

УДК 532.529.6

## АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

В. А. Архипов<sup>\*,\*\*</sup>, И. М. Васенин<sup>\*\*</sup>, А. С. Усанина<sup>\*\*</sup>

\* Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, 659322 Бийск

\*\* Томский государственный университет, 634050 Томск

E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

На основе теоретического и экспериментального исследований осесимметричных возмущений сферической поверхности раздела фаз проведен анализ механизма потери устойчивости формы пузырька в результате его движения при малых числах Рейнольдса. Показано, что в таких условиях деформация первоначально сферического пузырька происходит вследствие развития неустойчивости Рэлея — Тейлора при достижении критического значения числа Бонда.

**Ключевые слова:** одиночный пузырек, вязкая жидкость, режимы движения, деформация, неустойчивость Рэлея — Тейлора.

**Введение.** Изучение движения пузырьков газа в жидкости, режимов их деформации и дробления, механизмов потери устойчивости является одной из классических задач гидродинамики, которые в течение длительного времени привлекают внимание исследователей. Получены фундаментальные теоретические решения и накоплено большое количество результатов экспериментальных и численных исследований зависимостей скорости всплытия и деформации пузырька от определяющих критериев подобия [1–8]. Появились публикации, посвященные численному моделированию режимов движения и деформации пузырьков в вязкой жидкости [9, 10].

Интерес к процессам, происходящим в пузырьковых средах, обусловлен тем, что пузырьки играют важную роль в ряде прикладных задач, связанных с флотацией, кавитацией, теплообменом при кипении, подводной акустикой, барботажем и т. д. В указанных задачах определяющими факторами являются размеры и форма пузырьков, режимы их движения и механизмы потери устойчивости, приводящие к деформации и дроблению дисперсной фазы.

Известны два механизма потери устойчивости при движении пузырька или капли в потоке — развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и неустойчивости Рэлея — Тейлора. В соответствии с данными механизмами деформация и дробление частиц дисперсной фазы происходят при достижении некоторых критических значений чисел Вебера и Бонда соответственно [6]. В большинстве опубликованных работ основным критерием, от которого зависят деформация и дробление пузырька или капли в потоке, является число Вебера, которое обуславливает развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-08-90700 моб.ст, 08-08-00064а), а также в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

Из решения Адамара для сферической частицы дисперсной фазы, движущейся в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса, следует, что разность нормальных напряжений на поверхности частицы постоянна и не приводит к деформации поверхности. С учетом этих данных Дж. Бэтчелор сделал следующий вывод: если вязкости и плотности дисперсной фазы и дисперсионной среды таковы, что при малых числах Рейнольдса силами инерции можно пренебречь, то ограничения на размер сферической частицы дисперсной фазы отсутствуют [11].

В отличие от известных работ в настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования режимов деформации одиночного пузырька воздуха, всплывающего в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса ( $Re < 1$ ), и теоретического анализа возможности развития неустойчивости Рэлея — Тейлора при достижении критического значения числа Бонда. Исследования проводились для одной жидкости — водно-глицеринового раствора. В работах [9, 10] проведено обобщение режимов всплытия пузырька по экспериментальным данным, полученным для более 30 различных жидкостей, что затрудняет оценку степени достоверности этих результатов.

Целью данной работы является конкретизация механизма потери устойчивости дисперсной фазы (Кельвина — Гельмгольца и Рэлея — Тейлора) путем сопоставления результатов аналитической оценки и прямого тщательного эксперимента на примере пузырька, всплывающего в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Подробный анализ критериев подобия (числа Рейнольдса, Вебера, Бонда (Этваса), Мортонна, Фруда и др.) рассматриваемой задачи проведен в работах [3, 7]. Выбор этих критериев при изучении движения пузырьков зависит прежде всего от возможности их использования при анализе особенностей конкретного процесса.

В настоящей работе использованы следующие критерии подобия: число Рейнольдса  $Re = \rho_l u D_e / \mu_l$ , число Бонда (число Этваса)  $B = g D_e^2 (\rho_l - \rho_g) / \sigma$ , число Вебера  $We = \rho_l u^2 D_e / \sigma$  ( $\mu_l$  — динамическая вязкость жидкости;  $\rho_l, \rho_g$  — плотности жидкости и газа;  $\sigma$  — поверхностное натяжение;  $g$  — ускорение свободного падения;  $D_e = \sqrt[3]{6V/\pi}$  — диаметр эквивалентного сферического пузырька;  $V$  — объем пузырька в режиме стационарного всплытия;  $u$  — установившаяся скорость всплытия пузырька).

