Теплофизика и аэромеханика, 2013, том 20, № 1

УДК 532.516.5:518.12

Движение жидкой пленки и газового потока в микроканале с испарением*

В.В. Кузнецов[1,2], В.К. Андреев[3,4]

[1]*Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

[2]*Новосибирский государственный университет*

[3]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

[4]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

E-mail: kuznetsov@hydro.nsc.ru

В специально выбранных переменных поставлена задача установившегося совместного движения в микроканале газового потока и жидкой пленки при действии местного нагрева с учетом процессов испарения. Построены точные решения линеаризованной задачи. Получены аналитические формулы для расчета установившейся ниже нагревателя толщины пленки и суммарной скорости испарения жидкости. Показан способ приближенного расчета суммарной теплоотдачи. Приведен пример расчетов.

Ключевые слова: микроканал, испарение, точные решения, теплоотдача.

Введение

Интерес к изучению теплоотдачи движущейся по охлаждаемой твердой поверхности пленки жидкости определяется важностью этого процесса для технических приложений. Чаще всего пленка стекает с поверхности под действием тяготения. При охлаждении устройств микроэлектроники, как правило, размеры нагреваемых участков невелики. По этой теме опубликовано большое число работ. Обзор экспериментальных и теоретических работ по локально нагреваемой пленке жидкости, стекающей под действием гравитации, выполнен в работе [1]. Однако в ряде случаев (например, при пониженном тяготении) требуется анализ и других возможных причин движения. Жидкую пленку может приводить в движение поток газа. Среди теоретических исследований таких задач преобладает численное направление: в различных постановках проводились расчеты полей скорости, температуры, концентрации а также эволюции границы раздела фаз (см. [2–4]). Это вполне оправдано: современные численные методы позволяют проводить расчеты с учетом многих физических факторов,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00007), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт 14.740.11.0355) и программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН № 2.13.2.

оказывающих влияние на движение пленки, таких как наличие больших температурных градиентов, процессов испарения или конденсации, зависимости свойств жидкости от температуры или других термодинамических параметров и т. д. Но не утратил своего значения и метод, основанный на построении точных решений упрощенных задач. Точные решения позволяют вывести конечные формулы и выявить явные зависимости характеристик течения и теплопереноса от управляющих параметров. Эти формулы удобны при планировании опытов и проектировании устройств. Известно, что во многих случаях формулы, полученные из решений задач с упрощающими предположениями, продолжают отражать физические закономерности далеко за пределами этих упрощений. Классическим примером может служить моделирование водяного бора в рамках теории мелкой воды, хотя бор не вписывается в допущения этой теории. Кроме того, точные решения являются идеальными тестами для проверки и оценки точности численных расчетов.

Точные решения задач для стекающих пленок с локальными нагревами получены в работах [5–7]. При наличии газовых потоков представляется необходимым учитывать процессы испарения. В настоящее время неизвестны примеры точных решений таких задач.

В настоящей работе рассматривается задача о совместном движении в микроканале газового потока и жидкой пленки при действии локального нагрева. Предполагается, что течение установившееся и плоскопараллельное, на подложке и верхней стенке канала поддерживается некоторая постоянная температура за исключением области нагревателя, расположенного на подложке и имеющего заданное распределение температуры. В приближении тонкого слоя задача сводится к решению граничной задачи для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Для линеаризованного уравнения построено точное решение, выведены формулы для определения общей интенсивности испарения и теплоотдачи.

1. Математическая модель

Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α. Выберем систему декартовых координат x, y так, что ось Oy ортогональна к подложке, а ось Ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < H(x)\}$, где H — толщина пленки, а газ занимает область $\Omega_g = \{(x, y): -\infty < x < \infty, H(x) < y < H_1\}$. Здесь H_1 — высота канала. Если u, v и u_g, v_g — компоненты векторов скорости $\vec{v}$, $\vec{v}_g$ жидкости и газа соответственно, p, p_g — гидродинамические давления в средах, а T, T_g — температура жидкости и газа, то движение описывается нижеследующими системами уравнений. В жидкости при $0 < y < H(x)$:

$$\rho(uu_x + vu_y) = -p_x + \rho g \sin\alpha + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (1)$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y - \rho g \cos\alpha + \mu(v_{xx} + v_{yy}), \quad (2)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (3)$$

$$\rho c_p(uT_x + vT_y) = \kappa(T_{xx} + T_{yy}). \quad (4)$$

Пусть C — концентрация (безразмерная) испарившейся жидкости в газе. Тогда в газе при $H(x) < y < H_1$:

$$\rho_g(u_g u_{gx} + v_g u_{gy}) = -p_{gx} + \rho_g g \sin\alpha + \mu_g(u_{gxx} + u_{gyy}), \quad (5)$$

$$\rho_g(u_g v_{gx} + v_g v_{gy}) = -p_{gy} - \rho_g g \cos\alpha + \mu_g(v_{gxx} + v_{gyy}), \quad (6)$$

$$u_{gx} + v_{gy} = 0, \tag{7}$$

$$\rho_g c_{pg} (u_g T_{gx} + v_g T_{gy}) = \kappa_g (T_{gxx} + T_{gyy}), \tag{8}$$

$$u_g C_x + v_g C_y = D(C_{xx} + C_{yy}). \tag{9}$$

Здесь κ, κ_g — коэффициенты теплопроводности, c_p, c_{pg} — удельные теплоемкости, μ, μ_g — динамические коэффициенты вязкости, ρ, ρ_g — плотности жидкости и газа соответственно, g — ускорение силы тяжести, а D — коэффициент диффузии.

