

УДК 539.375

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЕ

М. В. Мир-Салим-заде

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассмотрена задача механики разрушения о зарождении дефекта типа трещины в подкрепленной пластине. Зародышевая трещина моделируется полосой предразрушения со связями между берегами, которая рассматривается как область ослабленных межчастичных связей материала. Краевая задача о равновесии подкрепленной пластины с зародышевой трещиной сводится к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения найдены усилия в полосе зарождения трещины. Рассмотрен случай напряженного состояния, когда в пластине имеется периодическая система полос предразрушения.

Ключевые слова: полоса предразрушения, силы сцепления материала, усилия в связях между берегами, появление трещины.

Для обеспечения достаточной прочности листовые конструкции обычно изготавливают из тонких пластин, усиленных приклепанными ребрами жесткости. Исследованию деформирования неограниченной пластины, усиленной регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой узкие прямоугольники, посвящено большое количество работ (см., например, [1–4]). Значительное внимание уделялось изучению разрушения пластины, подкрепленной регулярной системой стрингеров [5–9]. Во всех указанных работах авторы ограничивались рассмотрением трещины Гриффитса. В то же время большое значение имеет исследование зарождения дефекта типа трещины.

Постановка задачи. Рассматривается упругая изотропная тонкая пластина, к которой приклепаны поперечные ребра жесткости в точках $z = \pm(2m + 1)L \pm iny_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$). На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингера напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Для стрингера принимается гипотеза об одномерном континууме, заключающаяся в том, что при деформации толщина стрингера не меняется, напряженное состояние стрингера является одноосным. Стрингеры не сопротивляются на изгиб, а работают лишь на растяжение.

Принимаются следующие допущения:

- 1) в тонкостенном листовом элементе конструкции (пластине) реализуется плоское напряженное состояние;
- 2) подкрепляющая система стрингеров представляет собой ферму, ослабление стрингеров вследствие наличия на них крепления не учитывается;
- 3) листовой элемент и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в зонах крепления;
- 4) все зоны (точки) крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с шагом расположения и другими характерными размерами;
- 5) воздействие точки крепления как на стрингер, так и на пластину моделируется действием сосредоточенной силы.

В расчетной схеме действие стрингеров моделируется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер со средой. По

мере нагружения подкрепленной пластины силовой нагрузкой в пластине возникают зоны предразрушения, моделируемые областями ослабленных связей материала. Принято, что полоса предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в подкрепленной пластине. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от выбранного материала. В общем случае закон деформирования для связей является нелинейным [10–12].

Задачу о напряженно-деформированном состоянии твердого деформированного тела, когда в теле имеются прослойки “перенапряженного” материала, можно свести к задаче о напряженно-деформированном состоянии в упругом теле, ослабленном разрезом, поверхности которого взаимодействуют по некоторому закону. При таком подходе к решению задачи о зарождении дефекта типа трещины прежде всего необходимо установить зависимость между усилиями и перемещениями в той части деформируемого материала, где имеют место силы межчастичного взаимодействия (притяжения между берегами). В общем случае решение задачи существенно затруднено.

В исследуемом случае возникновение дефекта типа трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Поскольку зона предразрушения мала по сравнению с остальной частью подкрепленной пластины, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом, поверхности которого взаимодействуют по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. При этом размер зоны предразрушения неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Исследование областей с нарушенной структурой материала показывает, что на начальной стадии зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, с увеличением нагрузки появляется вторичная система зон, содержащих материал с частично нарушенными связями [13].

Рассмотрим полосу предразрушения длиной $2l$, расположенную на отрезке оси абсцисс $y = 0$, $|x| \leq l$. Берега полосы предразрушения взаимодействуют через связи и тем самым сдерживают зарождение дефекта (трещины). При математическом моделировании взаимодействия берегов полосы предразрушения считаем, что между берегами имеются связи (силы сцепления), закон деформирования которых задан. При действии внешних нагрузок на пластину в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, возникают усилия $q(x)$, которые из-за симметрии задачи относительно оси абсцисс имеют только нормальную составляющую. Величина этих напряжений $q(x)$ и размер l полосы предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

В рассматриваемой задаче краевые условия на берегах полосы предразрушения имеют вид

$$y = 0, |x| \leq l: \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = q(x). \quad (1)$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытие берегов полосы предразрушения и усилия в связях. Без потери общности это уравнение можно представить в виде [14]

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, q)q(x), \quad (2)$$

где $v^+ - v^-$ — нормальная составляющая раскрытия берегов полосы предразрушения; x — аффикс точек полосы предразрушения; $C(x, q)$ — эффективная податливость связей, зависящая от их натяжения.

