omega^2}}}.$$

Решение неоднородного уравнения (2.1) записывается в виде

$$F(x) = e^{\lambda x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (C_5 \cos \lambda x + C_6 \sin \lambda x) + e^{-\alpha x} (C_7 \cos \lambda x + C_8 \sin \lambda x) - \bar{Q},$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho H \omega^2}{D_e}} \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta\sqrt{8}}}, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho H \omega^2}{D_e}} \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\theta}} - \frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta\sqrt{8}}}, \quad (2.2)$$

$$\bar{Q} = \frac{q_0}{\rho H \omega^2}, \quad \theta = \sqrt{1 + \left(\frac{D_\nu \omega}{D_e}\right)^2}.$$

Для построения решения введем три вспомогательные переменные ξ_i :

$$\xi_i = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор произвольной точки из области Ω правильного треугольника; \mathbf{r}_i — радиус-вектор вершин треугольника; \mathbf{n}_i — единичные нормали к сторонам треугольника, направленные внутрь Ω (рис. 1). Переменные ξ_i имеют следующий геометрический смысл: величина $\xi_i(x_0, y_0)$, вычисленная в точке $M(x_0, y_0)$ внутри области правильного треугольника Ω , равна расстоянию от этой точки до соответствующей i -й стороны треугольника.

Переменные ξ_i имеют следующие свойства.

1. Уравнения сторон треугольника 1–3 (рис. 1) имеют вид $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$.

2. Сумма переменных ξ_i является постоянным числом. Для доказательства этого свойства используем равенство

$$\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 = 0. \quad (2.4)$$

Тогда с использованием (2.3) и (2.4) получим $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \mathbf{r}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3) - \mathbf{r}_1\mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_2\mathbf{n}_2 - \mathbf{r}_3\mathbf{n}_3 = -\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_2\mathbf{n}_2 - \mathbf{r}_3\mathbf{n}_3$. Отсюда

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \text{const}. \quad (2.5)$$

Для точки в вершине треугольника имеем

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = h. \quad (2.6)$$

Тогда для суммы переменных ξ_i из (2.5) с использованием (2.6) найдем соотношение

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = h, \quad (2.7)$$

где h — высота треугольной пластины. Это равенство означает, что сумма расстояний (с учетом знаков) от любой точки плоскости до сторон правильного треугольника есть постоянная величина, равная его высоте.

3. Если функция $F(\xi_i)$ зависит только от одной геометрической переменной ξ_i , то, используя инвариантность оператора Лапласа относительно поворота системы координат и переноса начала координат, получим вспомогательные дифференциальные равенства

$$\nabla^2 F(\xi_i) = \frac{d^2 F(\xi_i)}{d\xi_i^2} = F'', \quad \nabla^4 F(\xi_i) = \frac{d^4 F(\xi_i)}{d\xi_i^4} = F^{IV}.$$

Если в функцию $F(\xi_i)$ последовательно подставить три переменные ξ_i , то в результате получим три одинаковые функции $F(\xi_1)$, $F(\xi_2)$ и $F(\xi_3)$ с разными переменными. Кроме этих функций введем также функции

$$F(\xi_1 + \xi_2), \quad F(\xi_1 + \xi_3), \quad F(\xi_2 + \xi_3), \quad (2.8)$$

удовлетворяющие дифференциальному уравнению (2.1). Докажем это только для $F(\xi_1 + \xi_2)$.

Сумму $\xi_1 + \xi_2$ с использованием (2.7) представим в виде $\xi_1 + \xi_2 = h - \xi_3$, т. е. $F(\xi_1 + \xi_2) = F(h - \xi_3)$. Так как $F(\xi_3)$ из (2.2), где $x = \xi_3$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1), то и при $x = h - \xi_3$ функция $F(h - \xi_3)$ также будет удовлетворять уравнению (2.1).