Граничные условия имеют следующий вид: на подложке при y = 0

$$u = v = 0, \tag{10}$$

$$T = T_1(x), \tag{11}$$

на свободной поверхности пленки при $y = H(x)$

$$\vec{v} - \vec{n}(\vec{v}\cdot\vec{n}) = \vec{v}_g - \vec{n}(\vec{v}_g \cdot \vec{n}), \tag{12}$$

$$\rho\vec{v}\cdot\vec{n} = C\rho_g \vec{v}_g \cdot \vec{n} - D\rho_g \frac{\partial C}{\partial n}, \tag{13}$$

$$\rho_g \vec{v}_g \cdot \vec{n} = \rho\vec{v}\cdot\vec{n}, \tag{14}$$

$$(P - P_g)\cdot\vec{n} = \sigma K\vec{n} + \nabla_s\sigma + \rho_g(\vec{v}_g\cdot\vec{n})^2\left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1\right)\vec{n}, \tag{15}$$

$$\kappa\frac{\partial T}{\partial n} - \kappa_g\frac{\partial T_g}{\partial n} = \frac{\lambda D\rho_g}{1 - C}\cdot\frac{\partial C}{\partial n}, \tag{16}$$

$$T = T_g, \tag{17}$$

$$C = C_*(T), \tag{18}$$

и с условиями на верхней стенке канала при $y = H_1$

$$u_g = v_g = 0, \tag{19}$$

$$T_g = T_0, \tag{20}$$

$$C = C_0. \tag{21}$$

Здесь T_0 — постоянная температура жидкости, газа и стенок канала (за исключением зоны нагревателя), $T_1(x)$ — заданная температура нижней стенки канала (ниже везде будем считать, что $T_1(x) \ne T_0$ только на некотором конечном интервале — в зоне нагревателя); функция $C_*(T) = C_0 + C_T(T - T_0)$, $C_0, C_T = \text{const}$ задает зависимость концентрации насыщенного пара от температуры; K — кривизна поверхности раздела; $\nabla_s = \nabla - \vec{n}(\vec{n}\cdot\nabla)$ — поверхностный градиент; коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейно зависящим от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, $\sigma_0, \sigma_T = \text{const} > 0$; $P = -pI + 2\mu W$, $P_g = -p_g I + 2\mu_g W_g$ — тензоры напряжений в жидкости и в газе; $\vec{n}$ — нормальный вектор; λ — удельная теплота испарения; W, W_g — тензоры скоростей деформаций.

Условие (12) задает непрерывность тангенциальной скорости на границе раздела вязких сред, (13) и (14) следуют из законов сохранения вещества: жидкости при испарении (конденсации) и суммарного. Динамическое условие (15) вытекает из закона сохранения импульсов, последнее слагаемое в правой части (15) задает динамическое воздействие на жидкость испаряющегося вещества. Остальные граничные условия традиционны.

Сделаем в задаче (1)–(21) замену переменных. В области Ω перейдем от переменных x, y и компонент вектора скорости u, v к переменным $x, \xi = y / H(x)$ и модифицированным компонентам вектора скорости $u^1 = uH$, $v^1 = v - u\xi H'$. Тогда получаем формулы для замены переменных при дифференцировании $\partial/\partial x = \partial/\partial x -$ $- (\xi H'/H)(\partial/\partial\xi)$, $\partial / \partial y = (1/H)(\partial / \partial\xi)$. В области Ω_g переменные x, y, u_g, v_g заменим на x, η, u_g^1, v_g^1, введенные соотношениями $y = \dfrac{H_1 - H}{\omega - 1}\eta + \dfrac{H\omega - H_1}{\omega - 1}$, $u_g^1 = \dfrac{H_1 - H}{\omega - 1} u_g$, $v_g^1 = v - \dfrac{H_1 - y}{H_1 - H} H' u_g$. Здесь $\omega = H_1/H_0$, где H_0 есть толщина невозмущенной пленки далеко вверх по потоку. Такие замены переменных удобны тем, что они сохраняют вид уравнений неразрывности (3), (7), а кинематические условия на свободной поверхности пленки (12)–(14) упрощаются.

