

Рис. 2.

профиля скорости этих жидкостей имеет различные значения. Из уравнения (8) вытекает, что для течения ньютоновской жидкости  $dv/dy|_{v=0} = A\delta/u_1$  — конечная величина, псевдопластической жидкости  $dv/dy|_{v=0} = 0$ , дилатантной  $dv/dy|_{v=0} = \infty$ . Профиль скорости с экстремумом у дилатантной жидкости существенно более крутой, чем у ньютоновской, а профиль скорости псевдопластической жидкости более плавный, чем у ньютоновской (рис. 2).

При отсутствии градиента давления ( $\delta = 0$ ) уравнения (5)–(7) интегрируются; их решения получены в [5]. Отличие индекса  $n$  от единицы не вызывает изменения существенного свойства этих течений, обнаруженного в [6] для течений ньютоновской жидкости, — совпадение координаты  $y$  максимума в профиле температуры с координатой  $y$  точки перегиба в профиле скорости и отсутствие экстремума в профиле скорости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жижин Г. В. Неизотермическое течение Куэтта неньютоновской жидкости под влиянием градиента давления. — ПМТФ, 1981, № 3.
2. Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Сов. энциклопедия, 1984.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: Физматгиз, 1954.
5. Бостанджиян С. А., Черняева С. М. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении неньютоновской жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3.
6. Каганов С. А., Яблонский В. С. О профиле скорости ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. — Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 1.

Поступила 14/II 1985 г.

УДК 532.517.4

### МОДЕЛИРОВАНИЕ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

П. Г. Фрик  
(Пермь)

Трудности решения уравнений гидродинамики, в частности уравнений термогравитационной конвекции, всегда побуждали использовать там, где это возможно, плоскую постановку задач. Двумерная постановка позволила решить многие задачи и получила особое развитие с внедрением численных методов, так как рассмотрение трехмерных краевых задач даже для простейших случаев остается на грани возможностей современных ЭВМ. Для двумерного случая получены численные решения нестационарных уравнений естественной конвекции при числах Грасгофа, достигающих

значений  $10^8$ — $10^{12}$  [1], позволяющие следить за эволюцией структуры течения в ядре и пограничных слоях, но в силу ограничений на число точек и время счета не позволяющие получить диапазон масштабов, достаточный для построения пространственных спектров и рассмотрения инерционных интервалов.

Что касается турбулентности, то переход к двум измерениям принципиальный, так как приводит к сохранению энтропии и вследствие этого к совершенно особым свойствам турбулентных течений. Рассмотрению однородной изотермической двумерной турбулентности посвящено большое число работ (см., например, [2, 3]). При внесении в поток незначительных тепловых неоднородностей, не оказывающих существенного влияния на течение жидкости, температуру можно рассматривать как пассивную примесь, спектры которой для двумерной турбулентности изучались в [4—6]. Остались, однако, нерассмотренными спектральные законы в случае, когда температура из пассивной примеси становится основным источником турбулентного движения.

Цель данной работы — изучение спектральных процессов в развитой двумерной турбулентной конвекции. Рассмотрение ведется на основе иерархической модели турбулентности, предложенной в [7] и развитой на случай двумерной изотермической турбулентности в [8].

Двумерная турбулентность — явление в значительной мере гипотетическое. Реальные течения, обнаруживающие свойства двумерной турбулентности, как правило, квазидвумерны, что сказывается на их поведении. Это касается течений в атмосфере и океане [9], и потоков жидких металлов в магнитном поле [10, 11]. Наиболее близка к двумерной, пожалуй, наблюдавшаяся в [12] турбулентность в мыльных пленках, возбуждаемая движением решетки. Приступая к рассмотрению двумерной турбулентной конвекции, необходимо указать ситуацию, в которой могут быть обнаружены обсуждаемые спектральные законы.

Хорошо известна удобная для экспериментов и теории модель развитой конвекции в плоской постановке. Такой моделью является конвективное течение в тонкой вертикальной щели (ячейке Хеле — Шоу), широко используемое для численных и экспериментальных исследований надкритических режимов конвективного движения (например, [13]). Модель Хеле — Шоу дает, как будет показано ниже, одну из немногих возможностей реализации в лабораторных условиях развитой плоской турбулентности, содержащей инерционные интервалы.