При анализе результатов экспериментов в качестве определяющего критерия рассматривается число Рейнольдса, а в качестве определяемых — числа Бонда и Вебера. Критические значения  $B_*$ ,  $We_*$  этих чисел, определяющие форму частиц дисперсной фазы, должны находиться экспериментально, так как деформация пузырьков и капель всегда происходит вследствие появления на сферической поверхности нелинейных, конечных по амплитуде возмущений [6].

**Теоретический анализ.** Потеря устойчивости пузырьков, всплывающих в жидкости при малых числах Рейнольдса, исследовалась с помощью метода, предложенного Л. Эйлером при изучении устойчивости упругих стержней [12].

На границе пузырька выполняются равенство скачка нормальных напряжений капиллярному давлению

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}] = 2\sigma H \quad (1)$$

и условие непрерывности касательных напряжений

$$[\mathbf{s} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{n}$  — касательный и нормальный к границе пузырька единичные векторы;  $\mathbf{P}$  — тензор напряжений;  $H$  — средняя кривизна поверхности.

Рассматривая далее осесимметричную задачу в цилиндрических координатах  $r$  и  $z$ , выберем начало координат в кормовой точке всплывающего пузырька и направим ось  $z$

по оси симметрии капли навстречу потоку. Выражая кривизну  $H$  в цилиндрических координатах, представим (1) в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{r z'_r}{\sqrt{1 + (z'_r)^2}} = \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n}]. \quad (3)$$

Если разрыв нормальных напряжений на границе пузырька известен, то с помощью уравнения (3) можно определить форму этого пузырька. При этом на оси симметрии пузырька в силу гладкости поверхности должны выполняться условия

$$z'_r|_{z=0} = 0, \quad z'_r|_{z=z_m} = 0. \quad (4)$$

Умножая (3) на  $r dr$  и интегрируя результат от одного полюса пузырька до другого с учетом (4), найдем условие разрешимости задачи. Зададим поверхность пузырька в параметрическом виде  $r(s)$  и  $z(s)$ , выбрав в качестве параметра  $s$  расстояние на дуге меридиана от рассматриваемой точки до полюса  $z = 0$ . Тогда условие разрешимости можно записать в виде

$$\int_0^{s_m} (\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_1 r'_s r ds = \int_0^{s_m} (\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_2 r'_s r ds, \quad (5)$$

где индекс 1 соответствует внутренней поверхности пузырька, индекс 2 — внешней;  $s_m$  — расстояние между полюсами по дуге меридиана. Умножая условие непрерывности касательных напряжений (2) на  $-z'_s r$ , интегрируя результат по  $s$  и суммируя с (5), получаем равенство

$$\int_0^{s_m} [(\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_1 r'_s - (\mathbf{s} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_1 z'_s] r ds = \int_0^{s_m} [(\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_2 r'_s - (\mathbf{s} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_2 z'_s] r ds, \quad (6)$$

левая и правая части которого представляют собой интегралы функций напряжений, вычисленные по его внутренней и внешней поверхностям. Запишем уравнение движения внутри пузырька в интегральной форме

$$\int_0^{s_m} [(\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_1 r'_s - (\mathbf{s} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_1 z'_s] r ds = m \mathbf{g}, \quad (7)$$

где  $m$  — масса пузырька;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения. Подставляя (6) в (7), находим

$$m \mathbf{g} = \int_0^{s_m} [(\mathbf{n} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_2 r'_s - (\mathbf{s} \cdot \Pi \cdot \mathbf{n})_2 z'_s] r ds. \quad (8)$$

Очевидно, что в том случае, когда справедливо уравнение движения (8), условие разрешимости (5) является следствием уравнения движения и условия (2). Таким образом, (5) будет выполнено, если поле течения удовлетворяет этим уравнениям.

