

УДК 551.555.9

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ВБЛИЗИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ТЕЧЕНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ С НЕБОЛЬШИМИ ПЕРИОДАМИ ПЛАВУЧЕСТИ

В. А. Гушчин, Т. И. Рождественская

Институт автоматизации проектирования РАН, 123056 Москва  
E-mails: gushchin@icad.org.ru, ares@icad.org.ru

Проведено численное исследование обтекания двумерного кругового цилиндра стратифицированной жидкостью с периодами плавучести  $T_b = 25,2; 6,28$  с в широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Фруда. Обнаружено, что при наличии опережающего возмущения перед цилиндром, смещающимся вниз по течению с увеличением числа Рейнольдса, линии равной солёности имеют форму полукруглого гребня с острыми зубцами. Исследована закономерность изменения формы присоединённых волн и появления в следе за цилиндром слоев жидкости с различной плотностью. В течениях с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с при числах Рейнольдса  $Re < 60$  в следе за цилиндром обнаружены застойные зоны, при  $Re > 60$  такие зоны отсутствуют.

**Ключевые слова:** стратифицированная жидкость, круговой цилиндр, численное исследование, форма линий солёности, слои жидкости с различной плотностью, застойные зоны в следе за цилиндром.

**Введение.** Вследствие широкого распространения стратифицированных жидкостей в природе изучение их течений представляет значительный научный и практический интерес. Целью данной работы является численное исследование течений солёной воды — наиболее распространённой в природе жидкости. Солёная вода является стратифицированной жидкостью, поскольку её плотность и линейно связанная с ней солёность возрастают в направлении силы тяжести.

Наиболее известной моделью стратификации является экспоненциальная модель, которую в случае слабой стратификации можно считать линейной (удержан первый член разложения экспоненты в ряд Тейлора). Степень стратификации характеризуется масштабом плавучести — расстоянием, на котором солёность изменяется в  $e$  раз. Вследствие слабой стратификации в постановке задачи уравнения Навье — Стокса записываются в приближении Буссинеска, т. е. изменения плотности считаются пренебрежимо малыми во всех членах уравнения, за исключением члена, содержащего силу тяжести, который учитывает влияние плавучести. Для численного моделирования стратифицированных течений в данной работе используется метод расщепления, первоначально предложенный для расчета течений однородной жидкости [1]. Этот метод применялся для расчета течений

---

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН № 14 “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация” и Программы Отделения математических наук РАН “Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач”, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-00764, 10-01-92654).

как однородной, так и стратифицированной жидкости, в том числе стратифицированной жидкости со свободной поверхностью [2, 3]. Результаты расчетов и экспериментального исследования присоединенных внутренних волн за цилиндром хорошо согласуются [4]. Ранее метод расчета течений стратифицированной жидкости использовался при изучении крупномасштабных элементов таких течений. Появление новых вычислительных комплексов с параллельной архитектурой позволило проводить исследования тонкой структуры течений стратифицированной жидкости. Усовершенствованный метод описан в работе [5], там же проведено сравнение результатов расчетов, выполненных с его помощью, и экспериментальных данных.

С использованием указанного метода расщепления исследованы течения вблизи кругового цилиндра двух жидкостей с различной степенью солености.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается поперечное обтекание кругового цилиндра диаметром  $D$  потоком линейно стратифицированной жидкости, плотность которой изменяется по закону  $\rho(y) = \rho_0(1 - y/\Lambda + s)$  ( $\rho_0 = \rho(0) = 1$ ;  $\Lambda$  — масштаб плавучести;  $s$  — возмущение солености, далее называемое соленостью). Данное течение описывается системой уравнений, состоящей из уравнений Навье — Стокса, записанных в приближении Буссинеска, применимом вследствие слабой стратификации, уравнения несжимаемости жидкости и уравнения диффузии соли:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \mathbf{g}s + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s &= \kappa_s\nabla^2s + \frac{1}{\Lambda}v_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\kappa_s$  — коэффициент диффузии соли;  $v_y$  — компонента скорости в направлении градиента солености. Стратификация характеризуется линейным масштабом  $\Lambda = |d(\ln \rho)/dy|^{-1}$  и периодом плавучести  $T_b = 2\pi/N$  ( $N = \sqrt{g/\Lambda}$  — частота плавучести) [5]. Скорость потока на бесконечности равна  $U$ .