**1. Иерархическая модель турбулентной конвекции.** Иерархическая модель строится путем проектирования уравнений гидродинамики на функциональный базис специального вида и позволяет получить каскадные уравнения для описания спектральных процессов в широком интервале волновых чисел. Построение модели для изотермической двумерной турбулентности подробно описано в [8]. Остановимся на основных моментах построения иерархической модели для турбулентной конвекции.

Запишем уравнения тепловой гравитационной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Gr} \xi T, \\ \partial T / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) T &= (1/\text{Pr}) \Delta T, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \end{aligned}$$

где  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $\text{Gr} = (g\beta/\nu^2)l^3T^*$  — число Грасгофа;  $\xi$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх (вдоль оси  $y$ ); в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, давления и температуры выбраны величины  $l$ ,  $l^2/\nu$ ,  $\nu/l$ ,  $\rho\nu^2/l^2$ ,  $T^*$ . Скорость и температура раскладываются по базисным функциям, описывающим совокупность вихрей различного масштаба:

$$(1.2) \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{N,n} A_{Nn}(t) \mathbf{v}_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}), \quad T(\mathbf{r}, t) = \sum_{N,n} C_{Nn}(t) T_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}),$$

где  $N$  — номер яруса, определяющий размер вихря, а номер  $n$  определяет положение вихря в пространстве ( $\mathbf{r}_{Nn}$  — радиус-вектор центра вихря). Вихри  $N$ -го яруса разбросаны в пространстве с плотностью  $\rho_N = (3\pi/4)2^{2N}$  и по размеру превосходят вдвое вихри яруса  $N + 1$ .

Отличительным свойством базисных функций является то, что фурье-образы функций различных ярусов не перекрываются в пространстве волновых чисел. Функции локализованы в  $\mathbf{r}$ - и  $\mathbf{k}$ -пространствах. Явный вид функций есть

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_{Nn} &= \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}) \times \mathbf{e}}{\sqrt{3\pi} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}|} \frac{(J_0(2s) - J_0(s))}{s}, \\ T_{Nn} &= 2^N \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{(2J_1(2s) - J_1(s))}{s}, \end{aligned}$$

Таблица 1

M									L
N-4	N-3	N-2	N-1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	
0	0	0	0	0	0	0	0,155	0	N + 4
0	0	0	0	0	0	0,242	0	0	N + 3
0	0	0	0	0	0,431	0	0	0	N + 2
-0,0088	-0,0257	-0,0796	-0,269	0	0	0	0	0	N + 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	N
0,0032	0,0096	0,0269	0	0	0	0	0	0	N - 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	N - 2

где  $s = \pi 2^N |\mathbf{r}_{Nn} - \mathbf{r}|$ ;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, нормальный рассматриваемой плоскости;  $J_0, J_1$  — функции Бесселя.

Проектирование уравнений (1.1) на базис (1.2) дает систему уравнений для коэффициентов  $A_{Nn}$  и  $C_{Nn}$ . Для получения малопараметрической модели требуется перейти к системе уравнений для средних по ярусу значений  $A_N$  и  $C_N$  ( $A_N^2 = \langle A_{Nn}^2 \rangle$ ,  $C_N^2 = \langle C_{Nn}^2 \rangle$ ):

$$(1.4) \quad \frac{dA_N}{dt} = \sum_M \sum_{L>M} T_{NML} A_M A_L + K_N A_N + \text{Gr} F_N C_N;$$

$$(1.5) \quad \frac{dC_N}{dt} = \sum_M \sum_L H_{NML} A_M C_L + \frac{K_N}{\text{Pr}} C_N,$$

где  $K_N = -21,4 \cdot 2^{2N}$ ;  $F_N = 3,3 \cdot 2^N$ .