С использованием формул Колосова — Мусхелишвили [15] и краевых условий на берегах полосы предразрушения задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из граничных условий

$$y = 0, |x| \leq l: \quad \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + \bar{x}\Phi'(x) + \Psi(x) = q(x). \quad (3)$$

Для определения значений внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения

$$v^+ - v^- = \delta_c, \quad (4)$$

где δ_c — характеристика сопротивления материала трещинообразованию. Это условие позволяет определить параметры подкрепленной пластины, при которых в пластине появляется трещина.

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (3) ищем в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad (5)$$

где $\Phi(z) = \varphi'(z)$; $\Psi(z) = \psi'(z)$; функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ определяют поля напряжений и деформаций в сплошной пластине без полосы предразрушения.

В рассматриваемом случае в качестве $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ возьмем функции

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{4} \sigma_0 z - \frac{i}{2\pi(1 + \kappa_0)h} \sum'_{m=-\infty} \sum'_{n=-\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n}, \\ \psi_0(z) &= \frac{1}{2} \sigma_0 z - \frac{i\kappa_0}{2\pi(1 + \kappa_0)h} \sum'_{m=-\infty} \sum'_{n=-\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi(1 + \kappa_0)h} \sum'_{m=-\infty} \sum'_{n=-\infty} P_{mn} \left(\frac{m_*L - iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \frac{m_*L + iy_0n}{z - m_*L + iy_0n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс $n = m = 0$; h — толщина пластины; y_0 — шаг расположения точек крепления; L — половина расстояния между стрингерами; κ_0 — упругая постоянная Мусхелишвили; $m_* = 2m + 1$; P_{mn} — сосредоточенные силы, подлежащие определению.

Для определения аналитических функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z) = z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)$ на основе (3), (5), (6) получаем граничную задачу

$$y = 0, |x| \leq l: \quad \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \Omega_1(z) = q(x) + f(x), \quad (7)$$

где $f(x) = -[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\Phi_0'(x) + \Psi_0(x)]$.

Поскольку напряжения в упругой пластине ограничены, решение краевой задачи (7) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Следует отметить, что в силу условий симметрии задачи относительно оси Ox функция $f(x)$ действительна, поэтому с использованием (7) на всей действительной оси $\text{Im } \Omega_1(z) = 0$. Следовательно, учитывая условия на бесконечности, получаем $\Omega_1(z) = 0$.

Итак, для функции $\Phi_1(z)$ получаем задачу Дирихле

$$\begin{aligned} y = 0, |x| \leq l: \quad \text{Re } \Phi_1(z) &= [f(x) + q(x)]/2, \\ z \rightarrow \infty: \quad \Phi_1(z) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Искомое решение задачи (8) записывается в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{z^2 - l^2}}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{[f(x) + q(x)] dx}{\sqrt{x^2 - l^2} (x - z)}. \quad (9)$$

С учетом поведения функции $\Phi_1(z)$ на бесконечности условие разрешимости краевой задачи (8) имеет вид

$$\int_{-l}^l \frac{f(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \int_{-l}^l \frac{q(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0. \quad (10)$$

Это соотношение служит для определения размера l полосы предразрушения.

С помощью формул (6) для функции $f(x)$ получаем явное соотношение

$$f(x) = -\sigma_0 + \frac{1}{\pi h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \frac{ny_0}{n^2 y_0^2 + (x - m_* L)^2} \left(\frac{3+v}{2} - (1+v) \frac{(x - m_* L)^2}{n^2 y_0^2 + (x - m_* L)^2} \right) + \\ + \frac{1}{\pi h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \frac{ny_0}{n^2 y_0^2 + (x + m_* L)^2} \left(\frac{3+v}{2} - (1+v) \frac{(x + m_* L)^2}{n^2 y_0^2 + (x + m_* L)^2} \right).$$

Для определения величин сосредоточенных сил P_{mn} ($m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$) используем закон Гука, согласно которому величина сосредоточенной силы P_{mn} , действующей на каждую точку крепления со стороны ребра жесткости, равна

$$P_{mn} = \frac{E_s F}{2y_0 n} \Delta v_{mn}. \quad (11)$$

Здесь E_s — модуль Юнга материала ребра жесткости; F — площадь поперечного сечения ребра жесткости; $2y_0 n$ — расстояние между точками крепления; Δv_{mn} — относительное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка ребра жесткости.

