

УДК 519.6:533.7

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

А. М. Блохин, А. Д. Биркин

Институт математики СО РАН,
630090 Новосибирск

Введение. Известно (см., например, [1]), что при стационарном сверхзвуковом обтекании бесконечного клина (рис. 1) возможны два решения этой газодинамической задачи: решение со слабой ударной волной (течение газа после ударной волны, вообще говоря, сверхзвуковое, т. е. $u_0^2 + v_0^2 > c_0^2$), и решение с сильной ударной волной (течение газа после ударной волны дозвуковое, т. е. $u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$). Здесь u_0, v_0 — компоненты вектора скорости газа, c_0 — скорость звука. Кроме того, в набегающем потоке $U_\infty > c_\infty$, где c_∞ — скорость звука. Однозначный ответ на вопрос о том, какое из двух решений реализуется на самом деле, не получен и до настоящего времени, несмотря на большое количество работ, посвященных этой проблеме. Один из возможных путей решения данного вопроса обсуждается в [1] и заключается в исследовании устойчивости по отношению к малым возмущениям этих стационарных режимов течения газа, т. е. в изучении асимптотики решения линейной смешанной задачи (см. задачу (1.1)–(1.4) в п. 1) при $t \rightarrow \infty$.

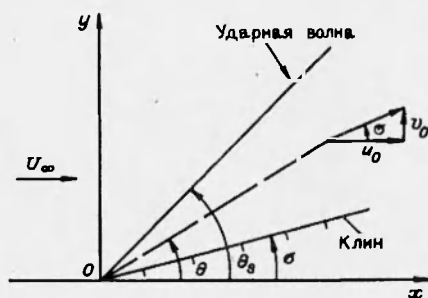


Рис. 1

В случае, когда малые возмущения зависят (кроме времени t) только от одной «пространственной» переменной, в ряде работ (см., например, [2, 3]) было строго показано, что режим течения газа со слабой ударной волной устойчив по отношению к малым возмущениям, а режим течения газа с сильной ударной волной неустойчив.

В общем случае в [4] показано, что основное решение, соответствующее сверхзвуковому обтеканию клина со слабой ударной волной, при условии, что течение газа после ударной волны сверхзвуковое, а также

$$M_1(\theta) > 1 \quad \text{при} \quad \sigma \leq \theta \leq \theta_s, \quad (0.1)$$

устойчиво по отношению к малым возмущениям. Здесь

$$M_1(\theta) = \frac{u_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta}{c_0}.$$

В то же время в [5] установлено, что линейная смешанная задача (см. задачу (1.1)–(1.4) в п. 1) корректна и при

$$u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$$

(по крайней мере, для случая малых углов клина σ , см. рис. 1). Однако устойчивость таких режимов обтекания в [5] не была доказана.

Настоящая работа существенно дополняет исследования, начатые в [4, 5]. В п. 2 доказывается факт отсутствия специальных частных решений линейной смешанной задачи (1.1)–(1.4) из п. 1, растущих при $t \rightarrow \infty$ для режима течения газа со слабой ударной волной (в том числе и при невыполнении условия (0.1)). Этот результат является *косвенным* подтверждением устойчивости такого режима обтекания клина также и при невыполнении условия (0.1).

В п. 3 для режима с сильной ударной волной строится специальное частное решение, растущее при $t \rightarrow \infty$, что вместе с результатами из [5] доказывает *неустойчивость* по отношению к малым возмущениям этого режима сверхзвукового обтекания клина.

Надо также отметить, что в ряде работ (см., например, [6, 7]) устанавливается факт отсутствия стационарного режима с сильной ударной волной для заостренных тел конечной толщины с помощью рассуждений, проведенных на качественном уровне. Правдоподобные соображения приводятся и в [8, 9]. Авторы настоящей работы полагают, что доказанный в п. 3 факт неустойчивости режима с сильной ударной волной для бесконечного клина и результаты [6–9] существенно дополняют друг друга.

1. Предварительные сведения. Математическая постановка задачи о сверхзвуковом обтекании клина сформулирована в [5]: в области $t, x > 0, y > x \operatorname{tg} \sigma$ ищется решение системы уравнений акустики

$$AU_t + BU_x + C_\sigma U_y = 0, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям на ударной волне ($x = 0$) и на поверхности клина ($y = x \operatorname{tg} \sigma$):

$$u_1 + du_3 = 0, \quad u_3 + u_4 = 0, \quad u_2 = \frac{\lambda}{\mu} F_y, \quad F_t + F_y \operatorname{tg} \sigma = \mu u_3; \quad (1.2)$$

$$u_2 = u_1 \operatorname{tg} \sigma \quad (1.3)$$

и начальным данным при $t = 0$

$$U(0, x, y) = U_0(x, y), \quad F(0, y) = F_0(y). \quad (1.4)$$

Здесь $U(t, x, y) = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T$ — вектор-столбец искомых функций; $x = F(t, y)$ — малое смещение фронта разрыва, причем

$$F(t, 0) = F_0(0) = 0. \quad (1.5)$$

Матрицы A, B, C_σ и постоянные d, λ, μ описаны в [5]. Полагаем, что граничные условия (1.2), (1.3) согласованы не только с начальными данными (1.4), но и между собой в точках ребра $t \geq 0, x = y = 0$. Из (1.2) и (1.3) с учетом (1.5) получаем

$$[\lambda + d \operatorname{tg}^2 \sigma] u_3(t, 0, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

т. е. если $D_1 = \lambda + d \operatorname{tg}^2 \sigma \neq 0$, то

$$U(t, 0, 0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Смешанная задача (1.1)–(1.4) сформулирована для случая, когда в качестве основного решения берется течение газа около клина с ударной волной, направленной вдоль оси Oy (рис. 2).