Основную роль в процессах спектрального переноса играют нелинейные члены, представленные в модельных уравнениях матрицами  $T_{NML}$  и  $H_{NML}$ . Процедура получения этих матриц — основной этап в построении модели и подробно описана для матрицы  $T$  в [8]. Методика получения матрицы  $H$  аналогична. В табл. 1 приведена центральная часть матрицы  $T$ , а в табл. 2 — матрицы  $H$  для  $N = 0$ . Элементы матриц для  $N \neq 0$  определяются с помощью соотношений

$$T_{NML} = 2^N T_{0,M-N,L-N}, \quad H_{NML} = 2^N H_{0,M-N,L-N}.$$

Существенное различие в виде матриц связано с тем, что матрица  $T$  описывает процесс спектрального переноса энергии пульсаций скорости самим полем скорости и допускает свертку относительно диагонали  $M = L$ , а в процессе переноса по спектру энергии температурных пульсаций участвуют и поле температуры, и поле скорости, что не позволяет свернуть матрицу  $H$  и приводит к отличным от нуля диагоналям  $M = L$  и  $M = N$ . Уравнения (1.4) и (1.5) запишем в виде, удобном для анализа и численного решения:

$$(1.6) \quad \frac{dA_N}{dt} = \sum_{l=1}^{l_{\max}} (T_{N,N-l-1,N-1} A_{N-l-1} A_{N-1} + T_{N,N-l,N+1} A_{N-l} A_{N+1} + \\ + T_{N,N+l,N+l+1} A_{N+l} A_{N+l+1}) + K_N A_N + \text{Gr} F_N C_N;$$

$$(1.7) \quad \frac{dC_N}{dt} = \sum_m \sum_{l=1}^{l_{\max}} H_{N,N-m,N-l} (A_{N-m} C_{N-l} - 2^{3l} A_{N+l-m} C_{N+l}) + \frac{K_N}{\text{Pr}} C_N.$$

Увеличение  $l_{\max}$  соответствует учету взаимодействий все более далеких ярусов. В численных экспериментах  $l_{\max}$  изменялось от 5 до 10.

Таблица 2

M									L
N-4	N-3	N-2	N-1	N	N+1	N+2	N+3	N+4	
0	0	0	0	0	0	0	-0,0537	-2,99	N+4
0	0	0	0	0	0	-0,0941	-1,49	-0,154	N+3
0	0	0	0	0	-0,125	-0,720	-0,153	0	N+2
-0,00584	-0,0145	-0,0374	-0,0996	-0,221	-0,365	-0,145	0	0	N+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	N
0,00181	0,00468	0,0125	0,0277	0,0457	0,0181	0	0	0	N-1
0	0	0	0,00196	0,0113	0,00239	0	0	0	N-2
0	0	0	0,000484	0,00291	0,000300	0	0	0	N-3
0	0	0	0,000013	0,000731	0,000038	0	0	0	N-4

Как и другие подходы к исследованию спектральных характеристик турбулентности, иерархическая модель опирается на понятие однородной турбулентности, поэтому вопрос о граничных условиях ниже не обсуждается, за исключением условий на боковых стенках в ячейке Хеле — Шоу.

**2. Пассивная примесь в двумерной турбулентности.** При малых числах Грасгофа температура ведет себя как пассивная примесь, что позволяет сравнить получающиеся результаты с известными результатами по эволюции спектров пассивной примеси в двумерной турбулентности.

При малых Gr коэффициенты  $C_N$  не оказывают влияния на поведение  $A_N$  и уравнение (1.6) сохраняет два стационарных решения:

$$(2.1) \quad A_N = A_0 2^{-N/3} \quad \text{и} \quad A_N = A_0 2^{-N},$$

отвечающих инерционным интервалам переноса энергии и энтропии, где спектр энергии удовлетворяет соответственно законам [2]

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{и} \quad E(k) = C_\omega \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3}$$

с константами  $C = 1,55$  и  $C_\omega = 1,36$  [8]. Два инерционных интервала можно наблюдать в турбулентном течении, энергия к которому подводится на некотором промежуточном значении волновых чисел  $k_0$  (рис. 1, где приведен сводный график спектральных законов при малых Gr и различных Pr).

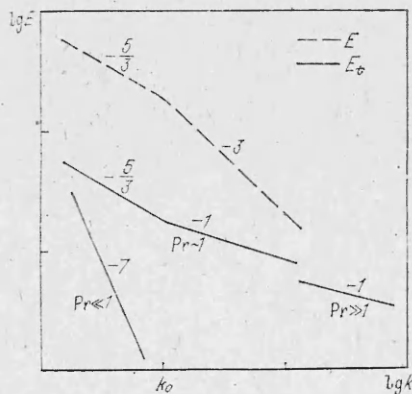


Рис. 1.