Обозначим через a радиус зоны (точки) крепления. Примем естественное допущение о том, что в рассматриваемой задаче теории упругости относительное смещение точек $z = m_* L + i(ny_0 - a)$ и $z = m_* L - i(ny_0 - a)$ равно относительному смещению точек крепления Δv_{mn} [16]. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет найти решение поставленной выше задачи.

С помощью комплексных потенциалов (5), (6), (9) и формул Колосова — Мусхелишвили [15] находим относительное смещение точек крепления Δv_{mn} :

$$\Delta v_{kr} = \Delta v_{kr}^0 + \Delta v_{kr}^1, \\ \Delta v_{kr}^0 = \frac{1}{2\pi(1 + \varkappa_0)\mu h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \left[\varkappa_0 \ln \frac{C_1^2 C_2^2}{C_3 C_4 C_5 C_6} + \right. \\ \left. + b_2 b \left(\frac{2k(k-m)L^2 + ab}{C_3 C_1} + \frac{2k(k+m)L^2 + ab}{C_4 C_2} \right) + \right. \\ \left. + b_3 b_1 \left(\frac{2k(k-m)L^2 + ab_1}{C_5 C_1} + \frac{2k(k+m)L^2 + ab_1}{C_6 C_2} \right) \right] + \frac{\sigma_0}{\mu} (1 + \varkappa_0) b_4, \\ \Delta v_{kr}^1 = \frac{1}{\pi \mu} \int_0^l \frac{[f(t) + q(t)] F(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} dt.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 b &= (r - n)y_0 - a, & b_1 &= (r + n)y_0 - a, & b_2 &= 2(r - n)y_0, & b_3 &= 2(r + n)y_0, \\
 b_4 &= ry_0 - a, & C_1 &= (k - m)^2 L^2 + a^2, & C_2 &= (k + m)^2 L^2 + a^2, & C_3 &= (k - m)^2 L^2 + b^2, \\
 C_4 &= (k + m)^2 L^2 + b^2, & C_5 &= (k - m)^2 L^2 + b_1^2, & C_6 &= (k + m)^2 L^2 + b_1^2, \\
 F(t) &= (1 + \varkappa_0)f_1(t) + 2b_4 f_2(t),
 \end{aligned}$$

$$f_1(t) = D \sin \varphi + \sqrt{l^2 - t^2} \ln \frac{D^2 \cos^2 \varphi + (D \sin \varphi - \sqrt{l^2 - t^2})^2}{D^2 \cos^2 \varphi + (D \sin \varphi + \sqrt{l^2 - t^2})^2},$$

$$f_2(t) = \frac{D}{d^2 + d_1^2} [kL(d \cos \varphi - d_1 \sin \varphi) - b_4(d_1 \cos \varphi + d \sin \varphi)], \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{d_1}{B_1},$$

$$B_1 = k^2 L^2 - l^2 - b_4^2, \quad d_1 = 2kLb_4, \quad d = t^2 - k^2 L^2 + b_4^2, \quad D = \sqrt{A_1}, \quad A_1 = \sqrt{B_1^2 + d_1^2}.$$

Правая часть соотношений (11) содержит неизвестный параметр l , характеризующий длину полосы предразрушения, и усилия $q(x)$ в связях между берегами полосы предразрушения.