Рассмотрим вопрос о единственности решения рассматриваемой задачи. Представляя меридиональное сечение пузырька в полярных координатах  $R(\theta)$  и выражая разрыв нормальных напряжений через параметры среды из (1), получаем уравнение

$$-\sigma \frac{R[RR''_{\theta\theta} - 3(R'_{\theta})^2 - 2R^2] + R'_{\theta}[(R'_{\theta})^2 + R^2] \operatorname{ctg} \theta}{R^2[(R'_{\theta})^2 + R^2]^{3/2}} = \left( P_1 - 2\mu_1 \frac{\partial u_{n1}}{\partial n} \right) - \left( P_2 - 2\mu_2 \frac{\partial u_{n2}}{\partial n} \right),$$

где  $P_i$  — давление;  $\partial u_{ni}/\partial n$  — производные от проекции скорости на нормаль к поверхности по направлению этой нормали.

На форму пузырьков в жидкости влияет гидростатическое давление  $P_{ri}$ , имеющее различные значения внутри пузырька и вне его. Давление внутри пузырька положим равным  $P_{r1} = C_1 - g\rho_1 z$ , вне пузырька —  $P_{r2} = C_2 - g\rho_2 z$ . Вычитая эти величины из выражений для давлений  $P_1$  и  $P_2$ , введем модифицированные давления  $\bar{P}_1 = P_1 - C_1 + g\rho_1 z$  и  $\bar{P}_2 = P_2 - C_2 + g\rho_2 z$ . Согласно экспериментальным данным при малых  $Re$  и не очень больших  $B$  форма пузырьков незначительно отличается от сферической. Для пузырька, форма которого близка к сферической, величина  $(R'_\theta)^2$  пренебрежимо мала по сравнению с  $R^2$ . Получаем уравнение

$$-\sigma \frac{R[RR''_{\theta\theta} - 2R] + R'_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R^2} + gz(\rho_1 - \rho_2) + C = \bar{P}_1 - \bar{P}_2 + 2\mu_2 \frac{\partial u_{n2}}{\partial n} - 2\mu_1 \frac{\partial u_{n1}}{\partial n}, \quad (9)$$

где  $C = C_2 - C_1$  — неизвестная константа.

Учитывая, что общее решение (9) содержит, кроме  $C$ , еще две постоянные интегрирования, будем решать задачу с тремя дополнительными условиями

$$R'_\theta(0) = 0, \quad R'_\theta(\pi) = 0, \quad V = V_0 \quad (10)$$

( $V$  — заданный объем пузырька).

Пусть задача (9), (10) имеет решение  $R(\theta)$ . Рассмотрим возможность существования при той же правой части (9) с теми же граничными условиями близкого решения данного уравнения  $R(\theta) + \delta(\theta)$ , в котором  $\delta(\theta) \ll 1$ . Пренебрегая малыми величинами порядка  $\delta^2$  и учитывая, что для  $R(\theta)$  задача (9), (10) имеет решение, получаем задачу

$$\begin{aligned} \delta''_{\theta\theta} + \delta'_\theta \operatorname{ctg} \theta + [2 + (B/4)(1 - \chi)\bar{R}^2 \cos \theta] \delta &= C\bar{R}^2, \\ \delta'(0) = 0, \quad \delta'(\pi) = 0, \quad 2\pi \int_0^\pi \bar{R}^2 \sin \theta \delta(\theta) d\theta &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\chi = \rho_1/\rho_2$ ;  $\bar{R}(\theta) = R(\theta)/R_0$ ;  $R_0$  — радиус сферы объемом  $V_0$ .

При проведении исследований в качестве невозмущенной поверхности была выбрана сфера  $R(\theta) = R_0$ . Задача (11) изучалась как задача на собственные значения  $B$ . При  $B = 0$  она имеет аналитическое решение, которое сводится к сдвигу капли по оси  $z$  без изменения ее формы. При  $B > 0$  задача решается численно: найдено наименьшее не равное нулю собственное значение  $B_{cr} = 89,9$ , при котором решение линеаризованной задачи становится не единственным. Проведя сравнение с экспериментом, можно определить, какие процессы происходят при этом с каплей. Возможно, в случае всплывающих пузырьков значение  $B$  при  $B_{cr} = 100 \div 200$  соответствует потере устойчивости эллипсоидальной формы пузырька.

