УДК 539.3

ОБ УДАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ю. Е. Иванова, В. Е. Рагозина

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mails: iv_ul_ev@mail.ru, ragozina@vlc.ru

Методом сращиваемых асимптотических разложений получены приближенные решения одномерных краевых задач нелинейной динамической теории упругости об ударном нагружении несжимаемой среды по поверхности цилиндрической полости, вызывающем антиплоское движение среды или ее скручивание. Разложение решения в прифронтовой области основано на решениях эволюционных уравнений, отличных от уравнений для квазипростых волн.

Ключевые слова: нелинейная упругость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.

Введение. Исследованию ударных волн в нелинейно-упругих средах посвящено большое количество работ (см., например, [1–4]). В общем случае решение краевых задач осложнено взаимовлиянием объемного и сдвигового деформирования, а также неопределенностью положения и геометрии поверхностей ударных волн, на которых ставится часть краевых условий. Поэтому решения за фронтальными поверхностями ударных волн, положение и геометрия волн являются взаимосвязанными и должны определяться совместно. Нелинейный характер дифференциальных уравнений и краевых условий делает практически невозможным определение точных решений, вследствие чего возрастает роль численных и приближенных аналитических методов. Наиболее известными аналитическими методами являются лучевой и метод возмущений [5, 6]. С помощью последнего получено решение большого количества задач. В основном это задачи, в которых исследуются деформации, приводящие к изменению объема [7], или рассматриваются плоские одномерные волны [6–8]. Для изучения особенностей сдвигового деформирования отдельно от объемного необходимо использовать специальную модель нелинейно-упругой несжимаемой среды.

В данной работе рассматривается два типа поперечных волн, распространяющихся от нагружаемой цилиндрической полости: волна антиплоской деформации и волна, вызванная скручивающим ударом. Решение строится с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений. Для каждого типа деформирования решение внутренней задачи определяется своим эволюционным уравнением. Полученные прифронтовые разложения решений могут как использоваться самостоятельно, так и включаться в качестве начальных данных в схемы численных расчетов [9].

Основные модельные соотношения нелинейно-упругой несжимаемой среды. Система уравнений динамики несжимаемой упругой среды в криволинейных координатах Эйлера x^1, x^2, x^3 имеет вид

$$v^i = \dot{u}^i + u^i_{,j} v^j, \qquad \alpha_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_{,j})/2,$$

$$\sigma^{ij}_{,j} = \rho(\dot{v}^i + v^i_{,j}v^j), \qquad \sigma^i_j = -p\delta^i_j + \frac{\partial W}{\partial \alpha^k_i}\,(\delta^k_j - 2\alpha^k_j),$$
$$W = (a-\mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \chi I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \ldots, \tag{1}$$
$$I_1 = \alpha^j_j, \qquad I_2 = \alpha^i_j \alpha^j_i,$$
$$\dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \qquad u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}u^k, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}u_k,$$

где u^i, v^i — компоненты векторов перемещений и скорости точек среды; α_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси; σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши; $\rho = \text{const}$ — плотность среды; W — функция упругого потенциала, задающая свойства среды; p — добавочное гидростатическое давление; a, b, χ, θ, c, d, k — упругие модули среды; индексом после запятой обозначена операция ковариантного дифференцирования; по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование. Система уравнений (1) соответствует движению изотропной среды в адиабатическом приближении. В разложении W в ряд в окрестности свободного состояния перед некоторыми слагаемыми стоит знак “$-$”, так как для несжимаемой среды $I_1 < 0$, $I_2 > 0$.