В качестве граничных условий используются условия невозмущенного потока на достаточно удаленном от центра контуре  $G$ :  $u = U \cos \theta$ ,  $v = -U \sin \theta$ ,  $p = 0$ ,  $s = 0$  ( $u$ ,  $v$  — компоненты вектора скорости вдоль осей полярной системы координат  $(r, \theta)$ ), условие прилипания для скорости  $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$  и условие отсутствия нормальной компоненты потока солености  $(\partial s/\partial n)|_\Gamma = 0$  на поверхности цилиндра  $\Gamma$ .

В качестве начальных условий для скорости задаются параметры невозмущенного плоскопараллельного потока ( $u = U \cos \theta$ ,  $v = -U \sin \theta$ ) с учетом граничных условий на поверхности цилиндра.

Течение стратифицированной жидкости характеризуется следующими безразмерными параметрами: числом Рейнольдса  $Re = UD/\nu$ , числом Пекле  $Pe = UD/\kappa_s$  (или числом Шмидта  $Sc = Pe/Re$ ), числом Фруда  $Fr = U/(ND)$ . Вследствие слабой стратификации  $\Lambda \gg D$ .

Выбирая в качестве масштаба скорости скорость потока  $U$ , а в качестве масштаба длины диаметр цилиндра  $D = 2r_0$ , запишем систему (1) в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{s\mathbf{g}}{Fr^2|g|(D/\Lambda)} + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s &= \frac{1}{Pe}\nabla^2s + \frac{Dv_y}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (2)$$

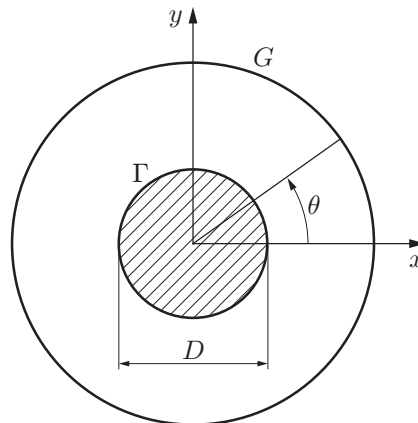


Рис. 1. Расчетная область течения

На рис. 1 показана расчетная область, заключенная между двумя concentric окружностями — границей цилиндра  $\Gamma$  и внешней (условной) границей  $G$ , за которой находится невозмущенная область. Поток жидкости, обтекающий неподвижный цилиндр со скоростью  $U$ , направлен вдоль оси  $x$  слева направо. Используется полярная система координат  $(r, \theta)$  с началом в центре цилиндра. В зависимости от условий задачи расстояние до внешней границы составляет  $(80 \div 100)D$ .

**2. Методика расчета.** Для упрощения вычислений расчетная область преобразуется в прямоугольную с помощью замены переменных  $r = R(z)$ , где  $R(z) = 1 + \alpha z + z^3$ ;  $\alpha = 0,2\sqrt{2/\text{Re}}$  — коэффициент преобразования. Введенная ортогональная система координат  $(z, \theta)$  связана с декартовой системой преобразованием  $x = R(z) \cos \theta$ ,  $y = R(z) \sin \theta$ , где  $z \in [0, \infty]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Расчетная сетка в координатах  $z, \theta$  является равномерной и более удобна при использовании конечно-разностных методов, чем полярная; кроме того, эта сетка позволяет более точно моделировать особенности течения вблизи цилиндра. Апробация данного метода и сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными проведены в работе [5].