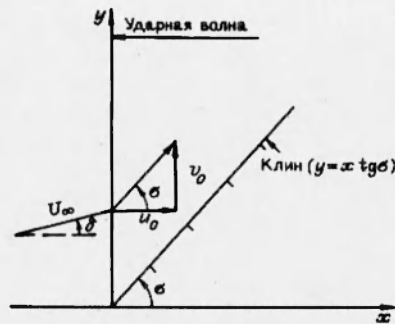


Рис. 2

Ниже воспользуемся эквивалентной постановкой, к которой может быть сведена смешанная задача (1.1)–(1.4) (см. [5]): в области $t, x > 0, y > x \operatorname{tg} \sigma$ ищется решение волнового уравнения

$$\{M^2 L_1^2 - L_2^2 - \eta^2\} u_3 = 0, \quad (1.7)$$

удовлетворяющее граничным условиям на ударной волне ($x = 0$) и на поверхности клина ($y = x \operatorname{tg} \sigma$):

$$\{m L_1^2 + n L_2^2 - \frac{\beta}{M^2} L_1 L_2\} u_3 = 0; \quad (1.8)$$

$$\{\cos \sigma \eta - \sin \sigma \xi\} u_3 = 0 \quad (1.9)$$

и начальным данным при $t = 0$. Здесь

$$L_1 = \frac{l_1}{\beta}, \quad l_1 = \tau + \operatorname{tg} \sigma \eta; \quad L_2 = \beta \xi - \frac{M^2}{\beta} l_1;$$

$$\tau = \frac{\partial}{\partial t}; \quad \xi = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\beta^2 = 1 - M^2 \quad (M^2 < 1); \quad n = -\frac{\lambda}{\rho}; \quad m = \beta d + \frac{\lambda M^2}{\rho}; \quad M = \frac{u_0}{c_0} \quad (\text{см. рис. 2}).$$

З а м е ч а н и е 1.2. Напомним еще раз (см. также **введение**), что в [5] доказана корректность смешанной задачи (1.1)–(1.4) при условии, что для основного решения выполнено неравенство

$$M_0 = \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{c_0^2}} = \frac{M}{\cos \sigma} < 1$$

и угол σ достаточно мал, т. е. течение газа за ударной волной дозвуковое (основное решение с сильной ударной волной). В [4] доказана не только корректность смешанной задачи (1.1)–(1.4), но и устойчивость основного решения по отношению к малым возмущениям при условии, что для основного решения выполнены неравенства $M_0 > 1$ и (0.1) (основное решение со слабой ударной волной).

Перепишем задачу (1.7)–(1.9), перейдя в ней к новым независимым переменным

$$x' = x, \quad y' = y - x \operatorname{tg} \sigma$$

и опуская затем штрихи у переменных:

$$\begin{aligned} & \{M^2(\tau + \xi)^2 - (\xi - \operatorname{tg} \sigma \eta)^2 - \eta^2\} u_3 = 0, & t, x, y > 0; \\ & \{(\tau + \operatorname{tg} \sigma \eta) \left[\tau + \xi + d(\tau + \operatorname{tg} \sigma \eta) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\xi - \operatorname{tg} \sigma \eta}{M^2} \right] + \lambda \eta^2\} u_3 = 0, & x = 0; \\ & (\eta - \sin \sigma \cos \sigma \xi) u_3 = 0, & y = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

У задачи (1.10) будем искать частное решение вида

$$u_3(t, x, y) = e^{\omega t} u(x, y), \quad (1.11)$$

где ω — некоторая (вообще говоря, комплексная) постоянная. Подставляя (1.11) в (1.10), получим задачу для функции $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \{a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d_0\xi + f\} u = 0, & x, y > 0; \\ & \{A_1\eta^2 - A_2\xi\eta + \omega A_3\eta - \omega \frac{\beta^2}{M^2} \xi + \omega^2(1 + d)\} u = 0, & x = 0; \\ & \{\eta - \sin \sigma \cos \sigma \xi\} u = 0, & y = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \beta^2; & b &= -\operatorname{tg} \sigma; & c &= \frac{1}{\cos^2 \sigma}; & d_0 &= -2M^2\omega; & f &= -\omega^2 M^2; \\ A_1 &= D_1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \sigma}{M^2}; & A_2 &= \frac{\beta^2}{M^2} \operatorname{tg} \sigma; & A_3 &= \left(1 + 2d + \frac{1}{M^2}\right) \operatorname{tg} \sigma. \end{aligned}$$

Задача (1.12) может быть упрощена, если в ней перейти к каноническим переменным. Пусть $M_0 > 1$, тогда, переходя к каноническим переменным

$$x'' = 2\left(y + x \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2}\right), \quad y'' = 2 \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} x$$

и вводя вместо функции u новую функцию v

$$u = \exp \left\{ \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta} y'' - x'' \operatorname{tg} \sigma) \omega \right\} v(x'', y''),$$

для v (штрихи опущены) имеем задачу

$$\begin{aligned} & v_{xx} - v_{yy} - \Omega^2 v = 0, & x > 0, & 0 < y < B_0 x; \\ & D_1 v_{xx} - D_2 v_{xy} + D_3 v_x + D_4 v_y + D_5 v = 0, & y = 0; \\ & v_y + B_0 v_x = 0, & y = B_0 x, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\beta M}{2\Delta} \omega; & \Delta &= M_0^2 - 1; & D_2 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{M^2} \operatorname{tg} \sigma; & D_3 &= -2 \frac{m\Omega}{M} \operatorname{tg} \sigma; \\ D_4 &= \frac{\beta \sqrt{\Delta}}{M^3} \Omega; & D_5 &= \left(d \frac{\beta^2}{M^2} + \lambda \frac{M^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{\beta^2}\right) \Omega^2; & B_0 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{tg} \sigma} (< 1!). \end{aligned}$$

Пусть теперь $M_0 < 1$. Переходя к каноническим переменным

$$x'' = y + x \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2}, \quad y'' = -\frac{\tilde{\beta}}{\beta^2} x$$