Проведя в задаче (1)–(21) замены переменных, получим в полосе $0 < \xi < 1$, занятой жидкостью, систему:

$$\frac{\rho}{H^2}\left(u^1 u_x^1 + v^1 u_\xi^1 - \frac{H'\left(u^1\right)^2}{H}\right) = -p_x + \frac{\xi H'}{H} p_\xi +$$

$$\rho g \sin\alpha + \mu\left(\frac{u^1{}_{xx}}{H} + \frac{u^1{}_{\xi\xi}(1 + \xi^2 H'^2)}{H^3} + \ldots\right), \tag{22}$$

$$\frac{\rho}{H}\left(u^1 w_x^1 + v^1 v_\xi^1 + u^1 Z_x + v^1 Z_\xi\right) = -\frac{1}{H} p_\xi - \rho g \cos\alpha + \mu\left(v^1{}_{xx} + \frac{v^1{}_{\xi\xi}}{H^2} + \ldots\right), \tag{23}$$

$$u_x^1 + v_\xi^1 = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\rho c_p}{H}\left(u^1 T_x + v^1 T_\xi\right) = \kappa\left(T^1{}_{xx} + \frac{T_{\xi\xi}(1 + \xi^2 H'^2)}{H^2} + \ldots\right). \tag{25}$$

Здесь $Z = \xi H' u^1 / H$. В правых частях уравнений (22), (23), (25) часть слагаемых опущена: ниже они становятся младшими по порядку величин при применении приближения тонкого слоя, а полные уравнения несколько громоздкие. Аналогично, в области движения газа $1 < \eta < \omega$ уравнения примут вид

$$\frac{\rho_g(\omega-1)^2}{(H_1 - H)^2}\left(u_g^1 u_{gx}^1 + v_g^1 u_{g\eta}^1 + \frac{H'\left(u_g^1\right)^2}{(H_1 - H)}\right) = -p_{gx} + \frac{(\omega - \eta)H'}{(H_1 - H)} p_{g\eta} + \rho_g g \sin\alpha +$$

$$+\mu_g\left(\frac{(\omega-1)}{(H_1 - H)} u_{gxx}^1 + \frac{(\omega-1)^3}{(H_1 - H)^3} u_{g\eta\eta}^1 + \ldots\right), \tag{26}$$

$$\frac{\rho_g(\omega-1)}{(H_1-H)}\left(u_g^1 v_g^1 + v_g^1 v_g^1 + u_g^1 Z_{gx} + v_g^1 Z_{g\eta}\right) = -\frac{(\omega-1)}{(H_1-H)} p_\eta - \rho_g g\cos\alpha + \\ +\mu_g\left(v_{gxx}^1 + \frac{(\omega-1)^2}{(H_1-H)^2} v_{g\eta\eta}^1 + \ldots\right), \tag{27}$$

$$u_{gx}^1 + v_{g\eta}^1 = 0, \tag{28}$$

$$\frac{(\omega-1)}{(H_1-H)}\rho_g c_{pg}\left(u_g^1 T_{gx} + v_g^1 T_{g\eta}\right) = \kappa_g\left(T_{gxx} + \frac{(\omega-1)^2}{(H_1-H)^2} T_{g\eta\eta} + \ldots\right). \tag{29}$$

$$\frac{(\omega-1)}{(H_1-H)}\left(u_g^1 C_x + v_g^1 C_\eta\right) = \kappa_g\left(C_{xx} + \frac{(\omega-1)^2}{(H_1-H)^2} C_{\eta\eta} + \ldots\right). \tag{30}$$

Здесь $Z_g = (\omega-\eta)H'u_g^1 \big/ (H_1-H)$, а в правых частях уравнений (26), (27), (29), (30) также не приведены все слагаемые.

Граничные условия на подложке при $\xi = 0$ преобразуются к виду:

$$u^1 = v^1 = 0, \tag{31}$$

$$T = T_1(x), \tag{32}$$

на свободной поверхности пленки при $\xi = 1$:

$$\frac{1}{H}u^1 + H'\left(v^1 + \frac{H'u^1}{H}\right) = \frac{(\omega-1)}{(H_1-H)}u_g^1 + H'\left(v_g^1 + \frac{(\omega-1)}{(H_1-H)}H'u_g^1\right), \tag{33}$$

$$v^1 = -\frac{\rho_g D}{(1-C)\rho}\left[-H'C_x + \frac{(\omega-1)}{(H_1-H)}\left(1+H'^2\right)C_\eta\right], \tag{34}$$

$$\rho_g v_g^1 = \rho v^1, \tag{35}$$

$$p_g - p + 2\mu\vec{n}\cdot W\cdot\vec{n} - 2\mu_g\vec{n}\cdot W_g\cdot\vec{n} = \sigma\frac{H''}{\sqrt{\left(1+H'^2\right)^3}} + \frac{\rho_g(v_g^1)^2}{1+H'^2}\left(\frac{\rho_g}{\rho}-1\right), \tag{36}$$

$$2\mu\vec{s}\cdot W\cdot\vec{n} - 2\mu_g\vec{s}\cdot W_g\cdot\vec{n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{1+H'^2}}, \tag{37}$$

$$\kappa\left[-\frac{H'}{\sqrt{1+H'^2}}T_x + \frac{\sqrt{1+H'^2}}{H}T_\xi\right] - \kappa_g\left[-\frac{H'}{\sqrt{1+H'^2}}T_{gx} + \frac{(\omega-1)\sqrt{1+H'^2}}{(H_1-H)}T_{g\eta}\right] = \\ = \frac{\lambda\rho_g D}{1-C}\left[-H'C_x + \frac{(\omega-1)}{(H_1-H)}\left(1+H'^2\right)C_\eta\right], \tag{38}$$

$$T = T_g, \tag{39}$$

$$C = C_*(T), \tag{40}$$

и с условиями на верхней стенке канала при $\eta = \omega$:

$$u_g^1 = v_g^1 = 0, \tag{41}$$

$$T_g = T_0, \tag{42}$$

$$C = C_0. \tag{43}$$

Заметим следующее. Переменные ξ, η используются каждая в своей области, и их можно обозначить одной буквой. Ниже используется только переменная ξ так, что при $\xi > 1$ она отождествляется с переменной η. Зададим масштабы размерных величин — толщины пленки, интенсивности нагрева, скорости жидкости и продольной длины — следующим образом:

$$U = \frac{\mu}{\rho H_0}, \quad \delta T = \max\left|T_1 - T_0\right|, \quad l = \left(\frac{\sigma_0 H_0^2}{\rho U^2}\right)^{1/3}. \tag{44}$$