**3. Результаты расчетов.** Выполнены подробное исследование и сравнение свойств течений для двух жидкостей с различной степенью солёности (период плавучести  $T_b = 25,2; 6,28$  с) в широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Фруда. В расчетах диаметр цилиндра считался постоянным и равным 2,5 см. В этом случае число Рейнольдса  $\text{Re}$  характеризует только скорость течения. Значения  $\text{Re}$  выбирались в диапазоне от 25,0 до 113,5. Соответствующие значения числа Фруда для жидкости с периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с изменялись в диапазоне от 0,16 до 0,73, для жидкости с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с — в диапазоне от 0,0400 до 0,1816.

На рис. 2–4 приведены мгновенные линии тока и линии равной солёности. Считалось, что поток движется слева направо в горизонтальном направлении, сила тяжести и соответственно градиент стратификации направлены сверху вниз. Все результаты проведенных расчетов соответствуют моменту времени  $10T_b$  (к этому моменту времени течение является установившимся).

На рис. 2, а, в видно, что наблюдаемая в течении перед цилиндром клинообразная область блокировки уменьшается с ростом  $\text{Re}$  (с увеличением скорости течения), практически исчезая при  $\text{Re} = 113,5$ . Приближенная оценка длины области заблокированной жидкости получена в работе [6], более точная оценка ее длины в зависимости от диаметра цилиндра и числа Фруда приведена в работе [7].

