К ТЕОРИИ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Н. Г. Михайлов (Новосибирск)

Формула Н. Е. Кочина [1] для волнового сопротивления тела, симметричного относительно диаметральной плоскости, имеет вид

$$R_w = \frac{\rho v^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| H\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta}, \theta\right) \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \qquad \left(\nu = \frac{g}{v^2}\right) \tag{1}$$

$$H\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta}, \theta\right) = -\frac{1}{2} \iint_{(S)} \gamma(x, y, z) \exp\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta}(z + ix + \cos\theta + iy\sin\theta)\right) \tag{2}$$

Здесь $\gamma(x, y, z)$ — интенсивность источников, представленная в виде ряда

$$\gamma(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x, y, z) \tag{3}$$

первый член которого равен

$$\gamma_0(x, y, z) = -2v\cos(n, x) \tag{4}$$

а каждый следующий выражается рекуррентной зависимостью

$$\gamma_n(x, y, z) = \iint_{(S)} \gamma_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)\, L(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, ds\,(s) \tag{5}$$

Ядро интегрального уравнения представлено выражением (6)

$$L(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{\cos(r', n)}{r'^2} + L_1(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) + L_2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\right]$$

$$L_1(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial n} K_1(x - \xi,\ y - \eta,\ z + \zeta)$$

$$L_2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial n} K_2(x - \xi,\ y - \eta,\ z + \zeta) \tag{7}$$

$$K_1(x - \xi,\ y - \eta,\ z + \zeta) = \operatorname{Re} 2i\nu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\chi} \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$K_2(x - \xi,\ y - \eta,\ z + \zeta) = \operatorname{Re} \frac{\nu}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\chi} \left[\int_{+\infty}^{\chi} \frac{e^{it}\,dt}{t}\right] \frac{du}{\cos^2 u}$$

Здесь

$$\chi = \frac{\nu}{\cos^2 u}\left[i(z + \zeta) - (x - \xi)\cos u - (y - \eta)\sin u\right]$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad r' = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}$$

Представим интеграл (1) в виде суммы более простых интегралов, позволяющих производить их вычисление и исследование влияния формы тела на волновое сопротивление.

Функцию $H(k, \theta)$ разобьем на две части, первая из которых

$$H_1(k, \theta) = v \iint_{(S)} \cos(n, x)\, e^{k(z + ix\cos\theta + iy\sin\theta)} ds \tag{8}$$

получена в результате подстановки в выражение (2) первого члена (4) ряда (3), вторая же часть $H_2(k, \theta)$ образована суммой остальных членов ряда (3). Здесь для сокращения записи введено обозначение $k = \nu\cos^2\theta$.

Тогда функция (2) может быть представлена суммой

$$H(k, \theta) = H_1(k, \theta) + H_2(k, \theta) \tag{9}$$

а квадрат модуля ее будет равен

$$|H(k, \theta)|^2 = |H_1(k, \theta)|^2 + |H_2(k, \theta)|^2 + 2\operatorname{Re}\left[\,|\,\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2(k, \theta)\right] \tag{10}$$

Подставив (10) в (1), получим другой вид интеграла волнового сопротивления

$$R_w = \frac{\rho v^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |H_1(k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{\cos^3\theta} + \frac{\rho v^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \{|H_2(k, \theta)|^2 + 2\operatorname{Re}\left[\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2(k, \theta)\right]\} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{11}$$

Обозначим первый член выражения (11) через

$$R_w^{(1)} = \frac{\rho v^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} | H_1(k, \theta) |^2 \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \tag{12}$$