Задача об антиплоском ударном нагружении несжимаемой нелинейно-упругой среды, уравнения и краевые условия. Рассмотрим решение задачи об антиплоском ударе по цилиндрической круговой полости, расположенной в пространстве, занятом несжимаемой упругой средой. Задачу удобно решать в цилиндрической системе координат $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$. В этом случае уравнение поверхности полости имеет вид $r = r_0$, среда занимает часть пространства, для которого $r \geqslant r_0$. Радиус r_0 значительно меньше длины образующей, поэтому будем считать, что образующие имеют бесконечную длину. Начиная с момента времени $t = 0$ на границу полости действует ударная нагрузка, в результате чего возникает поле перемещений $u_r = u_\varphi = 0$, $u_z = u_z(r,t)$, причем при $r = r_0$

$$u_z\big|_{r=r_0} = U(t) = v_0 t + at^2/2, \qquad v_0 = \text{const} > 0, \qquad a = \text{const}\,. \tag{2}$$

Здесь для $U(t)$ без ограничения общности принято квадратичное приближение для упрощения дальнейшего изложения. Условие $v_0 > 0$ приводит к тому, что с момента $t = 0$ от нагружаемой поверхности отделяется ударная волна — поверхность разрыва градиента перемещений. Известно, что на такой поверхности не выполняются уравнения (1). На поверхности разрыва должны выполняться динамические условия совместности, следующие из интегральных законов сохранения, а также геометрические и кинематические условия совместности [10, 11]. Из этих условий в общем виде может быть получена зависимость скорости ударной волны G от ее интенсивности и начальных деформаций в среде [4, 5]. Предполагая в рассматриваемой задаче отсутствие начальных деформаций, для скорости G получаем следующее приближение:

$$G \approx C(1 + \beta\tau^2 + \ldots), \qquad \tau\big|_{r=r_0+\tilde{r}(t)} = \left[\frac{\partial u_z}{\partial r}\right] = -\frac{\partial u_z^-}{\partial r},$$
$$C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad \beta = \frac{a+b+\chi+d}{\mu}, \qquad \tilde{r}(t) = \int\limits_0^t G(\xi)\,d\xi, \qquad [f] = f^+ - f^-. \tag{3}$$

Здесь квадратными скобками обозначен скачок величины на поверхности разрывов; f^+, f^- — предельные значения f; индекс “+” соответствует области, в направлении которой движется волна; величина τ определяет интенсивность волны. Отметим, что эта волна является поперечной. Далее волновую поверхность будем обозначать Σ. На поверхности Σ необходимо поставить следующие условия:

$$u_z\big|_\Sigma = 0, \qquad \tau\big|_\Sigma = -\frac{\partial u_z^-}{\partial r}, \qquad [\sigma_{rr}]\big|_\Sigma = 0, \qquad p^+ = p_0 = \text{const}\,. \tag{4}$$

Первое условие в (4) — следствие непрерывности поля перемещений, второе — отсутствие предварительных деформаций, последние два условия позволяют определить функцию p. Следствием (1) рассматриваемой задачи является система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}\Big(1 + 3\gamma\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big)^2\Big) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big(1 + \gamma\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big)^2\Big) + \ldots = \frac{1}{C^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\\ \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial r} = 2\alpha\,\frac{\partial u_z}{\partial r}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{a+\mu}{r}\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big)^2 + \ldots,\\ \gamma = (a + b + \chi + d)/\mu, \qquad \alpha = a - b - \mu - \chi/4.\end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) следует, что функция p зависит от поля перемещений, построение которого является основной задачей.

Решение задачи об антиплоском ударе методом сращиваемых асимптотических разложений. Для получения приближенных функциональных зависимостей, соответствующих полю перемещений, введем безразмерные переменные

$$s = \frac{r - r_0}{r_0}\,\varepsilon^{-4}, \qquad m = \frac{r - r_0 - Ct}{r_0}\,\varepsilon^{-3}, \qquad w(s,m) = \frac{u_z}{r_0}\,\varepsilon^{-9/2}, \qquad \varepsilon = \Big(\frac{v_0}{C}\Big)^{2/3}. \tag{6}$$

Здесь ε — малый параметр задачи; зависимость s от $r - r_0$ означает, что решение строится в области, примыкающей к нагружаемой полости; зависимостью m от $r - r_0 - Ct$ определяется прифронтовое разложение решения.