и вводя вместо u новую функцию v

$$u = \exp \left\{ \frac{M^2}{\beta^2} (x'' \operatorname{tg} \sigma - y'' \bar{\beta}) \omega \right\} v(x'', y''),$$

из (1.12) получим для нее задачу (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} - \Omega^2 v &= 0, \quad x > 0, \quad -B_0 x < y < 0; \\ D_1 v_{xx} + D_2 v_{xy} + D_3 v_x + D_4 v_y + D_5 v &= 0, \quad y = 0; \\ v_y + B_0 v_x &= 0, \quad y = -B_0 x. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\beta M}{\beta^2} \omega; \quad \bar{\beta}^2 = 1 - M_0^2; \quad \bar{B}_0 = \frac{\bar{\beta}}{\operatorname{tg} \sigma}; \quad D_2 = \frac{\bar{\beta}}{M^2} \operatorname{tg} \sigma; \\ D_3 &= 2 \frac{m \Omega}{M} \operatorname{tg} \sigma; \quad D_4 = \frac{\beta \bar{\beta}}{M^3} \Omega; \quad D_5 = \left(d \frac{\beta^2}{M^2} + \lambda \frac{M^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{\beta^2} \right) \Omega^2. \end{aligned}$$

И наконец, пусть $M_0 = 1$. Полагая

$$x'' = y + x \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2}, \quad y'' = x$$

и вводя вместо u функцию v

$$u = \exp \left\{ \left(\frac{M^2}{\beta^2} y'' - \frac{x''}{2 \operatorname{tg} \sigma} \right) \omega \right\} v(x'', y''),$$

из (1.12) для v (штрихи опущены) имеем задачу

$$\begin{aligned} v_{yy} + d_1 v_x &= 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < B_0 x; \\ D_1 v_{xx} - A_2 v_{xy} + B_3 v_x + D_4 v_y + D_5 v &= 0, \quad y = 0; \\ v_y + \frac{M^2 \omega}{\beta^2} v &= 0, \quad y = B_0 x, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= -2 \frac{M^2 \operatorname{tg} \sigma}{\beta^4} \omega; \quad B_0 = \frac{\beta^2}{\operatorname{tg} \sigma}; \\ D_3 &= -\frac{\omega}{\operatorname{tg} \sigma} (\lambda - d \operatorname{tg}^2 \sigma); \quad D_4 = -\frac{\beta^2 \omega}{2M^2}; \quad D_5 = D_1 \frac{\omega^2}{4 \operatorname{tg}^2 \sigma}. \end{aligned}$$

Замечание 1.3. Используя известные соотношения, которые имеют место на косом скачке уплотнения (см., например, [10]), легко установить, что неравенство $M_0 > 1$ можно переписать (см. рис. 2):

$$\left(\operatorname{tg}^2 \delta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M_N^4 - \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} M_N^2 + \frac{2}{\gamma + 1} > 0. \quad (1.16)$$

Здесь $M_N = M_\infty \cos \delta$; $M_\infty = U_\infty / c_\infty$ — число Маха набегающего потока; $\gamma > 1$ — показатель адиабаты. В то же время с учетом выражения коэффициентов d и λ для политропного газа (см. [5]) условие $D_1 \neq 0$ примет вид

$$\left(\operatorname{tg}^2 \delta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M_N^4 + \left(\operatorname{tg}^2 \delta - \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} \right) M_N^2 + \frac{2}{\gamma + 1} \neq 0.$$

Следовательно, при $M_0 > 1$ в силу (1.16) условие $D_1 \neq 0$ выполняется автоматически. В этой связи, к постановке задачи (1.13) нужно добавить условие $v(0, 0) = 0$ (в силу (1.6)). Более того, согласно [4], будем считать, что решения смешанной задачи (1.1)–(1.4) при $M_0 > 1$ (а значит, и задачи (1.13)) рассматриваются в классах функций, достаточно быстро стремящихся к нулю при $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ вместе со своими производными.

2. Исследование задачи (1.13). Для простоты будем полагать, что в задаче (1.13) параметр $\Omega > 0$ (вообще $\text{Re } \Omega > 0$). Используя метод функций Римана (см. [11, 12]), найдем значение функции $v(x, y)$ в точке $\tilde{M}_0(x_0, y_0)$ (рис. 3):

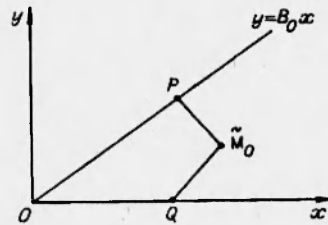


Рис. 3

$$2v(\tilde{M}_0) = v(P) + v(Q) + \int_P^0 v[R_y + B_0 R_x] dx + \int_0^Q [R_y v - R v_y] dx, \quad (2.1)$$

($R = J_0(i\Omega K_0)$) — функция Римана, $K_0 = \sqrt{(x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2}$). Далее, поскольку

$$R_y + B_0 R_x = i\Omega[y_0 - y - B_0(x_0 - x)] \frac{J'_0(i\Omega K_0)}{K_0},$$

то, совмещая сначала точки \tilde{M}_0 и Q , а затем точки \tilde{M}_0 и P , из (2.1) получим соотношения

$$f(x_0) = g(x_0) + \int_0^{x_0} \left\{ \frac{i\Omega B_0 x_0}{1 + B_0} \frac{J'_0(i\Omega K)}{K} g(x) - J_0(i\Omega(x - x_0))l(x) \right\} dx, \quad (2.2)$$

$$g(x_0) = f(Lx_0) + L \int_0^{x_0} \left\{ \frac{i\Omega B_0 x_0}{1 + B_0} \frac{J'_0(i\Omega\sqrt{L}K)}{\sqrt{L}K} f(Lx) - J_0(i\Omega\sqrt{L}K)l(Lx) \right\} dx,$$