и представим функцию (8) в виде

$$H_1(k, \theta) = v \iint_{(S)} \cos(n, x)\, e^{kz} (\cos px + i \sin px) \left(1 + yp \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} y^2 p^2 \operatorname{tg}^2 \theta + \ldots \right) ds \tag{13}$$

$$p = k \cos \theta = \frac{\nu}{\cos \theta} \tag{14}$$

Тогда, принимая во внимание симметричность поверхности S относительно диаметральной плоскости, будем иметь

$$H_1(k, \theta) = 2v\, [(I_1 - I) + i\, (J_1 - J)] \tag{15}$$

$$I = \iint_{(S_0)} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-kz} \cos px\, ds_0, \quad I_1 = \frac{p^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2} \iint_{(S_0)} \frac{\partial f}{\partial x} f^2(x, z)\, e^{-kz} \cos px\, ds_0$$

$$J = \iint_{(S_0)} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-kz} \sin px\, ds_0, \quad J_1 = \frac{p^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2} \iint_{(S_0)} \frac{\partial f}{\partial x} f^2(x, z)\, e^{-kz} \sin px\, ds_0 \tag{16}$$

где $y = f(x, z)$ — ордината поверхности S, x, z — координаты точки диаметральной плоскости, S_0 — площадь диаметральной плоскости, ось z направлена вниз. Подставив $H_1(k, \theta)$ в формулу (12), получим

$$R_w^{(1)} = R_{w_1}^{(1)} + R_{w_2}^{(1)} \tag{17}$$

где

$$R_{w_1}^{(1)} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{\pi/2} [I^2 + J^2] \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}, \quad R_{w_2}^{(1)} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{\pi/2} [I_1^2 + J_1^2 - 2\,(II_1 + JJ_1)] \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \tag{18}$$

Заменив в первом интеграле (18) перемещенную интегрирования $\lambda = \sec \theta$, получим известную формулу Мичелля

$$R_{w_1}^{(1)} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{\infty} (I^2 + J^2) \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \tag{19}$$

Следовательно, первый член выражения (11) включает в себя интеграл Мичелля и добавку к нему $R_{w_2}^{(1)}$, обусловленную влиянием объемности.

Действительно, если бы при выводе формулы (17) мы воспользовались предпосылкой Мичелля о малости ширины корабля по сравнению с его длиной и осадкой, т. е. пренебрегли бы в функции $H_1(k, \theta)$ величиной y по сравнению с x и z, то получили бы интеграл Мичелля, а составляющая $R_{w_2}^{(1)}$ равнялась бы нулю. Известно также, что линейное решение получается, когда источники распределены не по поверхности тела S, а в его диаметральной плоскости S_0. При таком размещении источников поле вызванных скоростей вокруг тела будет отличаться от скоростного поля, вызванного системой источников, размещенных по поверхности тела S.

Приведем другие виды интегралов (12), (18), которые также могут быть приняты за основу для составления расчетных схем.

$$R_w^{(1)} = \frac{\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \iiiint_{(S)\,(S)} \cos(n, x) \cos(n, \xi)\, e^{k[(z+\zeta) + i(x-\xi)\cos\theta + i(y-\eta)\sin\theta]}\, ds ds$$

$$R_{w_1}^{(1)} = \frac{\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \iiiint_{(S)\,(S)} \cos(n, x) \cos(n, \zeta)\, e^{k[(z+\zeta) + i(x-\xi)\cos\theta}\, ds ds \tag{20}$$

$$R_w^{(1)} = \frac{\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \times$$

$$\times \iiiint_{(S)\,(S)} \cos(n, x) \cos(n, \xi)\, e^{k(z+\zeta)} \cos[p(x - \xi)] \cos[(p \operatorname{tg} \theta\,(y - \eta)]\, ds ds \tag{21}$$

$$R_{w_1}{}^{(1)} = \frac{\rho g^2}{\pi v^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} \cos(n, x) \cos(n, \xi)\, e^{k(z+\zeta)} \cos[p(x-\xi)]\, ds ds$$

$$R_w{}^{(1)} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \times$$

$$\times \iint\limits_{(S_0)} \iint\limits_{(S_0)} \frac{\partial f}{dx}\frac{\partial f}{d\xi}\, e^{-k(z+\zeta)} \cos[p(x-\xi)] \cos(p \operatorname{tg}\theta y) \cos(p \operatorname{tg}\theta \eta)\, ds_0 ds_0 \tag{22}$$