Будем считать, что имеет место приближение тонкого слоя, при котором $\varepsilon = H_0/l << 1$. Масштабы $H_0, \delta T, U$ часто использовались раньше в различных работах, величина l является аналогом капиллярной длины и введена в работе [6] специально для приведения задач динамики локально нагреваемых жидких пленок к безразмерному виду. Дело в том, что при применении приближения тонкого слоя используемые характерные масштабы размерных величин не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять следующим условиям: продольная длина l должна быть того же порядка, что и размеры появляющихся на пленке структур (толщины возникающих валов и впадин); входящие в старшие по порядку величин члены — безразмерные критерии подобия, должны быть порядка единицы; наконец, фактически рассчитанные значения неизвестных (безразмерных) величин должны быть умеренными. Апостериори установлено, что заданные в (44) масштабы отвечают этим требованиям.

В задаче (22)–(43) перейдем к безразмерным переменным $\overline{x}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u}_g$, $\overline{v}_g$, θ, θ_g, h, $\overline{p}$, $\overline{p}_g$, θ_0, $\overline{c}$ с помощью формул:

$$x = l\overline{x},\ u^1 = UH_0\overline{u},\ u_g^1 = UH_0\overline{u}_g,\ v^1 = UH_0\overline{v}/l,\ v_g^1 = UH_0\overline{v}_g/l,\ H = hH_0, T = T_0 + \delta T\theta,$$

$$T_g = T_0 + \delta T\theta_g,\ T_1 = T_0 + \delta T\theta_0,\ p = p_0 - fl\overline{x} + \sigma_0 H_0\overline{p}/l^2 + \rho gl\overline{x}\sin\alpha - \rho gH_0\xi\cos\alpha,$$

$$p_g = p_0 - fl\overline{x} + \sigma_0 H_0\overline{p}_g/l^2 + \rho_g g_g l\overline{x}\sin\alpha - \rho_g g_g H_0\xi\cos\alpha,\ C = C_0 + \delta TC_T\overline{c}.$$

Здесь постоянные p_0, f имеют следующий смысл. Если движение в канале изотермическое, то при отсутствии возмущений известно точное решение задачи совместного движения с прямолинейными линиями тока (например, [3]). При этом в газе давление имеет постоянный градиент по продольному направлению, т. е. $p_g = p_0 - fx$. Используя эти обозначения и пренебрегая младшими по степеням ε членами, запишем задачу (22)–(43) в следующем виде (черточки над переменными ниже везде опускаем). При $0 < \xi < 1$ выполнена система уравнений:

$$u_{\xi\xi} - h^3\left(p_x - E\right) = 0, \tag{45}$$

$$p_\xi = 0, \tag{46}$$

$$u_x + v_\xi = 0, \tag{47}$$

$$\theta_{\xi\xi} = 0, \tag{48}$$

в области движения газа $1 < \xi < \omega$ уравнения примут вид

$$k_1 u_{g\varsigma\varsigma} - \frac{(\omega - h)^3}{(\omega - 1)^3}\left(p_{gx} - \mathrm{E}\right) = 0, \tag{49}$$

$$p_{g\xi} = 0, \tag{50}$$

$$u_{gx} + v_{g\xi} = 0, \tag{51}$$

$$\theta_{g\xi\xi} = 0, \tag{52}$$

$$c_{\xi\xi} = 0. \tag{53}$$

Граничные условия примут следующий вид. При $\xi = 0$:

$$u = v = 0, \tag{54}$$

$$\theta = \theta_0(x), \tag{55}$$

при $\xi = 1$:

$$\frac{1}{h}u = \frac{(\omega-1)}{(\omega-h)}u_g, \tag{56}$$

$$v = -\frac{k_4\mathrm{R}(\omega-1)}{(1-C_0-k_4c)(\omega-h)}c_\xi, \tag{57}$$

$$k_3v_g = v, \tag{58}$$

$$p_g - p = h'' - \mathrm{A}h + \mathrm{C}x, \tag{59}$$

$$\frac{1}{h^2}u_\xi - k_1\frac{(\omega-1)^2}{(\omega-h)^2}u_{g\xi} = -\mathrm{Ma}\theta_x, \tag{60}$$

$$\frac{1}{h}\theta_\xi - k_2\frac{(\omega-1)}{(\omega-h)}\theta_{g\xi} = \frac{k_4\mathrm{L}(\omega-1)}{(1-C_0-k_4c)(\omega-h)}c_\xi, \tag{61}$$

$$\theta = \theta_g, \tag{62}$$

$$c = \theta, \tag{63}$$

и с условиями при $\xi = \omega$:

$$u_g = v_g = 0, \tag{64}$$

$$\theta_g = 0, \tag{65}$$

$$c = 0. \tag{66}$$

Здесь безразмерные постоянные $A, C, \mathrm{Ma}, E, L, R, k_1, k_2, k_3, k_4$ задаются формулами

$$A = \frac{g\cos\alpha H_0^3}{U^2l^2},\quad C = \frac{g\sin\alpha H_0}{U^2},\quad \mathrm{Ma} = \frac{\sigma_T\delta TH_0}{\mu Ul},\quad E = \frac{fH_0^2}{\mu U},\quad L = \frac{\lambda\rho_gDC_T}{\kappa},$$

$$R = \frac{\rho_gD\delta TC_Tl}{\rho H_0^2U},\quad k_1 = \frac{\mu_g}{\mu},\quad k_2 = \frac{\kappa_g}{\kappa},\quad k_3 = \frac{\rho_g}{\rho},\quad k_4 = C_T\delta T.$$

Числа A, C задают вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и поперечной) составляющих, Ma является числом Марангони, задающим вклад термокапиллярных сил, действующих на поверхности неоднородно нагретой пленки. Число испарения L характеризует величину потери тепла при испарении, число R — потерю массы при испарении, а число E — действие продольного градиента давления. Кроме того, в постановку задачи входит еще определенное выше отношение толщины невозмущенной пленки и высоты канала ω. В теории тонких пленок удобными параметрами, характеризующими интенсивность течений в жидкости и в газе, являются числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = Q\rho/\mu$, $\mathrm{Re}_g = Q_g\rho_g/\mu_g$, где Q, Q_g — расходы жидкого и газового потоков. Зная решение невозмущенной задачи с прямолинейными линиями тока, легко установить связь чисел Рейнольдса с другими параметрами. Из четырех постоянных $\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_g, E, \omega$ две должны быть заданы (обычно задаются числа Рейнольдса), а две другие вычисляются с помощью соотношений

$$\mathrm{Re} = \frac{3E(\omega-1)^2 + 4(E+C)(\omega-1) + k_1(E+C)}{12(\omega-1+k_1)},$$
$$\mathrm{Re}_g = k_3(\omega-1)^2 \frac{E(\omega-1)^2 + 3k_1(E\omega+C) + k_1 E(\omega-1)}{12k_1^2(\omega-1+k_1)}. \quad (67)$$

Из уравнений (52), (53) и граничных условий (63), (65), (66) следует, что $c \equiv \theta_g$. Кроме того, из равенств (48), (52) и граничных условий (55), (62), (65) получаем решение задачи определения температуры $\theta = \theta_0 + \xi(\theta_1 - \theta_0)$, $\theta_g = (\omega-\xi)\theta_1/(\omega-1)$, где $\theta_1 = \theta(x,1)$. Подставляя эти значения температуры и концентрации в условие (61), получим квадратное уравнение для определения функции $\theta_1(x)$ вида

$$\theta_1^2\left(\frac{k_4}{h} + \frac{k_2 k_4}{\omega-h}\right) - \theta_1\left(\frac{1-C_0}{h} + \frac{k_4\theta_0}{h} + \frac{k_2(1-C_0)}{\omega-h} + \frac{k_4 h\mathrm{L}}{\omega-h}\right) + \frac{\theta_0(1-C_0)}{\omega-h} = 0. \quad (68)$$

Нетрудно заметить, что один их корней (68) больше θ_0, а другой — меньше. По физическому смыслу первый корень отбрасывается. Далее обозначим $Y(x) = u_\xi(x,1)$, $Y_g(x) = u_{g\xi}(x,1)$. Дважды интегрируя по ξ уравнение (45) с использованием граничных условий (54), (60), получаем

$$u(x,\xi) = \xi Y - (\xi - \xi^2/2)h^3(p' - E), \quad (69)$$

а двукратное интегрирование уравнения (49) с учетом условий (60), (64) дает

$$u_g(x,\xi) = (\omega-\xi)Y_g + \frac{[(\omega-\xi)^2 - (\xi-1)^2](\omega-h)^3}{2k_1(\omega-1)^3}(p_g' - E). \quad (70)$$

Интегрируя уравнение неразрывности (47) по ξ от 0 до 1 и прибавляя умноженное на k_3 и проинтегрированное по ξ от 1 до ω уравнение неразрывности (51), получим, используя условия (54), (58), (60), (64),

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^1 u(x,\xi)d\xi + k_3\int_1^\omega u_g(x,\xi)d\xi\right] = 0,$$

$$\text{или} \quad \int_0^1 u(x,\xi)d\xi + k_3\int_1^\omega u_g(x,\xi)d\xi = \mathrm{const} = \mathrm{Re} + k_1\,\mathrm{Re}_g.$$

Отсюда и из (69), (70) получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\left(Y - k_3(\omega-1)^2 Y_g\right) - \frac{1}{3}\left[h^3(p'-E) + \frac{k_3}{k_1}(\omega-h)^3(p_g'-E)\right] = \mathrm{Re} + k_1\,\mathrm{Re}_g. \quad (71)$$