где

$$f(x_0) = v(x_0, 0); \quad g(x_0) = v\left(\frac{x_0}{1 + B_0}, \frac{B_0 x_0}{1 + B_0}\right);$$

$$l(x_0) = v_y(x_0, 0); \quad K = \sqrt{(x_0 - x)(x_0 - Lx)}; \quad L = \frac{1 - B_0}{1 + B_0}.$$

К выражениям (2.2) добавим граничное условие при $y = 0$:

$$D_1 f''(x_0) - D_2 l'(x_0) + D_3 f'(x_0) + D_4 l(x_0) + D_5 f(x_0) = 0. \quad (2.3)$$

Дальнейшее исследование выражений (2.2), (2.3) будем вести с помощью

преобразования Лапласа (см. [13]). Пусть

$$\mathcal{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-px_0} f(x_0) dx_0, \quad \mathcal{L}(p) = \int_0^{\infty} e^{-px_0} l(x_0) dx_0,$$

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{-px_0} g(x_0) dx_0$$

— преобразование Лапласа функций f, l, g ; $p = s_0 + i\sigma_0$. Применяя преобразование Лапласа к (2.2), (2.3), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p) &= \frac{F_1(p)}{q_0(p)} G(q(p)) - \frac{1}{q_0(p)} \mathcal{L}(p), \\ G(p) &= \frac{I_1(p)}{\hat{q}_0(p)} \mathcal{F}\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) - \frac{1}{\hat{q}_0(p)} \mathcal{L}\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right), \\ D_2 r_0 \mathcal{L}(p) &= L_1(p) \mathcal{F}(p) + L_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_0(p) &= \sqrt{p^2 - \Omega^2}; & F_1(p) &= \frac{q_0(p) + B_0 p}{1 + B_0}; & q(p) &= \frac{p + B_0 q_0(p)}{1 + B_0}; \\ \hat{q}_0(p) &= \sqrt{p^2 - L\Omega^2}; & I_1(p) &= \frac{\hat{q}_0(p) + B_0 p}{1 - B_0}; & \hat{q}(p) &= \frac{p + B_0 \hat{q}_0(p)}{1 + B_0}; \\ r_0(p) &= p - \alpha_0 \Omega; & r_1(p) &= p - \frac{\Omega}{\alpha_0}; & \alpha_0 &= \frac{\beta}{M \operatorname{tg} \sigma} (< 1); \end{aligned}$$

$$L_1(p) = r_0^2 d \operatorname{tg}^2 \sigma + r_1^2 \lambda; \quad L_2 = D_2 l(0) - D_1 f'(0).$$

Не нарушая общности, положим $L_2 = 0$ (см. замечание 1.3). Тогда система (2.4) переписется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p) &= \frac{L_1(p)}{D_2 r_0(p)} \mathcal{F}(p), & G(p) &= I_2(p) \mathcal{F}\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right), \\ \mathcal{F}(p) &= F_2(p) \mathcal{F}\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right), \end{aligned} \quad (2.4')$$

где

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{D_2 r_0 \left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) I_1(p) - L_1 \left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right)}{D_2 r_0 \left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) \hat{q}_0(p)}; \\ F_2(p) &= \frac{D_2 r_0(p) F_1(p)}{D_2 r_0(p) q_0(p) + L_1(p)} I_2(q(p)). \end{aligned}$$

Рассмотрим третье уравнение (2.4'). Сделаем в нем замену:

$$p = \frac{\Omega}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

(ζ — новая переменная). Тогда последовательно находим

$$\begin{aligned} q_0(p) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), & q(p) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta + L \frac{1}{\zeta} \right), & \hat{q}_0(q(p)) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta - L \frac{1}{\zeta} \right), \\ F_1(p) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta - L \frac{1}{\zeta} \right), & \hat{q}(q(p)) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta' + \frac{1}{\zeta'} \right), & \zeta' &= \frac{\zeta}{L}, \\ I_1(\hat{q}(p)) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta' - \frac{1}{\zeta'} \right), & F_2(p) &= L \frac{T(\zeta)R_2(\zeta')}{T(\zeta')R_1(\zeta)}. \end{aligned}$$

Здесь

$$T(\zeta) = \zeta^2 + 1 - 2\alpha_0\zeta; \quad T_0(\zeta) = \zeta^2 + 1 - \frac{2\zeta}{\alpha_0};$$

$$R_1(\zeta) = D_2T(\zeta)(\zeta^2 - 1) + dtg^2\sigma T^2(\zeta) + \lambda T_0^2;$$

$$R_2(\zeta) = D_2T(\zeta)(\zeta^2 - 1) - dtg^2\sigma T^2(\zeta) - \lambda T_0^2.$$

Значит, последнее уравнение системы (2.4') можно переписать так:

$$\mathcal{F}(\zeta) = L \frac{T(\zeta)R_2\left(\frac{\zeta}{L}\right)}{T\left(\frac{\zeta}{L}\right)R_1(\zeta)} \mathcal{F}\left(\frac{\zeta}{L}\right). \quad (2.5)$$

Покажем, что $\mathcal{F} \equiv 0$. Для этого потребуем, чтобы изображение $\mathcal{F}(p)$ было определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \Omega$. Тогда отображение

$$\zeta = \frac{1}{\Omega} \left(p + \sqrt{p^2 - \Omega^2} \right) \quad (2.6)$$

однолистно отображает область $\operatorname{Re} p > \Omega$ на область D' в плоскости переменной ζ , причем ветвь корня выбрана так, что $\sqrt{1} = 1$. Используя принцип соответствия границ, легко установить вид области D' (это понадобится ниже для обоснования приема нахождения решения уравнения (2.5)). Подставляя в формулу (2.6) $p = \Omega + i\tilde{y}$ ($\tilde{y} \in \mathbb{R}^1$), получим границу области D' в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{y}) &= \operatorname{Re} \zeta = \frac{1}{\Omega} \left(\Omega + \sqrt{\tilde{y}^4 + 4\Omega^2\tilde{y}^2} \cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\Omega}{\tilde{y}} \right) \right), \\ \eta(\tilde{y}) &= \operatorname{Im} \zeta = \frac{1}{\Omega} \left(\tilde{y} + \sqrt{\tilde{y}^4 + 4\Omega^2\tilde{y}^2} \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\Omega}{\tilde{y}} \right) \right). \end{aligned}$$