$$R_{w_1}^{(1)} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \iint\limits_{(S_0)} \iint\limits_{(S_0)} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \xi}\, e^{-k(z+\zeta)} \cos[p(x-\xi)]\, ds_0 ds_0$$

$$R_w{}^{(1)} = \frac{4\rho h^2}{\pi r^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg}^2\theta\, d\theta}{\cos^3\theta} \iint\limits_{(S_0)} \iint\limits_{(S_0)} e^{-k(z+\zeta)} \cos[p(x-\xi)] \sin[p \operatorname{tg}\theta y] \sin(p \operatorname{tg}\theta\eta)\, ds_0 ds_0$$

$$R_w{}^{(1)} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^6} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^5\theta} \iint\limits_{(S_0)} \iint\limits_{(S_0)} f(x, z) f(\xi, \zeta)\, e^{-k(z+\zeta)} \cos[p(x-\xi)]\, ds_0 ds_0 \tag{23}$$

Из выражений (20), (21), (22) и (23) следует, что интеграл Мичелля получается из интеграла $R_w{}^{(1)}$, если в последнем из разложения в ряд функций, содержащих y и η, удерживать только первый член. Удержание последующих членов ряда, содержащих y и η, с любой точностью определяет составляющую волнового сопротивления $R_{w_2}{}^{(1)}$.

Наиболее удобными для производства расчетов являются формулы

$$R_{w_2}{}^{(1)} = -\frac{4\rho g^4}{\pi v^6} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^7\theta}\, d\theta \iint\limits_{(S_0)} \iint\limits_{(S_0)} f^2(x, z) \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \xi}\, e^{-k(z+\zeta)} \cos[p(x-\xi)]\, ds_0 ds_0$$

$$R_{w_2}{}^{(1)} = -\frac{4\rho g^6}{3\pi v^{10}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \iint\limits_{(S_0)} \iint\limits_{(S_0)} f^3(x, z)\, e^{-k(z+\xi)} \cos[p(x-\xi)]\, ds_0 ds_0 \tag{24}$$

Возвратимся к интегралу (11).

Покажем, что второе слагаемое интеграла (11) есть добавка к главной части волнового сопротивления, обусловливаемая учетом квадратов вызванных скоростей при интегрировании давлений по поверхности тела S. Обозначим эту составляющую через

$$R_w{}^{(2)} = \frac{\rho v^2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \{|H_2(k, \theta)|^2 + 2\operatorname{Re}[\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2(k, \theta)]\} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{25}$$

Функция $H(k, \theta)$ может быть представлена в виде

$$H(k, \theta) = \iint\limits_{(S)} e^{k(z+ix\cos\theta+iy\sin\theta)} \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n} + i\cos\theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(n, x) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n, z)\right] + i\sin\theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(n, y) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n, z)\right]\right\} ds \tag{26}$$

Если к соотношению (26) применить допущения линейной теории, а граничное условие на поверхности S принять равным $\partial\varphi / \partial n = -v\partial f / \partial x$, то после подстановки функции $H(k, \theta)$ в формулу (1) получим интеграл Мичелля (18).

Другим путем интеграл Мичелля можно получить из интеграла (1). если в функцию (2) подставить только первый член ряда (3) и в дальнейших преобразованиях принять $y = 0$. Следовательно, функция $H(k, \theta)$, вычисленная в первом приближении, т. е. от первого члена ряда (3), не будет учитывать влияние квадратов вызванных скоростей. Нелинейная часть волнового сопротивления, обусловленная учетом квадратов вызванных скоростей при интегрировании давлений по поверхности S, получается при использовании последующих членов ряда (3).

Для примера построим второе приближение, т. е. воспользуемся вторым членом

$$\gamma_1(\xi, \eta, \zeta) = -2v \iint\limits_{(S)} \cos(n, x)\, L(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, ds \tag{27}$$

Тогда функция

$$H_2(k, \theta) = v \iint\limits_{(S)} e^{k(\zeta + i\xi\cos\theta + i\eta\sin\theta)}\, ds \iint\limits_{(S)} \cos(n, x)\, L(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, ds \tag{28}$$

вычисленная при $y = 0$ и $\eta = 0$, определит дополнение к линейной части волнового сопротивления, обусловленное учетом квадратов вызванных скоростей. При $y \neq 0$, $\eta \neq 0$ эта часть покажет также влияние объемности на поле давлений, полученное от учета квадратов вызванных скоростей.