Заметим, что граничные условия (56), (59), (60), соотношения (69) и (70), рассматриваемые при значении $\xi = 1$, а также (71) являются системой шести линейных уравнений для определения шести величин $u\big|_{\xi=1}, u_g\big|_{\xi=1}, Y, Y_g, (p'-E), (p_g'-E)$. Решая эту систему и подставляя значения $Y, (p'-E)$ в (69), получим

$$u(x,\xi) = V_1\left(h''' - Ah' + C\right) + \mathrm{Ma}\,V_2\theta_1' + V_3(\mathrm{Re} + k_1\,\mathrm{Re}_g), \quad (72)$$

где функции $V_1(x,\xi), V_2(x,\xi), V_3(x,\xi)$ задаются формулами

$$V_1(x,\xi) = -\frac{\xi h^3(\omega-h)\left[k_3(\omega-h)^2 + k_1 h^2(1-3\xi) - k_3\xi(\omega-h)^2\right]}{k_3(\omega-h)^4 + k_1 h^2[(\omega-h)^2 + 2(\omega^2-h^2)] + k_1{}^2 h^4},$$

$$V_2(x,\xi) = \frac{\xi h^2(\omega-h)\left[k_3(\omega-h)^3 + 2k_1 h^3(1-3\xi)\right]}{k_3(\omega-h)^4 + k_1 h^2[(\omega-h)^2 + 2(\omega^2-h^2)] + k_1{}^2 h^4},$$

$$V_3(x,\xi) = -\frac{6k_1\xi h^2\left[h^2(1-2\xi-k_1+2\xi k_1) - \omega^2 + 2\xi\omega h\right]}{k_3(\omega-h)^4 + k_1 h^2[(\omega-h)^2 + 2(\omega^2-h^2)] + k_1{}^2 h^4}.$$

Интегрируя уравнение неразрывности (47) по ξ от 0 до 1 и используя условия (54), (57), получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 u(x,\xi)d\xi = -v\big|_{\xi=1} = \frac{k_4 R(\omega-1)}{(1-C_0-k_4 c)(\omega-h)}c_\xi = -\frac{k_4 R\theta_1}{(1-C_0-k_4\theta_1)(\omega-h)}.$$

Подставив сюда из (72) выражение для скорости u и проведя интегрирование, получим уравнение для определения толщины пленки $h(x)$ вида

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi\left(h''' - Ah' + C\right) + \gamma\,\mathrm{Ma}\,\theta_1' + \delta\left(\mathrm{Re} + k_1\,\mathrm{Re}_g\right)\right] + \frac{k_4 R\theta_1}{(1-C_0-k_4\theta_1)(\omega-h)} = 0, \quad (73)$$

где функции φ, γ, δ, зависящие от толщины пленки $h(x)$, задаются формулами

$$\varphi(h) = \frac{h^3(\omega-h)^2\left[k_3(\omega-h)^2 - 3k_1 h^2\right]}{6\left\{k_3(\omega-h)^4 + k_1 h^2[(\omega-h)^2 + 2(\omega^2-h^2)] + k_1{}^2 h^4\right\}},$$

$$\gamma(h) = -\frac{h^2(\omega-h)\left[k_3(\omega-h)^3 + 2k_1 h^3\right]}{2\left\{k_3(\omega-h)^4 + k_1 h^2[(\omega-h)^2 + 2(\omega^2-h^2)] + k_1{}^2 h^4\right\}}, \quad (74)$$

$$\delta(h) = -\frac{k_1 h^2\left[4\omega h - 3\omega^2 h^2 - h^2 + k_1 h^2\right]}{k_3(\omega-h)^4 + k_1 h^2[(\omega-h)^2 + 2(\omega^2-h^2)] + k_1{}^2 h^4}.$$

Поставим для уравнения (73) граничные условия. Будем считать, что при удалении от нагревателя вверх и вниз по потоку все возмущения затухают и поверхность пленки становится плоской. Но если выше по потоку ее толщина известна, то ниже толщина уменьшается из-за испарения. Поэтому в качестве граничных условий будем использовать следующие:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} h'(x) = 0. \quad (75)$$

2. Точные решения

Задачу (73)–(75) можно решать численно. Поскольку порядок уравнения (73) более высокий, чем второй, для расчетов потребуются дополнительные условия. Например, можно считать, что при $x \to \pm\infty$ отсутствуют осцилляции, поэтому вырождаются производные первого и второго порядков. В настоящей работе численных расчетов задачи для нелинейного уравнения (73) не производится, а для построения точных решений упростим задачу с помощью предположений, аналогичных примененным в работах [5, 6] при изучении стекающих пленок. Будем считать, что нагрев незначительный, и если

$h=1+h_1$, то значение функции h_1 и ее производных мало по сравнению с единицей. Тогда уравнение (73) можно линеаризовать, и оно примет вид

$$\varphi_0\left(h_1^{IV}-Ah_1''\right)+\left(\varphi_1 C+\delta_1(\mathrm{Re}+k_1\,\mathrm{Re}_g)\right)h_1'=-\gamma_0\,\mathrm{Ma}\,\theta_1''-\frac{k_4R\theta_1}{(1-C_0-k_4\theta_1)(\omega-1)}. \quad (76)$$