На рис. 1—4 цифры у линий — степени волнового числа  $k$  в спектральных зонах.

В инерционно-конвективном интервале уравнение (1.7) в зависимости от поведения коэффициентов  $A_N$  (2.1) дает в инерционном интервале энергии стационарное решение  $C_N = C_0 2^{-4N/3}$ , соответствующее спектру энергии пульсаций температуры

$$(2.2) \quad E_t(k) = B \varepsilon_t \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3},$$

а в инерционном интервале энтропии  $C_N = C_0 2^{-N}$ , что дает для спектра пульсаций температуры

$$(2.3) \quad E_t(k) = B_\omega \varepsilon_t \varepsilon_\omega^{-1/3} k^{-1}.$$

Скорость диссипации энергии пульсаций температуры  $\varepsilon_t$  определяется выражением

$$(2.4) \quad \varepsilon_t = \sum_{h \geq N} \sum_{L < N} \sum_M \rho_h H_{hML} C_h A_M C_L$$

и равна при спектре (2.2)  $1,76 A_0 C_0^2$ , а при спектре (2.3)  $3,1 A_0 C_0^2$ , что соответствует значениям констант  $B = 0,5$  и  $B_\omega = 0,92$ . В [4] при численном моделировании двумерной турбулентности с пассивной примесью получен спектр (2.3) с константой  $B_\omega = 1,56$ .

В вязкоконвективном интервале, реализующемся при больших числах Прандтля, каскад температуры еще сохраняется, а соответствующие масштабы скорости подавляются вязкостью и существенно только крупномасштабное движение. Учтывая, что отлично от нуля только  $A_0$ , а  $C_N = C_0 2^{-\theta N}$ , запишем (1.7) в виде

$$\frac{dC_N}{dt} = A_0 C_0 2^{N(1-\theta)} (2^\theta H_{0,-N,-1} - 2^{-\theta} H_{0,-N,i}).$$

Стационар возможен при  $H_{0,-N,-1}/H_{0,-N,i} = 2^{2\theta}$ . Из матрицы  $H$  (см. табл. 2) видно, что с ростом  $N$  величина  $\theta$  стремится к значению  $\theta = 1$ , что подтверждается и численным моделированием вязкоконвективного интервала ( $Gr = 0$ ,  $Pr = 1000$ ,  $l_{\max} = 10$ ). Следовательно, спектр энергии температурных пульсаций в вязкоконвективном интервале также удовлетворяет закону

$$(2.5) \quad E_t(k) \sim k^{-1}.$$

В инерционно-диффузионном интервале (малые числа Прандтля) сохраняется каскад скорости, но существенна тепловая диффузия, что делает диффузионный член весомей временного. В (1.7) это приводит к уравнению

$$\sum H_{NM0} A_M C_0 + K_N C_N = 0.$$

В матрице существенна только диагональ  $M = N = 0$ , а для  $C_N$  получаем

$$C_N = 2^{-N} C_0 A_0 H_{0,0,-N} \sim 2^{-4N},$$

что дает спектр

$$(2.6) \quad E_t(k) \sim k^{-7}.$$

Спектры (2.5) для вязкоконвективного и (2.6) для инерционно-диффузионного интервалов в двумерной турбулентности получены из марковской модели в [5].

Поведение пассивной примеси в двумерной турбулентности моделировалось численным решением системы (1.6), (1.7) с  $Gr = 0$ . Число ярусов изменялось от 10 до 20,  $l_{\max} = 10$ , что соответствует учету всех взаимодействий с точностью порядка 1%.