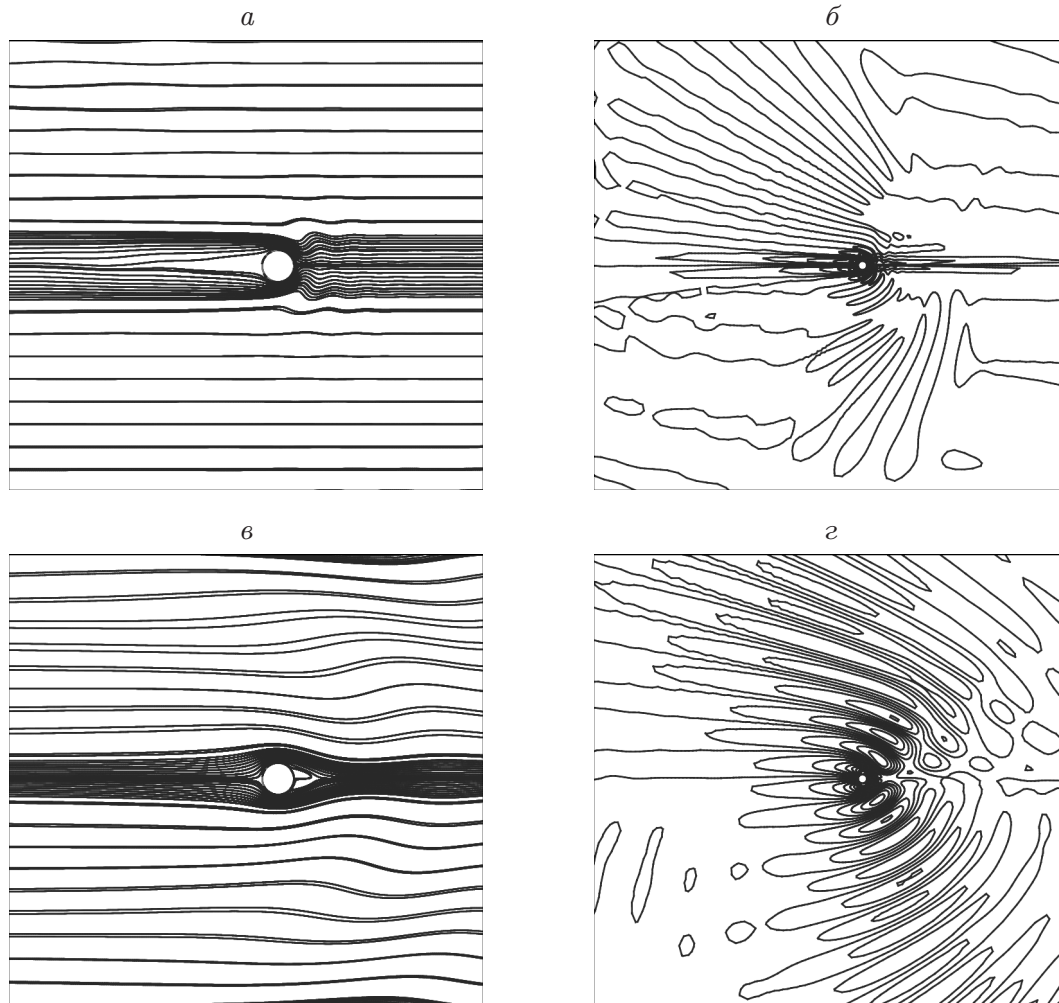


Рис. 2. Линии тока при обтекании цилиндра потоком с параметрами  $Re = 25$ ,  $Fr = 0,16$  (*а, б*) и  $Re = 113,5$ ,  $Fr = 0,73$  (*в, г*) и периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с: *а, в* — мгновенные линии тока, *б, г* — линии равной солености

В следе за цилиндром наблюдаются подветренные внутренние волны. При  $Re = 25 \div 60$  течение является безотрывным, при  $Re = 82,5$  непосредственно за цилиндром появляются вихри. Длина вихревой зоны в следе увеличивается с ростом  $Re$ .

Ниже анализируется форма линий равной солености. Поскольку плотность стратифицированной жидкости линейно связана с соленостью, правомерно говорить о прослойках плотности (областях, где градиент плотности в несколько раз больше, чем в остальной жидкости). Прослойки плотности появляются в следе на оси течения за задней критической точкой на цилиндре. Прослойка четко видна на рис. 2,б (сплошная линия). Существование прослоек с повышенной плотностью, зафиксированное в эксперименте, численно впервые обнаружено в работе [5]. Такие прослойки появляются в течениях с числами Фруда  $Fr < 0,5$ ; с увеличением  $Fr$  их границы размываются и при  $Fr \geq 0,53$  исчезают (см. рис. 2,г).

В данной работе впервые исследованы линии равной солености, имеющие форму полукруглого гребня. С увеличением  $Fr$  края полукруглого гребня приближаются к оси течения, причем возмущение в нижней области течения опережает возмущение в верхней области. По мере увеличения  $Fr$  и соответственно  $Re$  возмущения сдвигаются вниз по по-

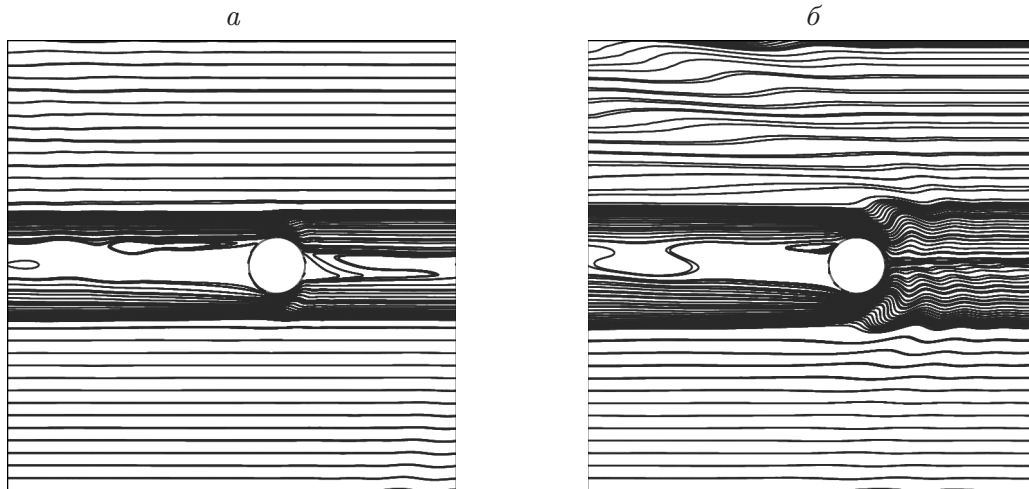


Рис. 3. Мгновенные линии тока течения с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с:  
 а —  $Re = 25$ ,  $Fr = 0,04$ ; б —  $Re = 60$ ,  $Fr = 0,096$