Если обозначить $z=h_1'$, то (76) записывается в виде

$$z'''-Az'+Nz=-\frac{\gamma_0}{\varphi_0}\mathrm{Ma}\,\theta_1''-\frac{k_4R\theta_1}{(1-C_0-k_4\theta_1)(\omega-1)},\quad N=\frac{\varphi_1}{\varphi_0}C+\frac{\delta_1(\mathrm{Re}+k_1\,\mathrm{Re}_g)}{\varphi_0}. \quad (77)$$

Здесь $\varphi_0=\varphi(1),\ \varphi_1=\varphi'(1),\ \gamma_0=\gamma(1),\ \delta_1=\delta'(1).$

Уравнение (77) решается вместе с условиями

$$\lim_{x\to-\infty} z(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty} z(x)=0. \quad (78)$$

Решение задачи (77), (78) можно построить в виде

$$z(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x-\tau)F(\tau)\,d\tau,\ \ F(x)=-\frac{\gamma_0}{\varphi_0}\mathrm{Ma}\,\theta_1''(x)-\frac{k_4\mathrm{R}\theta_1}{\varphi_0(1-C_0-k_4\theta_1)(\omega-1)}. \quad (79)$$

Здесь Π — фундаментальное решение уравнения (77) такое, что $\Pi(t)\to 0$ при $t\to\pm\infty$. Аналогично [5, 6], фундаментальное решение задается следующими формулами. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ — корни характеристического многочлена уравнения (77), причем один их них отрицательный (это следует из того, что постоянная N положительна, отрицательной она может стать только при разнонаправленных скатывающей силы и газового потока, но и в этом случае выбором направления продольной оси ее можно сделать положительной). Пусть отрицательным корнем будет $\lambda_1=-a.$ Тогда, если выполняется неравенство

$$N^2/4-A^3/27<0, \quad (80)$$

то два других корня $\lambda_{2,3}=\left(a\pm\sqrt{a^3-4N}\right)/2$ — вещественные, положительные и разные, а Π задается формулой:

$$\Pi(x)=\frac{a}{8a^3+N}\chi(x)e^{-ax}-\chi(-x)\left[\frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2+a)(\lambda_2-\lambda_3)}+\frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3+a)(\lambda_3-\lambda_2)}\right]. \quad (81)$$

Если неравенство (78) обращается в равенство, тогда $\lambda_2=\lambda_3=a/2$ и

$$\Pi(x)=\frac{4}{9a^2}\left\{\chi(x)e^{-ax}-\chi(-x)e^{ax/2}\left[\frac{2x}{3a}-1\right]\right\}. \quad (82)$$

Если же неравенство (78) имеет противоположный знак, то $\lambda_{2,3}=a/2\pm ib$, где $b=\sqrt{4N-a^3}/2\sqrt{a}$. В этом случае

$$\Pi(x)=\frac{4}{9a^2+4b^2}\left\{\chi(x)e^{-ax}+\chi(-x)e^{ax/2}\left[\cos(bx)-\frac{3a}{2b}\sin(bx)\right]\right\}. \quad (83)$$

Здесь $\chi(x)$ — функция Хэвисайда.

Таким образом, вычислив по одной из формул (81)–(83) фундаментальное решение, можно построить решение задачи (77), (78) в квадратурах. Зная $z(x)$, легко найти толщину пленки:

$$h(x) = 1 + \int_{-\infty}^{x} z(\tau)\,d\tau. \tag{84}$$

Так как нагрев локальный, носитель функции $\theta_0(x)$ конечен, поэтому конечен также и носитель функции $\theta_1(x)$, и используя (79), (84), можно найти толщину пленки h_∞ далеко от места нагрева внизу по потоку:

$$h_\infty = \lim_{x\to\infty} h(x) = 1 - \frac{k_4 R}{\varphi_0(\omega-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta_1(x)}{1 - C_0 - k_4\theta_1(x)}\,dx. \tag{85}$$

Заметим, что суммирование фундаментального решения можно выполнить в явной форме. Если оно задается формулой (81), то $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)\,dx = \frac{1}{9a^2 - A} + \frac{3}{(a^2 - aA)(4a^2 - aA)}$, если формулой (82), то $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)\,dx = \frac{4}{3a^3} + \frac{32}{27a^5}$, а если формулой (83), то $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)\,dx = \frac{1}{a^3 - Aa}$. Зная h_∞, легко вычислить скорость суммарного испарения: величина $\omega_\infty = \omega / h_\infty$ задает отношение толщины пленки на большом удалении вниз по потоку к высоте канала. Также можно ввести величины $\mathrm{Re}_\infty, \mathrm{Re}_{g\infty}, E_\infty$ — аналоги при $x \to \infty$ соответствующих параметров входного потока. И так как величина $\mathrm{Re} + k_1 \mathrm{Re}_g$ не меняется и известна из условий задачи, то формулы (67) вместе с соотношением $\mathrm{Re}_\infty + k_1 \mathrm{Re}_{g\infty} = \mathrm{Re} + k_1 \mathrm{Re}_g$ представляют собой систему трех уравнений для определения величин $\mathrm{Re}_\infty, \mathrm{Re}_{g\infty}, E_\infty$. Из сравнения значений Re и Re_∞ можно вычислить долю расхода жидкости, которая испаряется. Точной формулы для расчета суммарной теплоотдачи получить не удается, однако надо заметить следующее. Из условия теплового баланса на границе раздела фаз (61) следует, что если отношение теплопроводностей в фазах k_2 мало́ (это верно для многих пар жидкость–газ), то теплоотдачей в газовую фазу можно пренебречь и считать, что практически все тепло расходуется на парообразование. Тогда, зная скорость испарения, легко вычислить суммарную интенсивность теплоотдачи от нагревателя.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в горизонтально ориентированном микроканале высотой 150 мкм движутся поток азота и водяная пленка при средней температуре $T_0 = 20^\circ\mathrm{C}$, а потоки на входе соответствуют числам Рейнольдса в газе и в жидкости — $\mathrm{Re} = 0{,}5$, $\mathrm{Re}_g = 3$. Тогда, используя значения материальных постоянных азота и воды, получаем расходы в жидкости и в газе равными $Q = 0{,}501 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, $Q_g = 0{,}421 \cdot 10^{-4}$ м^2/с при $H_0 = 42{,}1$ мкм. Будем также считать, что нагреватель обеспечивает распределение температуры на дне канала вида