Из опыта решения уравнений (1.6) известно [8], что стационарные решения неустойчивы, а режимы (2.1) устанавливаются в среднем. При получении инерционного интервала энергии, характеризующегося потоком энергии вниз по спектру, необходимо подводить энергию в некоторый промежуточный ярус. Такая ситуация моделировалась решением уравнений с начальными условиями, соответствующими концентрации энергии пульсаций скорости и температуры вблизи пятого яруса. В этом случае удается обнаружить для  $N \leq 5$  интервал  $A_N^2 \sim 2^{-2N/3}$  и соответствующий ему  $C_N^2 \sim 2^{-8N/3}$ . На рис. 2 приведены значения  $A_N^2$  и  $C_N^2$ , усредненные по времени на интервале от 1000-го до 1500-го шага ( $1 - A_N^2$ ,  $2 - C_N^2$ ,  $Pr = 100$ , шаг по времени  $\tau = 10^{-8}$ ). Вверх по спектру устанавливается инерционный интервал энтропии. Приблизительно к 5000-му шагу по времени энергия нижних ярусов возрастает настолько, что по всему невязкому интервалу устанавливается распределение  $A_N^2 \sim 2^{-2N}$ ,  $C_N^2 \sim 2^{-2N}$ .

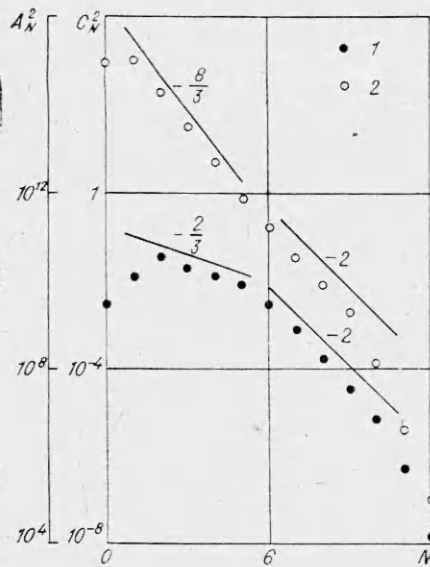


Рис. 2.

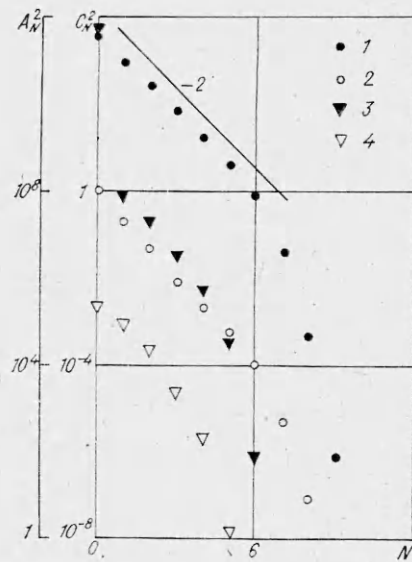


Рис. 3.

На рис. 3 представлены результаты моделирования вырождения двумерной турбулентности с пассивной примесью. Здесь  $Pr = 1$ ,  $\tau = 10^{-8}$ , точки 1 ( $A_N^2$ ) и 2 ( $C_N^2$ ) показывают средние значения за время от 1000-го до 2000-го шага. Подкачка энергии шла в нижний ярус. На 2000-м шаге подкачка энергии прекращается. Точки 3 и 4 дают средние значения  $A_N^2$  и  $C_N^2$  за время от 8000-го до 9000-го шага. Видно, что энергия нижнего яруса скорости даже возросла, в то время как амплитуда остальных ярусов упала на несколько порядков. Это известный для двумерной турбулентности факт конденсации энергии в нижнем ярусе, названный в [14]  $\delta$ -асимптотикой энергетического спектра двумерной турбулентности. Амплитуда пульсаций температуры угасает равномерно.

**3. Развитая турбулентная конвекция.** Интересно проследить за влиянием конвекции на распределение энергии по спектру. Если при больших значениях числа Грасгофа показатели степени  $\kappa$  и  $\theta$  в законах  $A_N \sim 2^{-\kappa N}$  и  $C_N \sim 2^{-\theta N}$  меняются, то режим подобия уже не будет обеспечиваться балансом соответствующей тройки членов в уравнении (1.6). Подобие можно обеспечить только балансом нелинейных членов с членом при Gr. Это возможно, если  $T_{NML} A_M A_L \sim Gr F_N C_N$  и, следовательно,

$$(3.1) \quad Gr \sim A_0^2, 2^{N(1-2\kappa)} = 2^{N(1-\theta)}.$$

Из уравнения (1.7) получаем второе условие

$$(3.2) \quad 2^\theta = 2^{3-\kappa-\theta}.$$

Сопоставление (3.1) и (3.2) показывает, что  $\kappa = 3/5$  и  $\theta = 6/5$ , а спектры должны удовлетворять законам