Подставив ядро (6) в функцию (28), получим

$$H_2(k, \theta) = H_2'(k, \theta) + H_2''(k, \theta) + H_2'''(k, \theta) \tag{29}$$

где

$$H_2'(k, \theta) = \frac{v}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \left\{ \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r'^2} \cos(n, x)\, ds \right\} e^{k(\zeta + i\xi\cos\theta + i\eta\sin\theta)}\, ds \tag{30}$$

$$H_2''(k, \theta) = \frac{v}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \left\{ \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r', n)}{r'^2} \cos(n, x)\, ds \right\} e^{k(\zeta + i\xi\cos\theta + i\eta\sin\theta)}\, ds \tag{31}$$

$$H_2'''(k, \theta) = \frac{v}{2\pi} \iint\limits_{(S)} \left\{ \iint\limits_{(S)} \frac{\partial K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\partial n} \cos(n, x)\, ds \right\} e^{k(\zeta + i\xi\cos\theta + i\eta\sin\theta)}\, ds \tag{32}$$

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = K_1(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) + K_2(x, y, z; \xi, h, \zeta)$$

Введя функции, сопряженные (30), (31), (32), будем иметь

$$\begin{gathered} |H_2(k, \theta)|^2 = |H_2'(k, \theta)|^2 + |H_2''(k, \theta)|^2 + |H_2'''(k, \theta)|^2 + \\ + 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_2'(k, \theta)}\, H_2''(k, \theta)] + 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_2'(k, \theta)}\, H_2'''(k, \theta)] + 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_2''(k, \theta)}\, H_2'''(k, \theta)] \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2(k, \theta)] = \\ = 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2'(k, \theta) + \overline{H_1(k, \theta)}\, H_2''(k, \theta) + \overline{H_1'(k, \theta)}\, H_2'''(k, \theta)] \end{gathered} \tag{34}$$

Подставив (33) и (34) в формулу (25), получим выражение для второй составляющей волнового сопротивления

$$\begin{gathered} R_w{}^{(2)} = \frac{\rho v^2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \{|H_2'(k, \theta)|^2 + |H_2''(k, \theta)|^2 + |H_2''(k, \theta)|^2 + \\ + 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2'(k, \theta) + \overline{H_1(k, \theta)}\, H_2''(k, \theta) + \overline{H_1(k, \theta)}\, H_2'''(k, \theta) + \\ + \overline{H_2'(k, \theta)}\, H_2''(k, \theta) + \overline{H_2'(k, \theta)}\, H_2'''(k, \theta) + \overline{H_2'(k, \theta)}\, H_2'''(k, \theta)]\} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \end{gathered} \tag{35}$$

Если потенциал скорости возмущенного движения

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint \gamma(\xi, \eta, \zeta) \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \right] ds$$

заменить более простым

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{\gamma(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, ds$$

то формулу (35) можно записать в виде

$$R_w{}^{(2)} = \frac{\rho v^2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \{|H_2'(k, \theta)|^2 + 2\mathrm{Re}\,[\overline{H_1(k, \theta)}\, H_2'(k, \theta)]\} \frac{dx}{\cos^3\theta} \tag{36}$$

Эта составляющая является поправкой к линейной теории во втором приближении. Учитывая второй член ряда (3), аналогичным образом получим поправку третьего приближения и т. д. Приведенный анализ показывает, что интеграл Н. Е. Кочина можно представить в виде трех составляющих: интеграла Мичелля и поправок к нему $R_{w_2}{}^{(1)}$ и $R_w{}^{(2)}$, которые могут быть вычислены сколь угодно точно, в зависимости от удержания в расчете необходимого количества членов ряда.

Поступила 24 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1949.