**Экспериментальная установка и методика исследования.** Исследование проводилось с использованием установки, состоящей из кюветы с рабочей жидкостью, устройства для генерации пузырьков и системы визуализации процесса всплытия одиночного пузырька. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. В кювету призматической формы размером  $150 \times 150 \times 600$  мм, изготовленную из оптического стекла толщиной 5 мм, заливается рабочая жидкость объемом 13,5 л, в качестве которой использовался водно-глицериновый раствор различной концентрации. Пузырьки воздуха получены с помощью шприца объемом 0,15 л, установленного в нижней части кюветы. Система визуализации состоит из источника света, коллиматора, матового стекла и цифровой видеокамеры типа Panasonic NV-DA1EG, подключенной к компьютеру. Для измерения размеров и скорости всплытия пузырька снаружи кюветы установлена масштабная линейка с ценой деления 1 мм (на схеме не показана). Время экспозиции варьировалось в интервале от 1/350 до 1/1500 с.

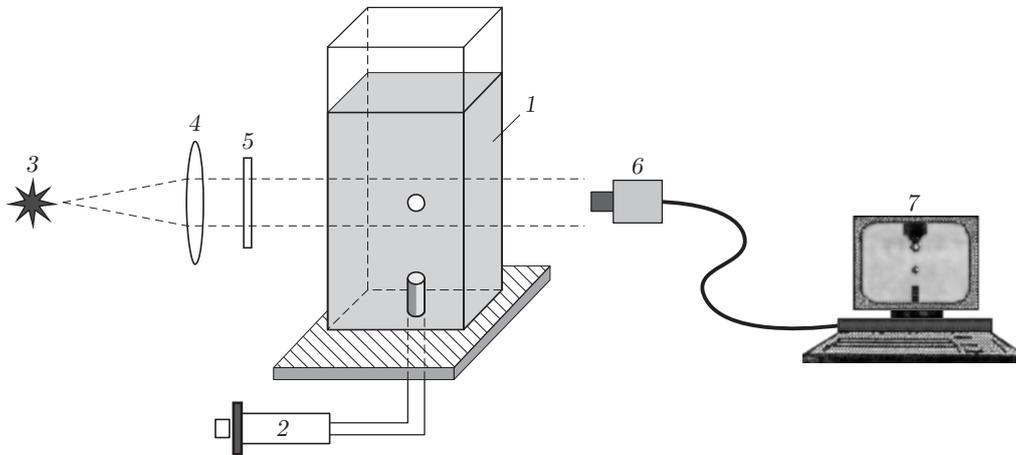


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — кювета; 2 — устройство для генерации пузырьков; 3 — источник света; 4 — коллиматор; 5 — матовое стекло; 6 — видеокамера; 7 — компьютер

В ходе экспериментов путем обработки результатов видеосъемки с помощью программы Adobe After Affect определялись форма и размеры пузырька, а также установившаяся скорость его всплытия на стационарном (установившемся) участке траектории. Для оценки времени, в течение которого скорость устанавливается, использовалась формула, следующая из уравнения движения пузырька в стоксовом режиме:

$$t_* = 3t_0 = 3(\rho_l - \rho_g)D_e^2/(18\mu_l)$$

( $t_0$  — характерное время релаксации количества движения).

В экспериментах время установления стационарного режима всплытия пузырька варьировалось в диапазоне от 0,2 мс до 0,3 с, а длина участка установления — от  $10^{-3}$  до  $10^2$  мм.

С учетом заданной разрешающей способности видеокамеры геометрические размеры пузырьков определялись с относительной погрешностью 1 %, а скорость всплытия в 3–5 дублирующих опытах — с погрешностью, не превышающей 10 % при значении доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ .

Для обеспечения требуемого режима всплытия пузырька (малые значения числа Рейнольдса) необходимо, чтобы значения динамической вязкости используемой жидкости были большими, а ее физические свойства — стабильными. В [1, 3] показано, что при определенных условиях на динамику пузырьков оказывают влияние поверхностно-активные вещества (ПАВ). В проведенных экспериментах использовалась “чистая” жидкость — не содержащий ПАВ тщательно перемешанный водно-глицериновый раствор.

Поскольку режим всплытия пузырька зависит от физических свойств жидкости, перед каждым экспериментом тщательно измерялась ее вязкость. Для повышения вязкости водно-глицеринового раствора использовались охлаждающие смеси [13]: емкость с данным раствором предварительно помещалась в смесь соли NaCl и снега в массовом соотношении 33/100, после чего раствор заливался в рабочую кювету. Температура охлажденного раствора оставалась постоянной в течение 1 ч.