$$(3.3) \quad E(k) \sim k^{-11/5};$$

$$(3.4) \quad E_t(k) \sim k^{-7/5}.$$

Задаваясь вопросом о реальности существования двумерной турбулентной конвекции, содержащей инерционные интервалы (3.3), (3.4), рассмотрим квазидвумерное движение в жидкости в тонкой вертикальной плоскопараллельной щели с характерным размером  $l$  и расстоянием  $d$  между стенками ( $d \ll l$ ). Движение плоское ( $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ ), стенки считаем теплоизолированными, т. е.  $T = \text{const}(z)$ , а скорость  $\mathbf{v} = 0$  при  $z = 0$  и  $z = d$ . Скорость задается в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t)f(z)$ , а  $f(z) = 6z(d-z)/d^2$ .



При сделанных допущениях безразмерное, проинтегрированное по  $z$  уравнение для скорости запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{6}{5} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} - D \mathbf{v} + Gr \xi T,$$

где  $D = (l/d)^2$ .

Уравнение для температуры при выбранных граничных условиях не изменяется. При переходе к иерархическим уравнениям в (1.4) появится множитель перед матрицей нелинейных взаимодействий и дополнительный член, описывающий трение жидкости о боковые стенки, который в отличие от «внутренней» вязкости дает равный вклад в движение любого масштаба. Получается система

$$(3.5) \quad \frac{dA_N}{dt} = \sum \frac{6}{5} T_{NML} A_M A_L + (K_N - D) A_N + Gr F_N C_N;$$

$$(3.6) \quad \frac{dC_N}{dt} = \sum H_{NML} A_M C_L + \frac{K_N}{Pr} C_N.$$

Спектры (3.3), (3.4) проходят через уравнения (3.5), (3.6) так же, как и через (1.6), (1.7). Вопрос состоит лишь в том, позволит ли трение о боковые стенки щели развиться турбулентному течению со спектральными законами (3.3), (3.4).

Решалась система (3.5), (3.6) с  $Gr = 1,5 \cdot 10^{11}$ ,  $Pr = 7$ ,  $D = 5 \cdot 10^5$ . Число ярусов равнялось десяти. Это соответствует ячейке Хеле — Шоу, стенки которой выполнены из теплоизолирующего материала (пенопласт) размером порядка  $1 \times 1$  м, с шириной щели 5 мм, заполненной водой с наложенной разностью температур порядка  $50^\circ$ ,  $l_{max} = 10$ , т. е. учитываются взаимодействия всех возбужденных ярусов со всеми остальными. Энергия подводится к нулевому ярусу ( $C_0 = 1$ ).

Результаты численного решения представлены на рис. 4. Точки 1 ( $A_N^2$ ) и 2 ( $C_N^2$ ) усреднены на интервале от 2000-го до 5000-го шага по времени. Распределение амплитуд, соответствующее спектрам (3.3), (3.4), устанавливается на протяжении шести низших ярусов. В реальном течении можно ожидать некоторого ослабления энергии высших ярусов за счет влияния возмущений с масштабами, меньшими  $d$ , которые будут иметь к тому же трехмерную структуру. Тем не менее поведение низкочастотной части спектра, в которой получены законы (3.3), (3.4), измениться не должно.

Как указывалось выше, значения  $A_N$  и  $C_N$  непрерывно колеблются, что вызвало желание исследовать характер возникающих колебаний. С этой целью запоминались значения коэффициентов  $A_N$  и  $C_N$  в течение длительных промежутков времени и полученные реализации подвергались фурье-анализу. Таким образом строились временные энергетические спектры пульсаций определенного масштаба. Спектры имеют достаточно сложную структуру, изобилуют пиками, что указывает на развитый стохастический режим колебаний.