Используя принцип суперпозиций, через три функции $F(\xi_i)$ и три функции (2.8) решение задачи (2.1) представим следующим образом:

$$U = F(\xi_1) + F(\xi_2) + F(\xi_3) - F(\xi_1 + \xi_2) - F(\xi_2 + \xi_3) - F(\xi_1 + \xi_3) - \frac{q_0}{\rho H \omega^2 - k}. \quad (2.9)$$

С учетом (1.10) граничные условия имеют вид

$$U|_{\Gamma} = F(0) - F(h) - \frac{q_0}{\rho H \omega^2} = a, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = F''(0) - F''(h) = 0, \\ V|_{\Gamma} = \frac{\rho H \omega^2 D_e a + D_e q_0 - (D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2)(F^{IV}(0) - F^{IV}(h))}{\rho H \omega^3 D_\nu} = b, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = F^{VI}(0) - F^{VI}(h) = 0.$$

Найдем решение для U , подставляя (2.2) в (2.9), и представим его в виде

$$U = C_1 \varphi(\lambda, \varkappa) + C_2 \psi(\lambda, \varkappa) + C_3 \varphi(-\lambda, \varkappa) + C_4 \psi(-\lambda, \varkappa) + \\ + C_5 \varphi(\varkappa, \lambda) + C_6 \psi(\varkappa, \lambda) + C_7 \varphi(-\varkappa, \lambda) + C_8 \psi(-\varkappa, \lambda) - q_0 / (\rho H \omega^2), \\ \varphi(\lambda, \varkappa) = e^{\lambda \xi_1} \cos \varkappa \xi_1 + e^{\lambda \xi_2} \cos \varkappa \xi_2 + e^{\lambda \xi_3} \cos \varkappa \xi_3 - \\ - e^{\lambda(h-\xi_1)} \cos \varkappa(h - \xi_1) - e^{\lambda(h-\xi_2)} \cos \varkappa(h - \xi_2) - e^{\lambda(h-\xi_3)} \cos \varkappa(h - \xi_3), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \varkappa) = & e^{\lambda\xi_1} \sin \varkappa\xi_1 + e^{\lambda\xi_2} \sin \varkappa\xi_2 + e^{\lambda\xi_3} \sin \varkappa\xi_3 - \\ & - e^{\lambda(h-\xi_1)} \sin \varkappa(h-\xi_1) - e^{\lambda(h-\xi_2)} \sin \varkappa(h-\xi_2) - e^{\lambda(h-\xi_3)} \sin \varkappa(h-\xi_3). \end{aligned}$$

Покажем, что из восьми функций $\varphi(\pm\lambda, \varkappa)$, $\psi(\pm\lambda, \varkappa)$, $\varphi(\pm\varkappa, \lambda)$ и $\psi(\pm\varkappa, \lambda)$, входящих в (2.1), четыре функции $\varphi(-\lambda, \varkappa)$, $\psi(-\lambda, \varkappa)$, $\varphi(-\varkappa, \lambda)$ и $\psi(-\varkappa, \lambda)$ линейно выражаются через оставшиеся четыре функции $\varphi(\lambda, \varkappa)$, $\psi(\lambda, \varkappa)$, $\varphi(\varkappa, \lambda)$ и $\psi(\varkappa, \lambda)$. Эта зависимость имеет место при условии существования связи (2.7) между переменными ξ_i . Можно показать, что с использованием равенства (2.7) функция $\varphi(-\lambda, \varkappa)$ представляется в виде

$$\varphi(-\lambda, \varkappa) = -e^{-\lambda h} [\cos \varkappa h \varphi(\lambda, \varkappa) + \sin \varkappa h \psi(\lambda, \varkappa)]. \quad (2.12)$$