Вязкость водно-глицеринового раствора определялась с помощью измерения время-пролетным методом скорости осаждения сферических частиц — калиброванных стеклянных шариков диаметром  $D_p = 1,1$  мм и плотностью  $\rho_p = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. Из выражения для скорости стационарного осаждения частиц в стоксовом режиме (значения  $Re \leq 5 \cdot 10^{-2}$ )

Физические характеристики водно-глицеринового раствора

$C_{gl}, \%$	$T, ^\circ\text{C}$	$\mu_l, \text{Па} \cdot \text{с}$	$\rho_l, \text{г/см}^3$	$\sigma, \text{Н/м}$
87	21,0	$0,19 \pm 0,01$	1,23	0,065
100	10,0	$4,1 \pm 0,2$	1,27	0,064
100	22,5	$1,02 \pm 0,05$	1,26	0,063

получаем формулу для определения вязкости раствора

$$\mu_l = gD_p^2(\rho_p - \rho_l)/(18u).$$

Погрешность определения динамической вязкости не превышает 5 % при значении доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ . Плотность и поверхностное натяжение водных растворов глицерина незначительно зависят от температуры, поэтому использовались табличные значения, приведенные в [14]. Характеристики водно-глицериновых растворов в зависимости от температуры, при которой проводились эксперименты, и объемной доли глицерина  $C_{gl}$  приведены в таблице. В экспериментах эквивалентный диаметр и скорость всплытия пузырька варьировались в диапазонах  $D_e = 0,1 \div 4,8$  см,  $u = 0,6 \div 19,2$  см/с.

**Результаты экспериментов.** Анализ результатов видеосъемки показал, что в зависимости от значений чисел Рейнольдса, Бонда и Вебера на стационарном участке всплытия формируются пузырьки следующих характерных конфигураций: сфера (рис. 2, а), сплюснутый эллипсоид вращения (рис. 2, б), сферические сегменты с секущей плоскостью, расположенной ниже (рис. 2, в) и выше (рис. 2, г) диаметральной плоскости. Аналогичные формы пузырьков рассматривались в работах [2–8].

Образование устойчивой формы пузырьков происходило на участке стабилизации, протяженность которого возрастала с увеличением размера пузырька (объема воздуха, вводимого в жидкость шприцем). Сферические пузырьки формировались практически сразу после ввода воздуха, а при образовании пузырьков в форме эллипсоида и сферического сегмента происходила нерегулярная деформация первоначальной формы пузырька, сопровождающаяся колебаниями поверхности раздела фаз.

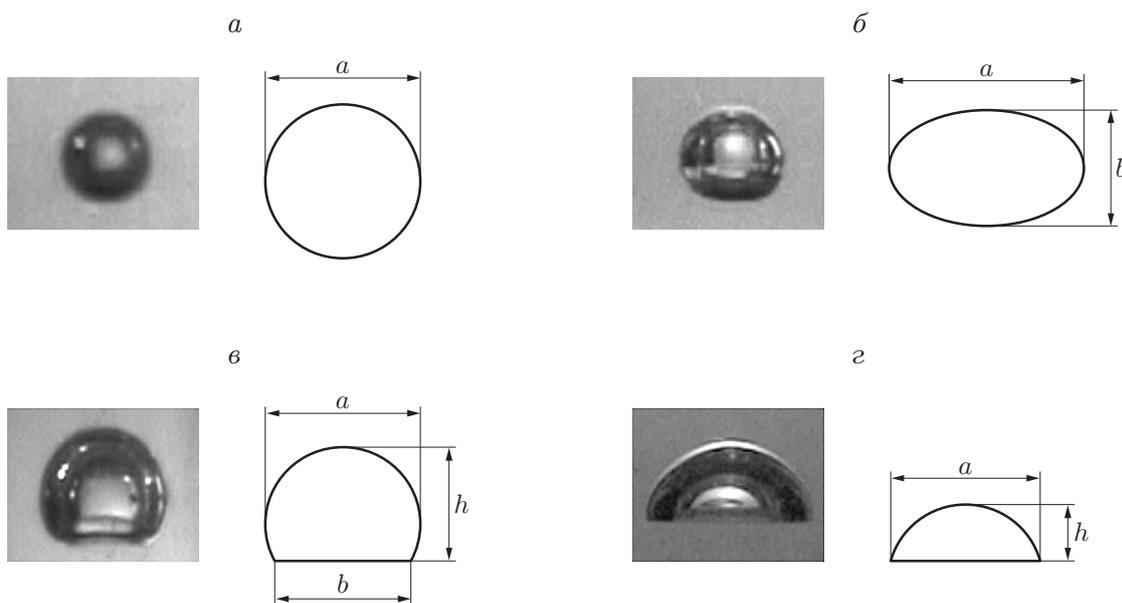


Рис. 2. Характерные формы пузырьков:  
а — сфера; б — эллипсоид; в, г — сферический сегмент