Рассмотрим поле перемещений в прифронтовой области в моменты времени, близкие к $t = 0$. Подставляя (6) в (2), (5), получаем следующую краевую задачу относительно $w(s,m)$:

$$\begin{gathered}(w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm})(1 + 3\gamma\varepsilon(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2) + 3\gamma\varepsilon^3 w_{,mm}(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2 + \\ + \frac{\varepsilon^4}{1 + s\varepsilon^4}\,(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}) + \frac{\gamma\varepsilon^5}{1 + s\varepsilon^4}\,(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^3 + \ldots = 0,\\ w\big|_{s=0} = -m + a_1\varepsilon^3 m^2/2, \qquad a_1 = ar_0/(v_0 C).\end{gathered} \tag{7}$$

Функцию $w(s,m)$ представим в виде асимптотического ряда

$$w(s,m) = w_0(s,m) + \varepsilon w_1(s,m) + \varepsilon^2 w_2(s,m) + \varepsilon^3 w_3(s,m) + \ldots. \tag{8}$$

Подставляя разложение (8) в (7) с точностью до третьего порядка малости по ε, получим

$$\begin{gathered}w(s,m) = f_0(m)s - m + \varepsilon(-f_0'(m)s^2 + f_1(m)s) + \\ + \varepsilon^2(2f_0''(m)s^3/3 - f_1'(m)s^2 + f_2(m)) + \varepsilon^3(-f_0'''(m)s^4/3 - \gamma f_0^2(m)f_0''(m)s^3/2 + \\ + 2f_1''(m)s^3/3 - f_2'(m)s^2 + f_3(m)s + a_1 m^2/2) + \ldots.\end{gathered} \tag{9}$$

Решение (9) получено без учета условий на Σ. В это решение входят неизвестные функции f_0, f_1, f_2, f_3, которые определяются из дополнительного решения, удовлетворяющего условиям на переднем фронте волны. Ряд (9) будем называть внешним разложением решения [12], тогда как дополнительное решение — внутренним разложением. Рассмотрим переход во внутреннюю область, при котором в окрестности $r = r_0$ сохраняется прифронтовой тип решения. Этого можно добиться, меняя масштаб s и вводя переменную $p = \varepsilon^k s$, $k = 1, \ldots, 4$. При $k = 1, 2, 3$ получим внутренние задачи (в результате применения метода последовательных нелинейных приближений) и линейный волновой оператор на нулевом шаге. Для того чтобы учесть нелинейный характер задачи, рассмотрим параметр $p = \varepsilon^4 s$. В переменных p, m, $w(p, m)$ уравнение (5) записывается в виде

$$(2w_{,pm} + \varepsilon^3 w_{,pp})\{1 + 3\gamma\varepsilon^3(\varepsilon^3 w_{,p} + w_{,m})^2\} + 3\gamma w_{,mm}(\varepsilon^3 w_{,p} + w_{,m})^2 + \\ + \frac{1}{1+p}\,(\varepsilon^3 w_{,p} + w_{,m}) + \frac{1}{1+p}\,\gamma\varepsilon^3(\varepsilon^3 w_{,p} + w_{,m})^3 + \ldots = 0. \quad (10)$$

Из краевых условий (4) получаем

$$w(m,p)\big|_{m=y(p)} = 0, \qquad \tau\big|_{m=y(p)} = -\varepsilon^{3/2}(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,p}). \quad (11)$$

Здесь $y(p)$ — неизвестная функция, определяющая положение переднего волнового фронта. Из (11) следует, что на рассматриваемых расстояниях ударная волна имеет малую интенсивность: $\tau \sim \varepsilon^{3/2}$. Представим искомое внутреннее решение в виде ряда

$$w(m,p) = w_0(m,p) + \varepsilon^3 w_1(m,p) + \varepsilon^6 w_2(m,p) + \ldots, \quad (12)$$