току. Крупномасштабный элемент — гребень — имеет мелкомасштабную структуру, что согласуется с результатами многочисленных экспериментальных и теоретических исследований, в соответствии с которыми наряду с крупномасштабными элементами структуры стратифицированных течений всегда имеются мелкомасштабные элементы [8]. На рис. 3 приведены линии тока при обтекании цилиндра потоком с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с. Из анализа рис. 3 следует, что в жидкости с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с присоединенные внутренние волны в следе за цилиндром имеют значительно меньшую амплитуду, чем в жидкости с периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с, несмотря на то что в ней амплитуда волн также увеличивается с ростом скорости течения. В следе за цилиндром на оси течения обнаружены застойные зоны, длина и ширина которых уменьшаются с увеличением скорости течения. В течениях жидкости с периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с это явление отсутствует. Блокировка жидкости перед цилиндром имеет место во всех рассмотренных режимах течения жидкости с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с.

В жидкости с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с во всех исследуемых течениях в следе за цилиндром наблюдаются прослойки плотности, что обусловлено значительным уменьшением чисел Фруда (см. рис. 3). Эти прослойки представлены в виде сплошных линий на оси течения, начинающихся в задней критической точке на цилиндре. Форма линий равной солености для течения с параметрами  $Re = 113,5$ ,  $Fr = 0,1816$  показана на рис. 4. Четко видна прослойка за задней критической точкой на цилиндре. Возникновение прослоек обосновано в [5]. Форма линий равной солености также имеет вид полукруглого гребня с острыми зубцами. Увеличение интенсивности возмущения солености и его смещение вниз по течению с увеличением скорости течения происходит одинаково для жидкостей с обоими периодами плавучести. Форма линий свидетельствует о том, что в течениях стратифицированных жидкостей наряду с крупномасштабными элементами течений имеются мелкомасштабные элементы. Более подробное исследование формы линий равной солености проводится ниже.

На рис. 5 приведены зависимости радиальной скорости на оси течения  $u_r$  от расстояния от задней критической точки на цилиндре  $R$  при  $T_b = 6,28$  с. Застойная зона занимает значительную часть поля течения (на рис. 5 приведена только часть области, что позволяет более точно определить длину застойных зон в течениях с  $Re = 25,00 \div 42,75$ ). Начало координат на рис. 5 совпадает с положением задней критической точки, центральная струя течения за цилиндром направлена вдоль оси абсцисс.

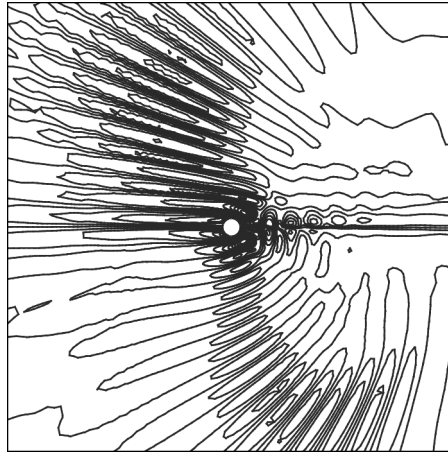


Рис. 4. Линии равной солености для течения с параметрами  $Re = 113,5$ ,  $Fr = 0,1816$  при  $T_b = 6,28$  с