При определении характерного размера пузырька в зависимости от его формы использовались следующие формулы:

— для сферы (см. рис. 2,а)

$$D_e = a;$$

— для эллипсоида (см. рис. 2,б)

$$D_e = \sqrt[3]{ba^2};$$

— для сферического сегмента, представленного на рис. 2,в,

$$D_e = \sqrt[3]{a^3 - 0,75b^2(a - h) - (a - h)^3};$$

— для сферического сегмента, показанного на рис. 2,г,

$$D_e = \sqrt[3]{b(0,75a^2 + h^2)}.$$

В проведенных экспериментах значения основных критериев подобия варьировались в следующих диапазонах:  $Re = 0,01 \div 35,00$ ;  $B = 0,2 \div 450,0$ ;  $We = 7 \cdot 10^{-7} \div 8 \cdot 10^{-2}$ .

На рис. 3 представлена классификация характерных форм пузырьков в зависимости от чисел Рейнольдса и Бонда. Исследованную область критериев подобия можно разделить на три области: 1) пузырьки сферической формы (область I на рис. 3); 2) эллипсоиды вращения (область II); 3) сферические сегменты (область III). При малых значениях чисел Рейнольдса и Бонда ( $Re < 1$ ,  $B < 1$ ) форма стационарно всплывающих пузырьков близка к сферической. При увеличении значений числа Рейнольдса или Бонда ( $Re > 1$ ,  $B > 1$ ) происходит деформация сферической межфазной поверхности, и пузырьки принимают форму эллипсоида вращения. При дальнейшем росте значений числа Бонда  $B > 20 \div 100$  в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 1 \div 100$  происходит преобразование формы эллипсоида вращения в форму сферического сегмента.

Отметим, что полученные границы зон существования рассмотренных конфигураций пузырька удовлетворительно согласуются с приведенными в работе [8] границами, показанными штриховыми линиями на рис. 3. При малых значениях числа Рейнольдса

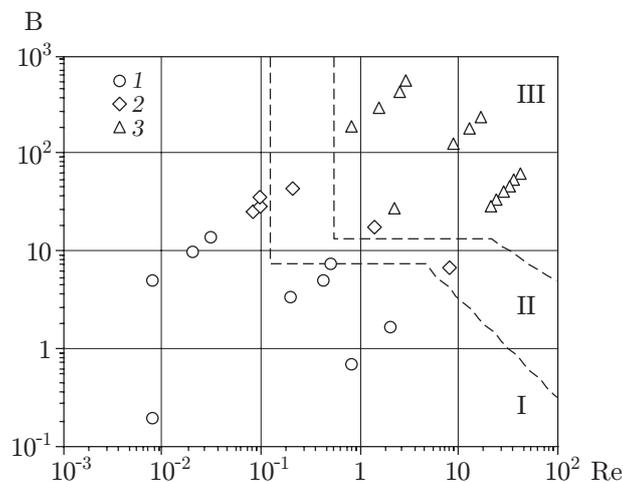


Рис. 3. Режимы деформации пузырька в координатах  $Re$ – $B$ :

1 — сфера; 2 — эллипсоид; 3 — сферический сегмент; I–III — области существования различных режимов деформации пузырька; штриховые линии — границы указанных областей, определенные в [8]

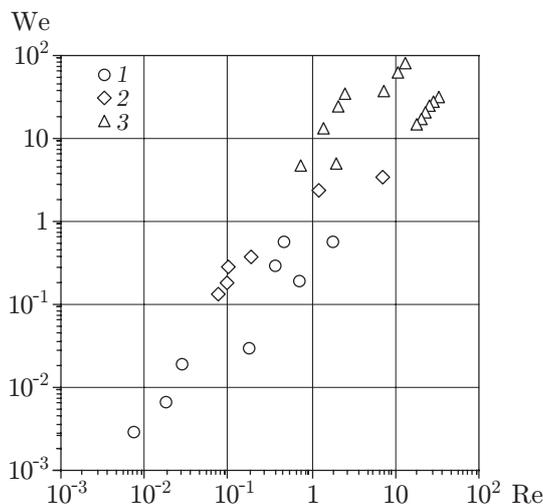


Рис. 4. Режимы деформации пузырька в координатах Re–We:  
1 — сфера; 2 — эллипсоид; 3 — сферический сегмент

( $Re < 1$ ) условием смены сферической формы пузырька на выраженный эллипс является достижение значения  $B > 10 \div 20$ . Потеря устойчивости эллипсоидальной формы пузырька происходит при достижении критического значения числа Бонда  $B \geq B_* = 100 \div 200$ .