В аналогичном виде записываются функции

$$\begin{aligned} \varphi(-\varkappa, \lambda) &= -e^{-\varkappa h} [\cos \lambda h \varphi(\varkappa, \lambda) + \sin \lambda h \psi(\varkappa, \lambda)], \\ \psi(-\varkappa, \lambda) &= e^{-\varkappa h} [\cos \lambda h \psi(\varkappa, \lambda) - \sin \lambda h \varphi(\varkappa, \lambda)], \\ \psi(-\lambda, \varkappa) &= e^{-\lambda h} [\cos \varkappa h \psi(\lambda, \varkappa) - \sin \varkappa h \varphi(\lambda, \varkappa)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу существования линейных связей (2.12) и (2.13) в решении (2.11) вместо восьми слагаемых достаточно оставить четыре линейно независимых, полагая, например, $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$. Тогда после нахождения C_1, C_3, C_5, C_7 из граничных условий (2.10) решение для U будет выражено только через четыре функции $\varphi(\pm\lambda, \varkappa)$ и $\varphi(\pm\varkappa, \lambda)$:

$$\begin{aligned} U &= C_1\varphi(\lambda, \varkappa) + C_3\varphi(-\lambda, \varkappa) + C_5\varphi(\varkappa, \lambda) + C_7\varphi(-\varkappa, \lambda) - q_0/(\rho H\omega^2), \\ C_1 &= \frac{R(\lambda, \varkappa)}{M(\lambda, \varkappa)}, \quad C_3 = -e^{2\lambda h} \frac{R(-\lambda, -\varkappa)}{M(\lambda, \varkappa)}, \quad C_5 = \frac{R(\varkappa, -\lambda)}{M(\varkappa, \lambda)}, \quad C_7 = -e^{2\varkappa h} \frac{R(-\varkappa, \lambda)}{M(\varkappa, \lambda)}, \\ M(\lambda, \varkappa) &= 8\lambda\varkappa(\lambda^2 - \varkappa^2) \sin \varkappa h (2e^{\lambda h} \cos \varkappa h - e^{2\lambda h} - 1), \quad R(\lambda, \varkappa) = N_1(e^{\lambda h} - \cos \varkappa h) - N_2 \sin \varkappa h, \\ N_1 &= \left(a + \frac{q_0}{\rho H\omega^2} \right) (\lambda^4 - 6\lambda^2\varkappa^2 + \varkappa^4) - \frac{D_e q_0 + \rho H\omega^2 (D_e a - D_\nu \omega b)}{D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2}, \\ N_2 &= 4\lambda\varkappa(a + q_0/(\rho H\omega^2))(\lambda^2 - \varkappa^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для того чтобы найти решение для V , найдем сначала $\nabla^4 U$:

$$\begin{aligned} \nabla^4 U &= (\lambda^4 - 6\lambda^2\varkappa^2 + \varkappa^4)(C_1\varphi(\lambda, \varkappa) + C_3\varphi(-\lambda, \varkappa) + C_5\varphi(\varkappa, \lambda) + C_7\varphi(-\varkappa, \lambda)) + \\ &+ 4\lambda\varkappa(\varkappa^2 - \lambda^2)(C_1\psi(\lambda, \varkappa) - C_3\psi(-\lambda, \varkappa) - C_5\psi(\varkappa, \lambda) + C_7\psi(-\varkappa, \lambda)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Решение для V получим из формулы (1.9), подставляя в нее известные выражения (2.14) и (2.15):

$$V = \frac{(D_e \rho H\omega^2 - (D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2)(\lambda^4 - 6\lambda^2\varkappa^2 + \varkappa^4))G_1 - 4\lambda\varkappa(\varkappa^2 - \lambda^2)(D_e^2 + D_\nu^2 \omega^2)G_2}{D_\nu \rho H\omega^3}, \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= C_1\varphi(\lambda, \varkappa) + C_3\varphi(-\lambda, \varkappa) + C_5\varphi(\varkappa, \lambda) + C_7\varphi(-\varkappa, \lambda), \\ G_2 &= C_1\psi(\lambda, \varkappa) - C_3\psi(-\lambda, \varkappa) - C_5\psi(\varkappa, \lambda) + C_7\psi(-\varkappa, \lambda). \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Исследование свойств колебательного процесса. В частном случае $\lambda_\nu = \mu_\nu = 0$, когда пластина упругая, резонанс наступает при [4]

$$\omega_n^* = \frac{4\pi^2 n^2}{h^2} \sqrt{\frac{D}{\rho H}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