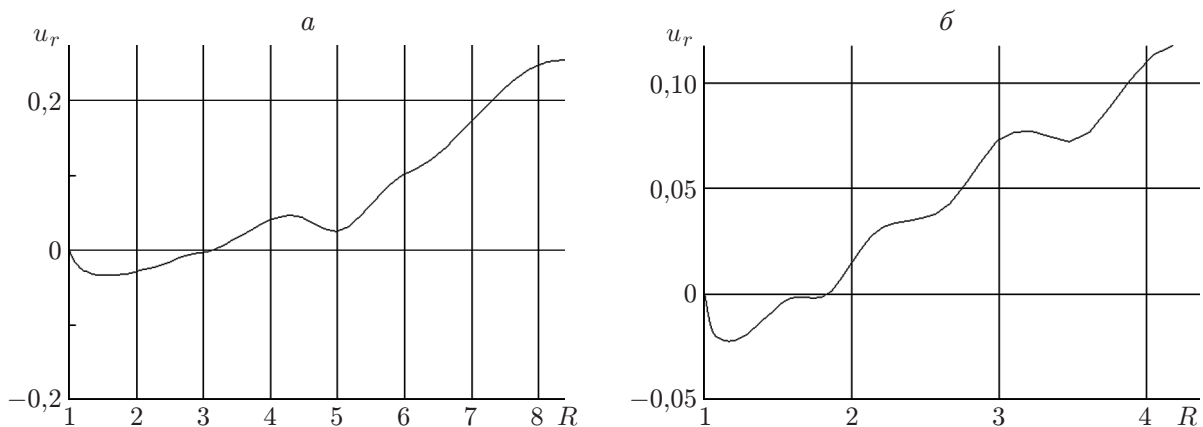


Рис. 5. Зависимость скорости на оси течения в следе за цилиндром от координаты  $R$  при  $T_b = 6,28$  с:

$a$  —  $Re = 25$ ,  $Fr = 0,04$ ;  $b$  —  $Re = 42,75$ ,  $Fr = 0,0684$

На рис. 5,  $a$  представлена зависимость скорости в центральной струе течения от расстояния от задней критической точки на цилиндре при  $Re = 25$ ,  $Fr = 0,04$ . Видно, что застойная зона (с почти нулевой скоростью и очень слабым противотечением) распространяется до точки  $R = 3$ . На рис. 5,  $b$  приведена зависимость радиальной скорости от координаты  $R$  для течения с параметрами  $Re = 42,75$ ,  $Fr = 0,0684$ . Размер застойной зоны составляет приблизительно 1,8 радиуса цилиндра. На рис. 6 показана зависимость радиальной скорости от радиуса для течения с параметрами  $Re = 60$ ,  $Fr = 0,096$ . Видно, что в этом течении застойная зона отсутствует, следовательно, ее размер уменьшается с увеличением  $Re$ .

Возникновение таких зон можно объяснить тем, что в жидкости с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с средние значения солености и линейно связанной с ней плотности в слоях жидкости с различной плотностью на порядок больше, чем в жидкости с периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с. Более плотный слой тормозит движение жидкости.

Форма линий равной солености исследована на примере течений жидкости с периодами плавучести  $T_b = 25,2$ ;  $6,28$  с. Для этого на графике распределения солености в жидкости слева от передней критической точки на цилиндре проведено шесть вертикальных линий

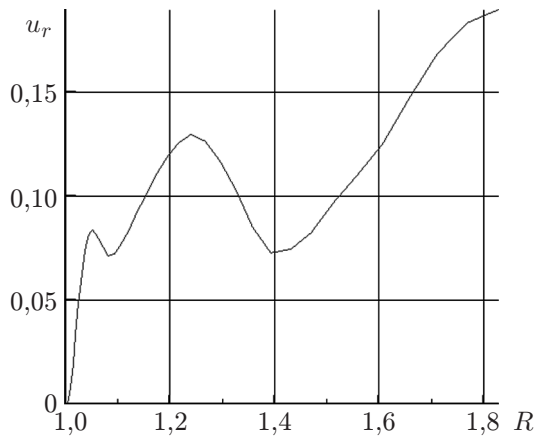


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость скорости на оси течения в следе за цилиндром от координаты  $R$  при  $T_b = 6,28$  с,  $Re = 60$ ,  $Fr = 0,096$