Для анализа механизма потери устойчивости сферической или эллипсоидальной формы пузырька полученные экспериментальные данные представлены в виде зависимостей форм пузырька от чисел Рейнольдса и Вебера (рис. 4). На рис. 4 видно, что значение числа Вебера, соответствующее потере устойчивости эллипсоидальной формы пузырька при  $Re < 1$ , находится в диапазоне  $We_* = 3 \cdot 10^{-2} \div 7 \cdot 10^{-2}$ . Сопоставление указанных значений чисел Бонда и Вебера позволяет сделать вывод о потере устойчивости границы раздела фаз за счет развития неустойчивости Рэлея — Тейлора, поскольку критическое значение числа Вебера  $We_* \ll 1$ .

**Заключение.** При теоретическом анализе и экспериментальном исследовании режимов деформации одиночного пузырька воздуха, всплывающего в вязкой жидкости в диапазоне малых чисел Рейнольдса, получены следующие результаты.

Найдено наименьшее не равное нулю собственное значение  $B_{cr} = 89,9$ . При этом значении решение линеаризованной задачи становится не единственным. Какие процессы происходят при этом с каплей, можно определить, проведя сравнение с экспериментом. Возможно, в случае всплывающих пузырьков значение  $B$  при  $B_{cr} = 100 \div 200$  соответствует потере устойчивости эллипсоидальной формы пузырька.

Для исследованных диапазонов основных критериев подобия в координатах Re–B и Re–We экспериментально определены границы зон существования трех характерных конфигураций пузырька — сферы, сплюснутого эллипсоида вращения и сферического сегмента. Полученные границы качественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Установлено, что при малых числах Рейнольдса ( $Re < 1$ ) потеря устойчивости границы раздела фаз обусловлена развитием неустойчивости Рэлея — Тейлора. При этом переход от сферической формы пузырька к эллипсоидальной происходит при значениях числа Бонда  $B > 10 \div 20$ , а переход от эллипсоидальной формы к сферическому сегменту — при  $B > B_* = 100 \div 200$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Grace J. R.** Shapes and velocities of bubbles rising in infinite liquids // Trans. Inst. Chem. Engrs. 1973. V. 51. P. 116–120.
3. **Воинов О. В., Петров А. Г.** Движение пузырей в жидкости. М.: ВИНТИ, 1976. С. 86–147. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа; Т. 10).
4. **Clift R.** Bubbles, drops and particles / R. Clift, J. R. Grace, M. E. Weber. N. Y.: Acad. Press, 1978.
5. **Bhaga D., Weber M. В.** Bubbles in viscous liquids: shape, wakes and velocities // J. Fluid Mech. 1981. V. 105. P. 61–85.
6. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
7. **Волков П. К., Чиннов Е. А.** Стационарное всплытие одиночного пузыря в неограниченном объеме жидкости // ПМТФ. 1989. № 1. С. 94–99.
8. **Лабунцов Д. А.** Механика двухфазных сред / Д. А. Лабунцов, В. В. Ягов. М.: Моск. энерг. ин-т, 2000.
9. **Mitsuhiko Ohta.** A computational study of the effect of initial bubble conditions on the motion of a gas bubble rising in viscous liquids // Intern. J. Multiphase Flow. 2005. N 31. P. 223–237.
10. **Jinsong Hua, Jing Lou.** Numerical simulation of bubble rising in viscous liquid // J. Comput. Phys. 2007. N 222. P. 769–795.
11. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
12. **Ландау Л. Д.** Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.
13. **Гороновский И. Т.** Краткий справочник по химии. Киев: Наук. думка, 1974.
14. **Неволин Ф. В.** Химия и технология производства глицерина. М.: Химия, 1954.

*Поступила в редакцию 13/X 2009 г.,  
в окончательном варианте — 11/V 2010 г.*

---