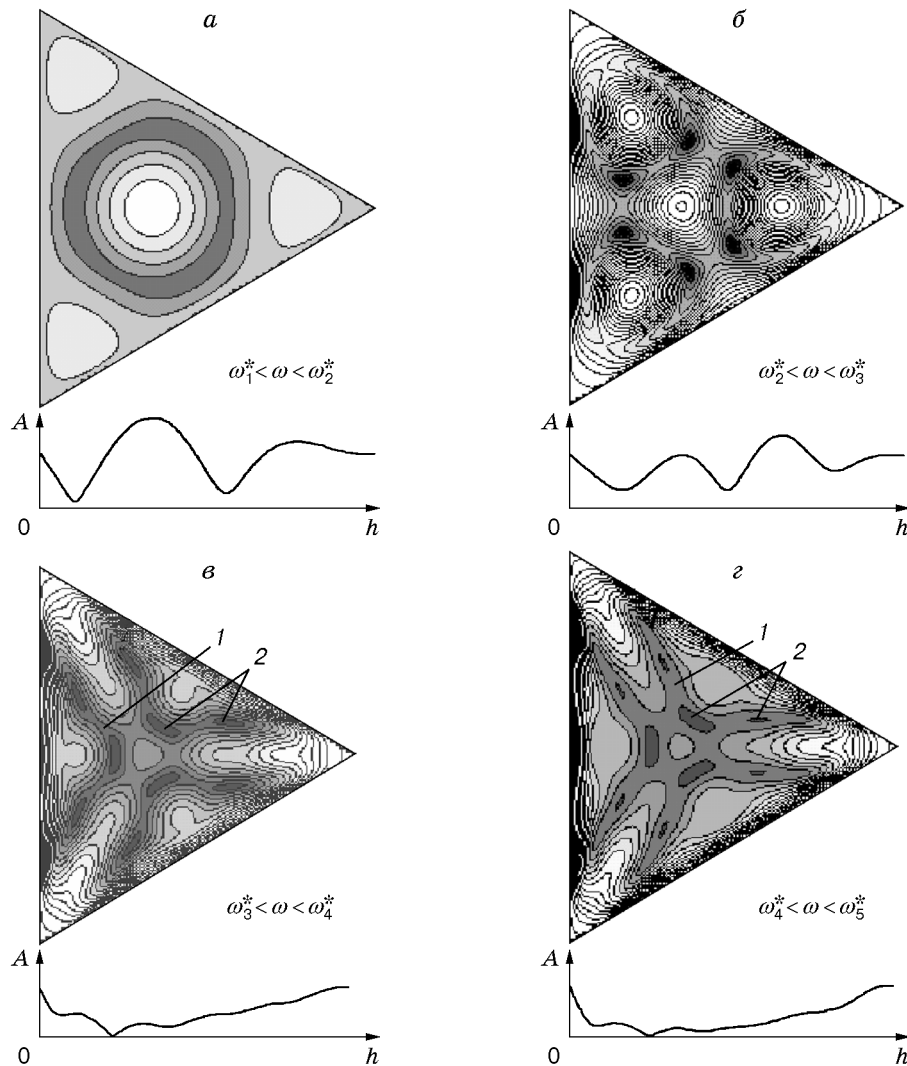


Рис. 2

Колебательный процесс в вязкоупругих системах характеризуется отсутствием резонанса, т. е. амплитуда колебаний пластины при нестационарных процессах колебаний не стремится к бесконечности, а достигает определенного максимума, зависящего от вязких и упругих свойств пластины. Нахождение максимальной амплитуды колебаний пластины аналитическим путем осложняется тем, что решения для U и V имеют громоздкий вид. Поэтому в данной работе амплитуда определяется численным методом.