Легко убедиться, что $\bar{\zeta}(\tilde{y}) = \zeta(-\tilde{y})$, т. е. $\partial D'$ симметрична относительно действительной оси плоскости ζ . При $\tilde{y} \rightarrow \infty$ получим, что

$$\xi \sim \frac{\tilde{y}}{\Omega}, \quad \eta \sim \frac{\tilde{y}}{\Omega}, \quad \text{т. е. } \xi \sim \eta.$$

Это говорит о том, что $\partial D'$ имеет асимптоты $\eta = (1 \pm i)\xi$, $\xi \geq 0$. Поэтому очевидно, что D' содержит подобласть D'' , заключенную между прямыми вида $\eta = (1 \pm \alpha i)\xi$, $\xi \geq 0$, $\alpha > 0$ — константа, т. е. для любого числа $\zeta = r_0 e^{i\varphi_0}$ из D'' следует, что D'' содержит луч $l = \{\zeta : \zeta = r e^{i\varphi_0}, r > r_0\}$.

Имея в виду все вышесказанное, найдем решение уравнения (2.5) в области D'' . Для упрощения рассуждений перепишем его:

$$g(\zeta) = f(\zeta)q(\alpha\zeta), \quad \alpha = \frac{1}{L} > 1. \quad (2.7)$$

Здесь $g(\zeta) = \mathcal{F}(\zeta)$; $f(\zeta) = L \frac{T(\zeta)R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L})R_1(\zeta)}$. Заменяя в (2.7) ζ на $\alpha^k \zeta$, $k = 1, 2, 3, \dots$, получим цепочку функциональных уравнений, имеющих место в области D'' , так как $\alpha^k \zeta \in D''$ в силу свойства области D'' содержать луч l :

$$g(\alpha^k \zeta) = f(\alpha^k \zeta)g(\alpha^{k+1} \zeta). \quad (2.8)$$

Далее

$$\frac{g(\zeta)}{g(\alpha^j \zeta)} = \frac{g(\zeta)}{g(\alpha \zeta)} \frac{g(\alpha \zeta)}{g(\alpha^2 \zeta)} \dots \frac{g(\alpha^{j-1} \zeta)}{g(\alpha^j \zeta)} = \prod_{k=0}^{j-1} f(\alpha^k \zeta)$$

или

$$g(\zeta) = g(\alpha^j \zeta) \prod_{k=0}^{j-1} f(\alpha^k \zeta).$$

Напомним, что функция $f(\zeta)$ известна и определена в области D' . Устремляя теперь j к $+\infty$, получим формальное решение уравнения (2.7):

$$g(\zeta) = g(\infty) \prod_{k=0}^{\infty} f(\alpha^k \zeta) = g(\infty)A(\zeta). \quad (2.9)$$

Заметим, что каждое решение уравнения (2.7) можно представить в виде (2.9), используя (2.8). Далее, если $g(\zeta)$ — решение уравнения (2.7), то функция $\gamma g(\zeta)$ ($\gamma \in \mathbb{C}^1$) — тоже решение этого уравнения. В итоге все решения уравнения (2.7) могут быть записаны как

$$g(\zeta) = \gamma A(\zeta). \quad (2.10)$$

Покажем, что $A(\zeta) \equiv 0$. Тогда из (2.10) следует, что уравнение (2.7) будет иметь решением лишь тождественный нуль. С этой целью рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} A_n(\zeta) &= \prod_{k=0}^n f\left(\frac{\zeta}{L^k}\right) = L^{n+1} \frac{T(\zeta)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{n+1}}\right)} \prod_{k=0}^n \frac{R_2\left(\frac{\zeta}{L^{k+1}}\right)}{R_1\left(\frac{\zeta}{L^k}\right)} = \\ &= L^{n+1} \frac{T(\zeta)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{n+1}}\right)} \prod_{k=0}^n \frac{a_k}{b_k}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $a_k = R_2\left(\frac{\zeta}{L^{k+1}}\right)$, $b_k = R_1\left(\frac{\zeta}{L^k}\right)$; ζ фиксирована; n — целое, достаточно большое число. Из (2.11) следует

$$\begin{aligned} |A_n(\zeta)| &= \left| L^{n+1} \frac{T(\zeta)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{n+1}}\right)} \prod_{k=0}^n \frac{|a_k|}{|b_k|} \right| = \left| L^{n+1} \frac{T(\zeta)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{n+1}}\right)} \prod_{k=0}^N \frac{|a_k|}{|b_k|} \prod_{k=N+1}^n \frac{|a_k|}{|b_k|} \right| = \\ &= |\Phi_{N;n}(\zeta)| \prod_{k=N+1}^n \frac{|a_k|}{|b_k|} \leq |\Phi_{N;n}(\zeta)| \prod_{k=N+1}^n \frac{|D_2 - D_1| + \varepsilon}{|D_2 + D_1| - \varepsilon} = \end{aligned}$$

$$= |\Phi_{N;n}(\zeta)| \left(\frac{|D_2 - D_1| + \varepsilon}{|D_2 + D_1| - \varepsilon} \right)^{n-N}, \quad \Phi_{N;n}(\zeta) = I^{n+1} \frac{T(\zeta)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{n+1}}\right)} \prod_{k=0}^N \frac{a_k}{b_k},$$