На основе анализа экспериментальных временных спектров низших пространственных мод надкритических конвективных течений в [15] установлена квадратичная зависимость частоты, на которую приходится очередной пик в

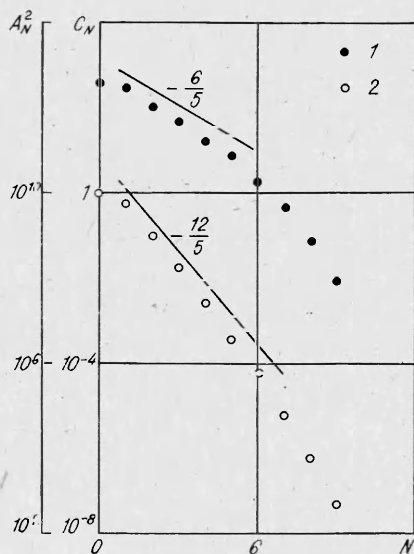


Рис. 4.

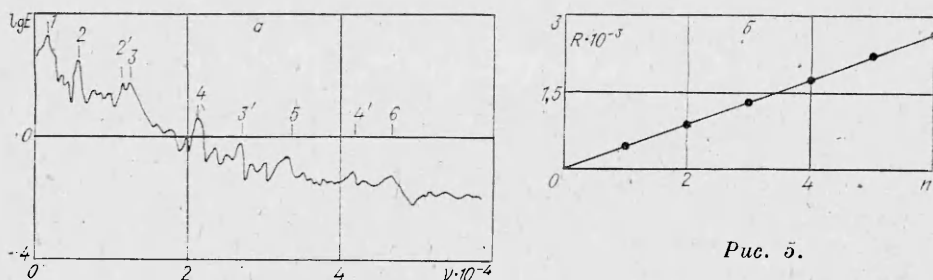


Рис. 5.

спектре, от номера пика. Оказалось, что эта интересная зависимость охватывает значительный класс явлений. В [16] квадратичную зависимость для пиков в пространственно-временных спектрах удалось обнаружить не только в надкритических движениях жидкости, но и в развитой турбулентной конвекции в замкнутых полостях, а также в МГД-ячейке Хеле — Шоу.

Анализ пространственно-временных спектров, полученных в численных экспериментах с иерархическими уравнениями, указал на их подобие экспериментальным данным. На рис. 5, а приведен временной спектр низшего яруса температуры при вырождении конвективного движения в ячейке Хеле — Шоу. На графике помечены номера пиков. Номера со штрихами относятся к кратным частотам. На рис. 5, б отложена зависимость корня из частоты  $R = \sqrt[3]{v_n}$ , на которую приходится пик, от номера пика, подтверждающая квадратичную зависимость.

Следует отметить, что в случае изотермической турбулентности колебания коэффициентов  $A_N$  носят качественно иной характер. В спектре доминирует одна частота и кратные ей гармоники.

Автор благодарит В. Д. Зимина за внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бунэ А. В., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Полежаев В. И. Методика и комплекс программ численного моделирования гидродинамических процессов на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1981, № 173.
2. Мирабель А. П., Монин А. С. Двумерная турбулентность. — Успехи механики, 1979, т. 2, № 3.
3. Kraichnan R. H., Montgomery D. Two-dimensional turbulence. — Repts. Progr. Phys., 1980, v. 43, N 5.
4. Мирабель А. П. Численное моделирование эволюции спектров энергии и поля концентрации пассивной примеси в двумерном турбулентном потоке. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 2.
5. Lesieur M., Sommeria J., Holloway G. Zones inertielles du spectre d'un contaminant passiv en turbulence bidimensional. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, ser. II, v. 292.
6. Мирабель А. П., Монин А. С. О статистических закономерностях перемешивания примеси двумерной турбулентностью. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1983, т. 19, № 9.
7. Зимин В. Д. Иерархическая модель турбулентности. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 12.
8. Фрик П. Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности. — Магнит. гидродинамика, 1983, № 1.
9. Гаврилин Б. А., Мирабель А. П., Монин А. С. О спектре энергии синоптических процессов. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 8, № 5.
10. Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б. Экспериментальное исследование двумерной турбулентности за решеткой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4.
11. Sommeria J., Moreau R. Why, how and when MHD-turbulence become two-dimensional. — J. Fluid Mech., 1982, v. 118.
12. Couder Y. Two-dimensional grid turbulence in a thin liquid film. — J. de physik lettr., 1984, v. 45, N 8.
13. Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернатынский В. И. О конвективных движениях в ячейке Хеле — Шоу. — ДАН СССР, 1977, т. 235, № 3.
14. Цескис А. Л. О двумерной турбулентности. — ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 1.