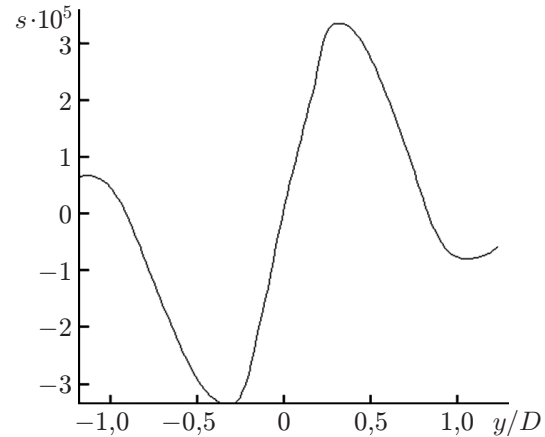


Рис. 7

Рис. 7. Профиль возмущения солености на расстоянии от передней критической точки на цилиндре  $x/D = 3$  для течения жидкости с параметрами  $T_b = 25,2$  с,  $Re = 25$ ,  $Fr = 0,16$

(сечений поля солености), перпендикулярных оси течения, на равном расстоянии одна от другой ( $x/D = 1, 2, \dots, 6$ ). На каждую из этих линий нанесены значения солености, пересчитанные для декартовой (лабораторной) системы координат. На рис. 7 приведен профиль возмущения солености в среднем сечении ( $x/D = 3$ ) для течения жидкости с  $T_b = 25,2$  с при  $Re = 25$ . Формы профилей поля солености в других сечениях будут подобными, но максимальные и минимальные значения солености будут различными. По мере удаления от передней критической точки максимальные значения уменьшаются, а минимальные увеличиваются, т. е. возмущения уменьшаются. Для течения с  $T_b = 6,28$  с форма профилей солености практически аналогична. Анализ рис. 7 показывает, что на нем имеются четко выраженные максимум и минимум, расположенные симметрично относительно точки  $y/D = 0$ , находящейся на оси течения.

**4. Выводы.** Для всех исследованных типов течений ( $T_b = 25,2; 6,28$  с) при всех рассмотренных значениях  $Re$  и  $Fr$  обнаружено, что линии равной солености вверх по потоку от цилиндра имеют форму полукруглого гребня с острыми зубцами. По мере увеличения значения  $Re$  (скорости течения) возмущения смещаются вниз по потоку. Исследована структура гребня.

В течениях жидкости с периодом плавучести  $T_b = 6,28$  с в следе за цилиндром обнаружены застойные зоны, длина которых уменьшается с увеличением значений  $Re$ ,  $Fr$ . В течении с параметрами  $Re = 60$ ,  $Fr = 0,096$  эти зоны отсутствуют. В течениях жидкости с периодом плавучести  $T_b = 25,2$  с застойные зоны не наблюдаются ни при каких рассмотренных значениях  $Re$ ,  $Fr$ . Данное явление обнаружено и описано впервые.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гуцин В. А.** Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 4. С. 1003–1017.
2. **Белоцерковский О. М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.

3. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Коньшин В. Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 4. С. 594–609.
4. Белоцерковский О. М., Белоцерковский С. О., Гуцин В. А. и др. Численное и экспериментальное моделирование гравитационных внутренних волн при движении тела в стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. 1984. Т. 289, № 3. С. 562–566.
5. Гуцин В. А., Миткин В. В., Рождественская Т. И., Чашечкин Ю. Д. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 43–54.
6. Boyer D. L., Davies P. A., Fernando H. J. S., Zhang X. Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1989. V. 328. P. 501–528.
7. Миткин В. В. Экспериментальное исследование формирования и распада двумерных стратифицированных спутных течений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1998.
8. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Внутренние волны, вязкие пограничные слои и внутренние пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости. М., 2001. (Препр. / Ин-т проблем механики РАН; № 674).

*Поступила в редакцию 9/IX 2010 г.,  
в окончательном варианте — 8/II 2011 г.*

---