поскольку очевидно, что при $k \rightarrow \infty$ имеем $a_k \rightarrow D_2 - D_1$, $b_k \rightarrow D_2 + D_1$, и поэтому существует N такое, что при $k > N$ будут выполнены неравенства $|a_k - (D_2 - D_1)| < \varepsilon$, $|b_k - (D_2 + D_1)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Так как $D_1 > 0$ (поскольку $M_0 > 1$, см. (1.16)), то

$$\frac{|D_2 - D_1|}{|D_2 + D_1|} < 1.$$

Следовательно, для малых ε выполняется неравенство

$$\frac{|D_2 - D_1| + \varepsilon}{|D_2 + D_1| - \varepsilon} \leq 1 - \delta < 1$$

(значение δ достаточно мало). Тогда окончательно имеем

$$|A_n(\zeta)| \leq |\Phi_{N;n}(\zeta)|(1 - \delta)^{n-N}$$

для фиксированного N .

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что $|A_n(\zeta)| \rightarrow 0$, т. е. $A(\zeta) = A_\infty(\zeta) \equiv 0$ в области D'' . Продолжая аналитически функцию $A(\zeta)$ в область D' , находим, что $A(\zeta) \equiv 0$ в D' , а это и означает, что $\mathcal{F}(\zeta) = 0$ (следовательно, $\mathcal{F}(p) \equiv 0$ тоже). Тогда из системы (2.4) имеем, что $\mathcal{L}(p) = G(p) \equiv 0$. Возвращаясь к оригиналам, получим, что $f(x_0) = g(x_0) = l(x_0) \equiv 0$, а из (2.1) немедленно вытекает, что и $v \equiv 0$.

3. Исследование спектральной задачи (1.14). Рассмотрим спектральную задачу (1.14). Переходя в ней к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r - \Omega^2 v &= 0, \quad r > 0, \quad \theta \in (-\theta_0, 0); \\ D_1 v_{rr} + D_2 \left\{ \frac{1}{r} v_{r\theta} - \frac{1}{r^2} v_\theta \right\} + D_3 v_r + D_4 \frac{1}{r} v_\theta + D_5 v &= 0, \quad r > 0, \quad \theta = 0; \\ v_\theta &= 0, \quad r > 0, \quad \theta = -\theta_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\text{tg } \theta_0 = B_0$ (B_0 описана в п. 1). Заметим, что функции вида

$$\cos n(\theta + \theta_0) J_n(-i\Omega r), \quad n \geq 2,$$

удовлетворяют первому и третьему уравнениям системы (3.1) и, кроме того, имеют нужную асимптотику при $r \rightarrow 0$ (см. [5, 14]). Поэтому будем искать решение задачи (3.1) в виде

$$v_0(r, \theta) = \sum_{n \geq 2} A_n \cos n(\theta + \theta_0) J_n(-i\Omega r). \quad (3.2)$$

Подставим (3.2) в граничное условие при $\theta = 0$ и попытаемся определить константы A_n :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} D_1 A_n (-i\Omega)^2 J_n''(-i\Omega r) \cos n\theta_0 + \sum_{n \geq 2} D_2 A_n \frac{i\Omega n}{r} J_n'(-i\Omega r) \sin n\theta_0 - \\ - \sum_{n \geq 2} D_2 A_n \frac{-n}{r^2} J_n(-i\Omega r) \sin n\theta_0 + \sum_{n \geq 2} D_3 A_n (-i\Omega) J_n'(-i\Omega r) \cos n\theta_0 + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n \geq 2} \hat{D}_4 A_n \frac{-n}{r} J_n(-i\Omega r) \sin n\theta_0 + \sum_{n \geq 2} D_5 A_n J_n(-i\Omega r) \cos n\theta_0 = 0. \quad (3.3)$$

Пользуясь известными соотношениями между функциями Бесселя различных индексов и их производными (см. [13]), избавимся в (3.3) от производных функции J_n , а также от слагаемых вида $(1/r^k)J_n$ и в итоге получим

$$\sum_{n \geq 2} \left[\frac{D_1 \cos n\theta_0 - D_2 \sin n\theta_0}{4} A_n + i \frac{\hat{D}_3 \cos(n-1)\theta_0 - \hat{D}_4 \sin(n-1)\theta_0}{2} A_{n-1} - \right. \\ \left. - \frac{D_1 + 2\hat{D}_5}{2} \cos(n-2)\theta_0 A_{n-2} - i \frac{\hat{D}_3 \cos(n-3)\theta_0 + \hat{D}_4 \sin(n-3)\theta_0}{2} A_{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{D_1 \cos(n-4)\theta_0 + D_2 \sin(n-4)\theta_0}{4} A_{n-4} \right] J_{n-2}(-i\Omega r) = 0,$$

где $\hat{D}_3 = 2 \frac{m \operatorname{tg} \sigma}{M}$; $\hat{D}_4 = \frac{\beta \tilde{\beta}}{M^3}$; $\hat{D}_5 = \left(d \frac{\beta^2}{M^2} + \lambda \frac{M^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{\beta^2} \right)$.

Будем считать также, что $A_{-2} = A_{-1} = A_0 = A_1 = 0$. Тогда, полагая

$$\frac{D_1 \cos 2\theta_0 - D_2 \sin 2\theta_0}{4} A_2 = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{D_1}{D_2}, \quad A_2 \in R^1 \setminus \{0\}, \quad (3.4)$$

найдем остальные коэффициенты рекуррентным способом.

З а м е ч а н и е 3.1. Коэффициент D_1 больше нуля для режимов со слабой ударной волной (см. замечание 1.3), меньше нуля для режимов с сильной ударной волной и равен нулю для режима, соответствующего максимальному углу отклонения потока в косом скачке (см. [3]).