15. Богатырев Г. П., Гилев В. Г., Зимин В. Д. Пространственно-временные спектры стохастических колебаний в конвективной ячейке.— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, № 3.
16. Баранников В. А., Богатырев Г. П., Зимин В. Д., Кетов А. И., Шайдунов В. Г. Закономерности чередования пиков в спектрах стохастических колебаний гидродинамических систем. Препринт Ин-та механики сплошных сред УНЦ АН СССР, 1982.

Поступила 12/II 1985 г.

УДК 532.527 + 532.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА В КАНАЛЕ ТОЧЕЧНЫМИ ВИХРЯМИ

П. И. Гешев, Б. С. Ездин

(Новосибирск)

В последнее время много внимания уделяется прямому численному моделированию турбулентности. Известны работы по изучению трехмерного турбулентного течения в канале при умеренных числах Рейнольдса  $Re$  путем численного решения полных уравнений Навье — Стокса [1]. Основная трудность таких расчетов в том, что в турбулентности для достаточно больших  $Re$  важное значение имеют движения, масштабы которых намного меньше расстояний между узловыми точками в самых мелких используемых на практике расчетных сетках. Несмотря на возросшую мощность современных ЭВМ, ограничение на  $Re$  остается в силе. Существуют и другие подходы к численному моделированию пристенной турбулентности, например метод больших вихрей [2]. Для него характерно разделение масштабов движения на вычисляемую часть (с помощью «отфильтрованных» уравнений Навье — Стокса для крупных масштабов) и замыкаемую мелкомасштабную часть (как правило, берется однопараметрическое замыкающее соотношение), т. е. используется гипотеза независимости мелкомасштабных движений от крупномасштабных.

Согласно принципу подобия турбулентных течений по числу Рейнольдса [3], крупномасштабное движение сплошной среды вдали от стенок слабо зависит от  $Re$ . Поэтому для его описания можно использовать уравнения идеальной завихренной жидкости. В предлагаемой схеме расчета поперечное движение моделируется вязким двумерным движением точечных вихрей, а в направлении среднего движения рассчитывается полное уравнение Навье — Стокса с постоянным градиентом давления.

Точечные двумерные вихри в основном применялись для изучения свободных течений — струй и следов при обтекании различных уступов и профилей. В [4] показано, что в системе точечных вихрей постоянен спектральный поток энергии и потоковый спектр близок к колмогоровскому.

Из теории подобия в случае изотропной турбулентности следует закон « $-5/3$ ». В пристенной турбулентности эта теория приводит к логарифмическим профилям скорости в области постоянства потока к стенке продольной компоненты импульса [5]. Учитывая успешное моделирование изотропной турбулентности [4], можно надеяться на получение интересных результатов в пристенной турбулентности путем моделирования переноса по схеме продольных точечных вихрей. В данной работе показано, что такие расчеты дают качественно согласующиеся с экспериментом результаты; рассчитаны логарифмический профиль скорости и температуры, получены профили рейнольдсовых напряжений и турбулентных потоков тепла, исследованы амплитуды пульсационных величин. Моделирование турбулентности на основе точечных носителей завихренности следует также относить к классу прямых численных моделей. Такой подход обладает неоспоримым преимуществом, потому что он не требует никаких замыкающих предположений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим турбулентный поток несжимаемой жидкости, текущей в плоском канале высотой  $H$  в направлении оси  $x$ , ось  $y$  направлена по нормали к стенкам, ось  $z$  — перпендикулярно осям  $x$  и  $y$ , т. е. канал образуют две плоскости  $y = 0$  и  $y = H$ . Течение предполагается однородным вдоль канала (по оси  $x$ ) — продольная скорость зависит только от поперечных координат  $y, z$  и времени  $t$ ; средние характеристики его также не зависят от  $z$ , что весьма важно и используется для получения больших статистических выборок. Для моделирования движения в направлениях  $y$  и  $z$  применяется система из  $10^3$ — $10^4$  точечных вихрей. Скорость продольного движения  $u$  и температура  $\Theta$  определяются решением уравнений конвективного переноса импульса и тепла соответственно.