в котором вид калибровочных функций приведен в соответствие с (10). Функцию $y(p)$ также заменим ее приближенным представлением:

$$y(m,p) = y_0(m,p) + \varepsilon^3 y_1(m,p) + \varepsilon^6 y_2(m,p) + \ldots.$$

Подставив (12) в (10), на k-м шаге можно получить уравнение вида

$$w_{k,pm} + \frac{3\gamma}{2}\, w_{k,pm} w_{0,m}^2 + \frac{w_{k,m}}{2(1+p)} = F_k(m, p, w_{0,m}, \ldots, w_{k-1,m}, \ldots, w_{k-1,pm}), \quad (13)$$

где функции F_k определяются через F_{k-1}, причем $F_0 = 0$. Из (13) следует, что основной оператор нулевого шага является эволюционным уравнением цилиндрических поперечных волн:

$$w_{0,pm} + \frac{3\gamma}{2}\, w_{0,mm} w_{0,m}^2 + \frac{w_{0,m}}{2(1+p)} = 0. \quad (14)$$

Следует отметить отличие эволюционного уравнения (14) для деформаций, приводящих к изменению формы, от уравнения квазипростых волн, являющегося эволюционным уравнением при распространении объемных деформаций: в уравнение (14) величина $w_{0,m}$ входит во второй, а не в первой степени. Последнее слагаемое в (14) свидетельствует о том, что волна является цилиндрической.

Для определения положения Σ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(p) = (\gamma/2)(\varepsilon^3 w_{,p} + w_{,m})^2 - (3/8)\gamma^2\varepsilon^3(\varepsilon^3 w_{,p} + w_{,m})^4 + \ldots, \quad (15)$$

где $w_{,m}$, $w_{,p}$ — функции p, m, причем $m = y(p)$. Краевое условие для уравнения (15) имеет вид $y(0) = 0$. Решая совместно (13), (15) с краевыми условиями (11), получим внутреннее представление решения до третьего порядка по ε, содержащее неизвестные константы.

После выполнения стандартной процедуры сращивания внутреннего и внешнего разложений, позволяющей определить неизвестные функции и константы, получим равномерно пригодное разложение решения, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$
\begin{aligned}
w = &-\frac{m}{(1+p)^{1/2}} + \frac{\gamma}{2}\,\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{1/2}} + \varepsilon^3\Big\{ -\frac{m^2}{16}\,\frac{1}{(1+p)^{3/2}} + \\
&+\Big(\frac{5}{8}\gamma\,\frac{1}{(1+p)^{3/2}} + \frac{1}{16}\gamma\,\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{3/2}} - \frac{5}{8}\,\frac{\gamma}{(1+p)^{1/2}}\Big)m - \\
&-\gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{1/2}} - \frac{10}{3}\gamma\,\frac{1}{(1+p)^{1/2}} - \\
&-\gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\frac{1}{(1+p)^{1/2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)^n\frac{1}{nn!} + \\
&+\frac{\gamma}{2}\Big(1 + \frac{5}{8}\gamma\Big)\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{1/2}} + \frac{10}{3}\gamma\exp\Big(-\frac{3}{8}\gamma\,\frac{p}{1+p}\Big)\frac{1}{(1+p)^{1/2}} + \\
&+\gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\frac{1}{(1+p)^{1/2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\frac{3}{8}\gamma\Big)^n\frac{1}{nn!} + \\
&+\frac{7}{32}\gamma^2\,\frac{\ln^2(1+p)}{(1+p)^{3/2}} - \frac{5}{16}\gamma^2\,\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{3/2}}\Big\}. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Положение переднего фронта Σ задается уравнением