Проверим, что построенное решение действительно отвечает режиму обтекания с сильной ударной волной. Для этого достаточно убедиться в том, что при выполнении условия (3.4) коэффициент $D_1 < 0$. Представляя соотношение $\operatorname{tg} 2\theta_0 = D_1/D_2$ в виде

$$z^2 [M^2(2 + d(1 + M^2))] + z [M^2 \lambda(1 + M^2) - (dM^2 + 2)(1 - M^2)] - \lambda M^2(1 - M^2) = 0, \quad z = \operatorname{tg}^2 \sigma,$$

найдем его корни z_+ , z_- . Меньший корень z_- подставим в выражение для D_1 и докажем неравенство $D_1 < 0$. Имеем соотношение

$$d \left(2 + dM^2 + \lambda M^2 \frac{1 + M^2}{\beta^2} \right) + \frac{4\lambda M^2}{\beta^2} < \\ < d \sqrt{\left(2 + dM^2 - \lambda M^2 \frac{1 + M^2}{\beta^2} \right)^2 + \frac{4\lambda M^4}{\beta^2} (2 + d(1 + M^2))},$$

возводя которое в квадрат, получим

$$\frac{16\lambda^2 M^4}{\beta^4} + 8\lambda d M^2 \left(2 + \lambda M^2 \frac{1 + M^2}{\beta^2} \right) < \frac{8\lambda d^2 M^2}{\beta^2} (1 + M^2)$$

или

$$\frac{8\lambda M^2}{\beta^2} \left(d + \frac{\lambda M^2}{\beta^2} \right) (2 + d(1 + M^2)) < 0.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку для политропного газа выполнены условия $(d + \frac{\lambda r^2}{2}) > 0$ и $\lambda < 0$. Итак, построенное решение (пока формальное) действительно отвечает режиму обтекания с сильной ударной волной.

Замечание 3.2. Соотношение $\text{tg}^2 \sigma = z_-$ тоже является алгебраическим уравнением относительно δ в зависимости от M_∞ (σ и δ связаны между собой известным соотношением, см. [10] и рис. 2), которое, например, тривиально разрешимо для достаточно больших M_∞ . Следовательно, найдутся такие M_∞ и δ , при которых выполнено соотношение (3.4).

Докажем теперь сходимость ряда (3.2) при условии (3.4). Вычисляя коэффициенты A_n , видим, что при больших n

$$|A_n| \sim 2^{n-3} \prod_{k=3}^n \left| \frac{\hat{D}_3 \cos(k-1)\theta_0 - \hat{D}_4 \sin(k-1)\theta_0}{D_1 \cos k\theta_0 - \hat{D}_2 \sin k\theta_0} \right| + \\ + (|D_1| + |\hat{D}_5|)^m (\hat{D}_3 + \hat{D}_4)^s \prod_{k=2}^n \frac{1}{|D_1 \cos k\theta_0 - D_2 \sin k\theta_0|},$$

где m, s растут вместе с n и $m + s \leq n$. Полагаем, что $D_1 \cos k\theta_0 - D_2 \sin k\theta_0 \neq 0$, ибо если $D_1 \cos k\theta_0 - D_2 \sin k\theta_0 = 0$, то коэффициент при A_k равен нулю и этот член не войдет в ряд (3.3), т. е. в произведении такие множители не появятся. Далее, очевидно, что $|D_1 \cos k\theta_0 - D_2 \sin k\theta_0| > b > 0$ для всех k (b — константа, не зависящая от k). В итоге $|A_n| \sim a^n$, где a — некоторое число. Зафиксируем теперь r . Поскольку

$$|v_0(r, \theta)| \leq \sum_{n \geq 2} |A_n| |J_n(-i\Omega r)|, \quad |J_n(-i\Omega r)| \leq c \frac{\text{ch}(\Omega r)}{(n-1)!},$$

где c — константа, зависящая от Ω, r , то

$$|v_0(r, \theta)| \sim \sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{(n-1)!}.$$

Таким образом, ряд (3.2) сходится поточечно. Но очевидно, что ряд (3.2) будет сходиться равномерно в любой области вида $D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq r^* < \infty, -\theta_0 \leq \theta \leq 0\}$. Причем в D' функция $v_0(r, \theta)$ будет бесконечно дифференцируема. Для получения «решения» в исходной области $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r < \infty, -\theta_0 \leq \theta \leq 0\}$ положим $v(r, \theta) \equiv 0$ в $D \setminus D'$.

Определим собственное число, которому отвечает найденное «решение». Для этого проинтегрируем первое уравнение из (3.1) по области D :

$$\int_D \Delta v \, dx \, dy = \Omega^2 \int_D v \, dx \, dy.$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\Omega^2 \int_D v \, dx \, dy = \int_{\partial D} \frac{\partial v}{\partial n} \, dl = \int_{\partial D_1} \frac{\partial v}{\partial n} \, dl + \int_{\partial D_2} \frac{\partial v}{\partial n} \, dl,$$

где $\partial D_1 = \{(r, \theta) : r > 0, \theta = -\theta_0\}$; $\partial D_2 = \{(r, \theta) : r > 0, \theta = 0\}$. Интеграл $\int_{\partial D_1} \frac{\partial v}{\partial n} \, dl = 0$ в силу условия непротекания. Тогда

$$\Omega^2 \int_D v dx dy = \int_{\partial D_2} \frac{\partial v}{\partial n} dl. \quad (3.5)$$

Но $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D_2} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Выражая $\frac{\partial v}{\partial y}$ из условия на ударной волне, находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{D_4} (D_1 v_{xx} + D_2 v_{xy} + D_3 v_x + D_5 v). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5) и используя то, что

$$v, v_x, v_y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

имеем

$$\Omega = -\frac{\hat{D}_5 \int_{\partial D_2} v \Big|_{\partial D_2} dl}{\hat{D}_4 \int_D v dx dy}. \quad (3.8)$$

Замечание 3.3. Условия (3.7) выполняются для всех решений задачи (3.1) (см. [14]).