Для окончательного определения комплексного потенциала $\Phi_1(z)$ необходимо найти усилия $q(x)$ в связях. Используя соотношение Колосова — Мусхелишвили и граничное значение функции $\Phi_1(z)$, на отрезке $|x| \leq l$ получим следующее равенство:

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \frac{2\mu i}{1 + \varkappa_0} \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-). \tag{12}$$

Используя формулы Сохоцкого — Племяля [15], с учетом формулы (9) находим

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -\frac{i\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi} \left(\int_{-l}^l \frac{f(t) + q(t)}{\sqrt{l^2 - t^2} (t - x)} dt \right). \tag{13}$$

Подставив выражение (13) в левую часть уравнения (12) с учетом соотношения (2), после некоторых преобразований получим нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q(x)$:

$$-\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi} \left(\int_{-l}^l \frac{q(t) dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t - x)} + \int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t - x)} \right) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{\partial}{\partial x} (C(x, q)q(x)). \tag{14}$$

Численный алгоритм и анализ решения. Уравнение (14) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром Коши и может быть решено только численно. Для решения можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестной функции. В случае, когда закон деформирования связей нелинейный, для определения усилий $q(x)$ (см. (2)) в связях целесообразно использовать также итерационную схему, аналогичную используемой в методе упругих решений [17].

Чтобы избежать решения интегродифференциального уравнения, представим (14) в виде

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l}^x Q(x) dx = C(x, q)q(x), \tag{15}$$

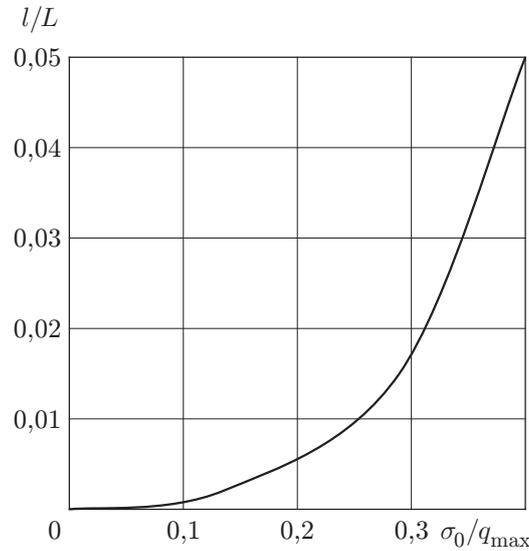


Рис. 1. Зависимость длины полосы предразрушения l/L от внешней нагрузки σ_0/q_{\max}

Итерационный процесс заканчивается, когда усилия вдоль полосы предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, становятся малоразличающимися.

Нелинейная часть кривой деформирования аппроксимировалась билинейной зависимостью [14], восходящий участок которой соответствовал упругой деформации связей ($0 < v^+ - v^- \leq v_*$) с их максимальным натяжением. При $v^+ - v^- > v_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (v_*, σ_*) и (δ_c, σ_c) , причем при $\sigma_c \geq \sigma_*$ эта зависимость становится возрастающей линейной, соответствующей линейному упрочнению при упругопластической деформации связей.

На рис. 1 приведена зависимость длины полосы предразрушения $d = l/L$ от безразмерной внешней нагрузки σ_0/q_{\max} при следующих значениях свободных параметров задачи: $\varepsilon_1 = a_0/L = 0,01$; $\varepsilon = y_0/L = 0,25$; $\nu = 0,3$; $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа (сплав В95); $E_s = 11,5 \cdot 10^4$ МПа (композит алюминий (60 %) — сталь (40 %)); $N_1 = N_2 = 14$; $M = 30$; $F/(y_0h) = 1$; $v_* = 10^{-6}$ м, $\sigma_* = 130$ МПа, $\sigma_{cr}/\sigma_* = 2$, $\delta_c = 2 \cdot 10^{-6}$ м; эффективная податливость связей $C = 2 \cdot 10^{-7}$ м/МПа.

На рис. 2 представлены распределения усилий в связях полосы предразрушения.

Для определения предельного состояния, при котором появляется трещина, используем критерий (4). В этом случае условие, определяющее предельное значение внешней нагрузки, имеет вид

$$C(x_0, q)q(x_0) = \delta_c. \tag{17}$$

В рассматриваемой задаче следует ожидать, что $x_0 = 0$, т. е. точка $x = x_0$ находится в центре полосы предразрушения.

Совместное решение алгебраических систем (11), (16), (10) и (17) позволяет (при заданных характеристиках сопротивления материала трещинообразованию) определить критическое значение внешней нагрузки и размер полосы предразрушения l_c для состояния предельного равновесия, при котором появляется трещина.

На рис. 3 представлена зависимость критической нагрузки σ_0^*/σ_T от относительного раскрытия δ_*/l ($\delta_* = \pi\delta_c\mu/(1 + \varkappa_0)\sigma_T$) в центре полосы предразрушения.