$$T_1(x) = \begin{cases} T_0 = 20^\circ\mathrm{C}, & x < 0, \\ 30^\circ\mathrm{C}, & 0 < x < 0{,}01 \text{ м}, \\ T_0, & x > 0{,}01 \text{ м}. \end{cases}$$

Скачки температуры на дне канала (фактически они всегда сглажены, но в модельной задаче задавать конкретное сглаживание нецелесообразно) не препятствуют построению решений: выбранный способ решения позволяет находить также и обобщенные решения, допускающие такие скачки. Тогда получаем значения безразмерных

постоянных: $A = 0{,}0506$, $C = 0$, $\omega = 3{,}554$, $L = 0{,}153$, $k_1 = 0{,}0175$, $k_2 = 0{,}04015$, $k_3 = 0{,}00125$, $k_4 = 0{,}00876$, $R = 0{,}00544$, $E = 0{,}517$. Решая уравнение (68) находим значение поверхностной температуры (где она не нуль) $\theta_1 = 0{,}984$, затем вычисляем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta_1}{1 - C_0 - k_4\theta_1}\,dx = 6{,}332$. Далее, вычисляем $N \approx 0{,}611$ и находим корни характеристического многочлена уравнения (77): $\lambda_1 \approx -0{,}868$, $\lambda_{2,3} \approx 0{,}434 \pm 0{,}718i$, т. е. в нашем случае $a \approx 0{,}868$, $b \approx 0{,}718$. Поэтому по формуле (86) получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)\,dx \approx 1{,}634$, а согласно (85) будет $h_\infty \approx 0{,}943$. Далеко вниз от нагревателя нет возмущений и там реализуется плоскопараллельное течение с прямыми линиями, но параметры этого течения иные, чем у потоков на входе. Зная h_∞, вычисляем отношение высоты канала к толщине пленки $\omega_\infty \approx 3{,}809$. Кроме того, выше было показано, что значение величины $\mathrm{Re}_\infty + k_1\,\mathrm{Re}_{g\infty} =$

$= \mathrm{Re} + k_1\,\mathrm{Re}_g \approx 0{,}552$. Это соотношение вместе с формулами (67) позволяет вычислить остальные параметры потока: $\mathrm{Re}_\infty = 0{,}488$, $\mathrm{Re}_{g\infty} = 3{,}646$, $E_\infty = 0{,}474$. Сравнивая значение чисел Рейнольдса на входе и выходе микроканала получаем, что в рассматриваемом примере испаряется примерно 2,27 % расхода жидкости. Поскольку в нашем случае можно считать $k_2 << 1$, находим среднюю теплоотдачу от рабочей поверхности нагревателя равной $0{,}0755$ ватт/см^2.

Список литературы

1. **Frank A.M., Kabov O.A.** Thermocapillary structure formation in a falling film: experiment and calculations // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18, No. 3. P. 032107 (10 p).
2. **Frank A.M.** 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // Eur. J. Mech. B/ Fluids. 2003. Vol. 22, No. 5. P. 445–471.
3. **Gatapova E.Ya., Kabov O.A., Kuznetsov V.V., Legros J.-C.** Evaporating shear-driven liquid film flow in minichannel with local heat source // J. Eng. Thermophys. 2005. Vol. 13, No. 2. P. 17–46.
4. **Gatapova E.Ya., Kabov O.A.** Shear-driven flows of locally heated liquid films // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 53, No. 13–14. P. 2795–2807.
5. **Kuznetsov V.V.** Dynamics of locally heated liquid films // Russ. J. Eng. Thermophys. 2000. Vol. 10, No. 2. P. 107–120.
6. **Кабова Ю.О.** Термокапиллярная деформация неизотермической стекающей пленки жидкости // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 10. С. 71–77.
7. **Кабова Ю.О., Кузнецов В.В.** Стекание неизотермического тонкого слоя жидкости с непостоянной вязкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, № 6. С. 134–141.

Статья поступила в редакцию 17 января 2011 г.,
после переработки — 5 июня 2012 г.