Подставляя в (3.8) соотношение (3.2), получим

$$\Omega = -\frac{\hat{D}_5 \sum_{n \geq 2} A_n \cos n\theta_0 \int_0^{r^*} J_n(-i\Omega r) dr}{\hat{D}_4 \sum_{n \geq 2} A_n (\sin n\theta_0)/n \int_0^{r^*} r J_n(-i\Omega r) dr}. \quad (3.9)$$

В итоге имеем алгебраическое уравнение на Ω (при фиксированном значении r^*). Исследуем вопрос о разрешимости (3.9). Для этого рассмотрим функцию

$$F(\Omega) = \Omega + \frac{\hat{D}_5 \sum_{n \geq 2} A_n \cos n\theta_0 \int_0^{r^*} J_n(-i\Omega r) dr}{\hat{D}_4 \sum_{n \geq 2} A_n (\sin n\theta_0)/n \int_0^{r^*} r J_n(-i\Omega r) dr}.$$

Далее, если A_2 положить действительным, то A_n , как и $J_n(-i\Omega r)$, будет действительным при четном индексе и чисто мнимым при нечетном, т. е. функция F имеет действительные значения. При $\Omega \rightarrow +\infty$ дробь ограничена, откуда $F(+\infty) = +\infty$, а $F(0) = \frac{8}{3r^*} \frac{\hat{D}_5}{\hat{D}_4} \frac{D_2}{D_1} < 0$. Тогда, рассматривая $F(\Omega)$ на отрезке $[0, B]$, где значение B достаточно велико, имеем, что $F(\Omega)$ непрерывна на нем и будет принимать на концах значения разного знака при положительном \hat{D}_5 (что, в свою очередь, возможно при малых σ). Кроме того, $F'_{\Omega} \Big|_{r^*=0} > 0$, поэтому для достаточно малых r^* функция $F(\Omega)$ монотонно возрастает. Следовательно, у уравнения $F(\Omega) = 0$ есть единственный положительный корень Ω_1 , найти который можно, скажем, методом деления отрезка пополам (см., например, [15]). Этот корень и объявим собственным значением задачи (1.14). Теперь из формул п. 1 следует, что $\omega > 0$. В итоге, беря начальные данные для задачи (1.10) как угодно малыми по норме, тем не менее имеем неограниченное возрастание решения с течением времени в любой разумной норме.

Замечание 3.4. На самом деле полученное решение не обладает свойствами, которые были бы желательны в нашем случае, поскольку априорная оценка, гарантирующая корректность исходной постановки рассматриваемой задачи, получена в классе функций из пространства \overline{W}_2^2 . Следовательно, эти функции можно так подправить на множестве меры нуль, что они будут непрерывными (см., например, [5]). Полученное в этом пункте частное «решение» не обладает таким свойством (оно имеет линию сильного разрыва $r = r^*$, $-\theta_0 < \theta < 0$).

Положение можно исправить, если рассмотреть задачу вида

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r - \Omega_1^2 v &= 0, & r^* < r < r^* + \varepsilon, & \theta \in (-\theta_0, 0); \\ D_1 v_{rr} + D_2 \left\{ \frac{1}{r} v_{r\theta} - \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} \right\} + D_3 v_r + D_4 \frac{1}{r} v_\theta + D_5 v &= 0, \\ r^* < r < r^* + \varepsilon, & \theta = 0; \\ v = 0, & r = r^* + \varepsilon, & \theta \in (-\theta_0, 0); \\ v = v_0(r^*, \theta), & r = r^*, & \theta \in (-\theta_0, 0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь коэффициенты со штрихами отличаются от аналогичных коэффициентов без штрихов тем, что вместо Ω в них стоит Ω_1 ; ε — малое число, которое выбирается так, чтобы Ω_2 оставалось положительным (см. рассуждения ниже).

Задача (3.10), несомненно, разрешима (см. [14]), обозначим ее решение через v_1 . Подставляя в формулу (3.8) функцию

$$v = \begin{cases} v_0 & \text{при } 0 < r < r^*, & \theta \in (-\theta_0, 0); \\ v_1 & \text{при } r^* < r < r^* + \varepsilon, & \theta \in (-\theta_0, 0); \\ 0 & \text{при } r^* + \varepsilon < r, & \theta \in (-\theta_0, 0), \end{cases} \quad (3.11)$$

находим новое значение Ω_2 , которое, в свою очередь, подставим в (3.2) и (3.10). После чего рассматриваем функцию v^1 , аналогичную (3.11) с той лишь разницей, что в v^1 вместо v_1 стоит решение задачи (3.10), отвечающее числу Ω_2 , и т. д. Таким образом, функцию v_0 можно считать приближением частного решения из \overline{W}_2^2 , экспоненциально растущего с течением времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Courant R., Friedrichs K. D. Supersonic flow and shock waves. N.Y.: Interscience Publ., 1948.
2. Блохин А. М., Роменский Е. И. Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1978. № 13, вып. 3. С. 87–97.
3. Русанов В. В., Шаракшанэ А. А. Исследование линеаризованной нестационарной модели обтекания бесконечного клина. М., 1980. (Препр. ИПМ им. Келдыша; № 103).
4. Блохин А. М. Корректность линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании клина // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 48–58.
5. Блохин А. М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
6. Рылов А. И. О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55, вып. 1. С. 95–99.

7. **Никольский А. А.** О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа: Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
8. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970.
9. **Рождественский Б. Л.** Уточнение теории обтекания клина сверхзвуковым потоком невязкого газа // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 8. С. 99–102.
10. **Бай Ши-И.** Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
11. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
12. **Иорданский С. В.** Об устойчивости стационарной ударной волны // ПММ. 1957. Т. 21, вып. 4. С. 465–472.
13. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. И.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1988.
14. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
15. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

*Поступила в редакцию 12/IV 1994 г.,
в окончательном варианте — 17/V 1994 г.*