Периодическая система полос предразрушения. Пусть в подкрепленной пластине в процессе нагружения имеется периодическая система прямолинейных полос предразрушения длиной $2l$ с периодом ω , расположенных на оси абсцисс. В исследуемом

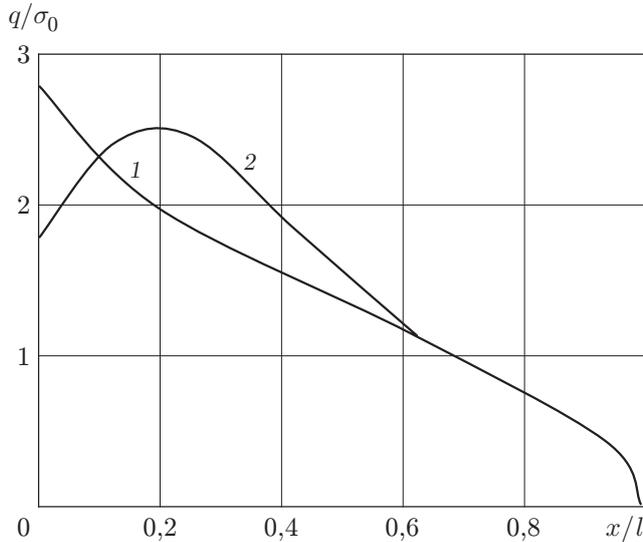


Рис. 2

Рис. 2. Распределение нормальных усилий q/σ_0 в связях между берегами полосы предразрушения:

1 — линейная зависимость; 2 — билинейная зависимость

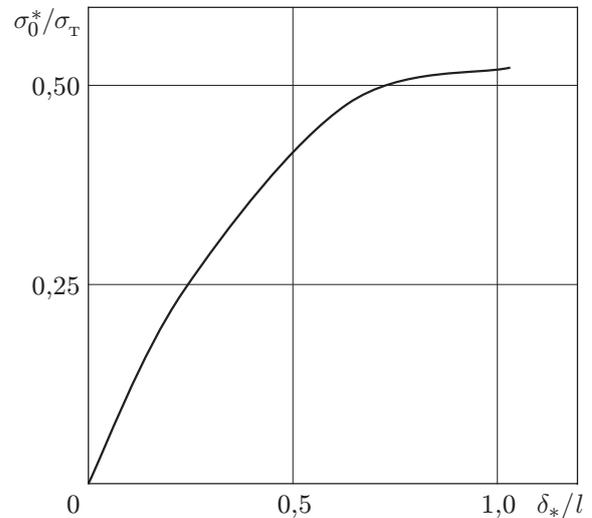


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость критической нагрузки σ_0^*/σ_T от относительного раскрытия δ_*/l в центре полосы предразрушения

случае возникновения зародышевых трещин представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями пластины. Размеры зон предразрушения заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи.

Краевые условия на берегах периодической системы полос предразрушения имеют вид

$$y = 0, |x - m\omega| \leq l: \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = q(x).$$

В этом случае решается задача, аналогичная задаче для одной полосы предразрушения. Для функции $\Phi_1(z)$ получаем задачу Дирихле

$$\begin{aligned} y = 0, |x - m\omega| \leq l: \quad \operatorname{Re} \Phi_1(z) &= [f(x) + q(x)]/2, \\ z \rightarrow \infty: \quad \Phi_1(z) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (18)$$

С помощью преобразования $w = \sin(\pi z/\omega)$ перейдем от физической плоскости z к параметрической плоскости комплексной переменной w . При этом внешность периодической системы полос предразрушения плоскости z переходит на бесконечнолистную риманову поверхность с разрезом $(-l_0, l_0)$, где $l_0 = \sin(\pi l/\omega)$.

Искомое решение задачи (18) в классе всюду ограниченных функций записывается в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{f(x) + q(x)}{X(x)(\sin(\pi x/\omega) - \sin(\pi z/\omega))} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi x}{\omega} dx.$$

Здесь $X(z)$ — ветвь функции $\sqrt{\sin^2(\pi z/\omega) - \sin^2(\pi l/\omega)}$, которая при $|z| \rightarrow \infty$ имеет вид $\sin(\pi z/\omega)$.