При исследовании поведения вязкоупругой пластины с различными частотами колебаний важными являются условия, при которых возникают узловые зоны, где отсутствуют вертикальные перемещения точек срединной плоскости. В этом случае амплитуда колебаний равна нулю при условии $\sqrt{U^2 + V^2} = 0$.

Используя равенство $U = 0$, из выражения (2.14) найдем

$$G_1 = q_0 / (\rho H \omega^2), \tag{3.1}$$

где G_1 определено в (2.17). Далее, подставляя (3.1) в решение (2.17) при $V = 0$, получим уравнение узловых зон

$$(D_e \rho H \omega^2 - (D_e^2 + D_v^2 \omega^2)(\lambda^4 - 6\lambda^2 \varkappa^2 + \varkappa^4)) \frac{q_0}{\rho H \omega^2} - 4\lambda \varkappa (\varkappa^2 - \lambda^2) (D_e^2 + D_v^2 \omega^2) G_2 = 0.$$

При отсутствии внешней нагрузки, т. е. когда $q_0 = 0$, уравнение узловых зон сильно упрощается: $G_2 = 0$.

На практике в различных конструктивных элементах часто используются материалы с различной вязкостью. Для того чтобы выявить особенности колебательного процесса таких пластин, введем коэффициент, характеризующий отношение между вязкими и упругими свойствами: $\chi = D_\nu/D_e$.

На рис. 2 изображены линии уровней амплитуды $A = \text{const}$ и распределения амплитуды по высоте правильного треугольника ($h = 200$ см) для вязкоупругой пластины при $\chi = 0,0005$ с для частот, находящихся между резонансными частотами упругой пластины.

Поведение пластины резко меняется начиная с интервала частот $\omega_3^* < \omega < \omega_4^*$. Появляются узловые зоны 1 с амплитудой колебаний, близкой к нулю, которые представляют собой девять овальных пятен (рис. 2, в). Следует отметить, что кроме этих узловых зон существуют также зоны с малой амплитудой колебаний 2 (рис. 2, в), образующие сложную фигуру с шестью продолговатыми отростками, исходящими из центра пластины.

В заключение отметим следующие особенности колебаний треугольной пластины. Из анализа полученного точного решения следует, что существуют узловые зоны, которые при колебаниях пластины остаются неподвижными. К узловым зонам прилегают зоны с малой амплитудой колебаний, размер которых увеличивается с ростом частоты колебаний. Эти зоны располагаются близко от центра (рис. 2, г). При дальнейшем увеличении частоты зоны с малой амплитудой колебаний разрастаются и занимают всю центральную часть пластины. В этом случае колебания совершают только приграничные участки пластины вследствие вынужденных колебаний ее границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sing Y., Ahmad M., Hilton H. H. Dynamic responses of plates with viscoelastic free layer damping treatment // Trans. ASME. J. Vibr., Acoust., Stress Reliability Design. 1996. N 118. P. 362–367.
2. Yuanyuan Z., Changjun C. Stability analysis of viscoelastic rectangular plates // Acta Mech. Solida Sinica. 1996. N 17. P. 275–282.
3. Бошнич О. Е. Расчет колебаний пластин при гармоническом возбуждении различного типа с учетом диссипации энергии в материале // Пробл. прочности. 1997. № 4. С. 1170–129.
4. Чернышов Н. А., Чернышов А. Д. Колебания треугольной упругой пластины под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения // Изв. инж.-технол. акад. Чуваш. респ. 1998. № 11. С. 87–95.
5. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985.

*Поступила в редакцию 13/VII 2000 г.,
в окончательном варианте — 9/XI 2000 г.*