С учетом поведения функции $\Phi_1(z)$ на бесконечности условие разрешимости краевой задачи (18) имеет следующий вид:

$$\int_{-l_0}^{l_0} \frac{f(x) + q(x)}{X(x)} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi x}{\omega} dx = 0.$$

Это условие служит для определения размера l полосы предразрушения.

В рассматриваемом случае для определения неизвестной функции $q(x)$ получаем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$-\frac{X_*(x)}{\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{f(t) + q(t)}{X_*(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi t}{\omega} dt = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{\partial}{\partial x} [C(x, q)q(x)], \quad (19)$$

где $X_*(x) = \sqrt{\sin^2(\pi l/\omega) - \sin^2(\pi x/\omega)}$.

Искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (11). В силу периодичности задачи эта система вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему относительно P_{m1} ($m = 1, 2, \dots$). По этой причине изменятся выражения для Δv_{mn} , которые из-за громоздкости не приводятся.

Нелинейное интегродифференциальное уравнение (19) представим в виде

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l_0}^x Q_1(x) dx = C(x, q)q(x), \quad (20)$$

где

$$Q_1(x) = \frac{X_*(x)}{\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{q(t) + f(t)}{X_*(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi t}{\omega} dt.$$

Алгебраизация уравнения (20) осуществляется так же, как в случае одной полосы предразрушения. В результате вместо (20) получаем нелинейную алгебраическую систему M уравнений для определения приближенных значений $q(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). Численное решение полученной системы уравнений строится так же, как описано выше для случая одной полосы предразрушения.

Используя полученное решение, выражение для раскрытия берегов полосы предразрушения можно записать в виде

$$v^+(x, l, \sigma_0) - v^-(x, l, \sigma_0) = \frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_0^{l_0} \frac{[q(t) + f(t)]F_1(t, x)}{X_*(t)} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi t}{\omega} dt,$$

где

$$F_1(t, x) = X_*(x) + \frac{1}{2} X_*(x) \ln \frac{X_*(t) - X_*(x)}{X_*(t) + X_*(x)}.$$

Для определения критических значений внешних нагрузок, при которых появляются трещины, имеем следующие соотношения:

$$\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_0^{l_0} \frac{[q(t) + f(t)]F_1(t, x_0)}{X_*(t)} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi t}{\omega} dt = \delta_c.$$

Кроме того, можно использовать условие (17).

Анализ зарождения дефекта типа трещины в подкрепленной пластине в процессе нагружения сводится к совместному параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы задачи и критерия появления трещины (17) при различных значениях свободных параметров подкрепленной пластины (механических характеристик материалов пластины и стрингеров, геометрических размеров укрепляющих элементов).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Толкачев В. М.** Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154, № 4. С. 806–808.
2. **Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.** Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 2. С. 158–164.
3. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983.
4. **Черепанов Г. П., Рыбаков Л. М.** Расчет клепаных панелей // Прикл. механика. 1977. Т. 13, № 8. С. 3–7.
5. **Брок Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980.
6. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
7. **Максименко В. Н.** Задача об анизотропной пластине, ослабленной криволинейными трещинами и усиленной ребрами жесткости // ПМТФ. 1982. № 2. С. 163–169.
8. **Максименко В. Н.** Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия // ПМТФ. 1988. № 2. С. 133–140.
9. **Суздальницкий И. Д.** Периодическая задача о креплении стрингерами пластины, ослабленной системой разрезов // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 4. С. 730–736.
10. **Budiansky V., Evans A. G., Hutchinson J. W.** Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // Intern. J. Solids Structures. 1995. V. 32, N 3/4. P. 315–328.
11. **Ji H., de Gennes P. G.** Adhesion via connector molecules: The many-stitch problem // Macromolecules. 1993. V. 26. P. 520–525.
12. **Goldstein R. V., Bakirov V. F., Perelmuter M. N.** Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer — polymer joints // Proc. Inst. Phys. Technol. Russ. Acad. of Sci. 1997. V. 13. P. 115–125.
13. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
14. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещины по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.
15. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
16. **Черепанов Г. П., Мирсалимов В. М.** О воздействии ребер жесткости на развитие трещины // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1969. № 1. С. 7–11.
17. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
18. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.

Поступила в редакцию 14/II 2006 г.