$$
\begin{aligned}
y(p) = &\frac{\gamma}{2}\ln(1+p) + \varepsilon^3\Big\{ -\frac{10}{3}\gamma - \gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\ln(1+p) - \\
&-\gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{nn!}\Big(\frac{3}{8}\gamma\frac{1}{1+p}\Big)^n + \\
&+\frac{\gamma}{2}\ln(1+p) + \frac{10}{3}\gamma\exp\Big(-\frac{3}{8}\gamma\,\frac{p}{1+p}\Big) + \\
&+\gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{3}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{nn!}\Big(\frac{3}{8}\gamma\Big)^n\Big\}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Задача о скручивающем ударе по цилиндрической полости в нелинейно-упругой несжимаемой среде. Рассмотрим одномерную задачу о скручивающем ударе по внутренней поверхности полости. В результате воздействия все точки среды начинают движение по окружностям. Для линейно-упругой среды такое движение моделируется одной составляющей вектора перемещений $u_\varphi(r;t)$ ($u_r = u_z = 0$). В нелинейной модели для описания движения среды введем следующие компоненты перемещений:

$$u_r = r(1-\cos\Psi), \qquad u_\varphi = r\sin\Psi, \qquad u_z = 0$$

($\Psi(r,t)$ — угол поворота точек среды). Решение задачи сводится к определению функций $\Psi(r,t)$ и $p(r,t)$, а также положения возникающей в результате удара поверхности разрывов. Приведем краевые условия. На нагружаемой поверхности выполняется условие

$$\Psi\Big|_{\substack{r=r_0\\ t\geqslant 0}} = \varphi_0 t + \frac{\dot\varphi_0 t^2}{2}, \qquad (18)$$

где φ_0, $\dot\varphi_0$ — угловая скорость и угловое ускорение. Постоянное ускорение поворота выбрано для упрощения соотношений, получаемых в результате решения. На ударной волне при отсутствии начальных деформаций выполняются условия

$$\Psi\big|_{r=r_0+\tilde r(t)} = 0, \qquad \tau\big|_{r=r_0+\tilde r(t)} = -\frac{\partial\Psi^-}{\partial r}, \qquad [\sigma_{rr}]\big|_{r=r_0+\tilde r(t)} = 0,$$

$$\tilde{r}(t) = \int\limits_0^t G(\xi)\,d\xi, \qquad G = C\Big(1 + \frac{\gamma}{2}\,(r\tau)^2 + \ldots\Big), \qquad p^+ = p_0 = \mathrm{const}\,.$$

Для рассматриваемой задачи уравнения движения принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\Big(1 + 3\gamma\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big)^2\Big) + \frac{1}{r^2}\Big(3r\,\frac{\partial\Psi}{\partial r} + 5\gamma r^3\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big)^3\Big) = \frac{1}{C^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \ldots,\\ \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial r} + (\beta+1)r\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big)^2 + \beta r^2\,\frac{\partial\Psi}{\partial r}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} = \frac{1}{C^2}\,r\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big)^2 + \ldots.\end{gathered} \tag{19}$$

Как и выше, основной задачей при построении решения является определение поля функции $\Psi(r,t)$.

Метод возмущений в задаче о скручивающем ударе. Считая, что ударное воздействие приводит к возникновению перемещений одного порядка малости с перемещениями в рассмотренной выше антиплоской задаче, в прифронтовой области зададим безразмерные переменные внешней задачи:

$$\begin{gathered}s = \frac{r - r_0}{r_0}\,\varepsilon^{-4}, \qquad m = \frac{r - r_0 - Ct}{r_0}\,\varepsilon^{-3},\\ \varkappa(s,m) = \Psi\varepsilon^{-9/2}, \qquad \varepsilon = (v_0/C)^{2/3}, \qquad v_0 = r_0\varphi_0.\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19) и (18), для функции $\varkappa$ получим внешнюю краевую задачу

$$\begin{gathered}(\varkappa_{,ss} + 2\varepsilon\varkappa_{,sm} + \varepsilon^2\varkappa_{,mm})\{1 + 3\gamma\varepsilon(1+\varepsilon^4 s)^2(\varkappa_{,s} + \varepsilon\varkappa_{,m})^2\} +\\ + \frac{\varepsilon^4}{(1+s\varepsilon^4)^2}\,\{3(1+\varepsilon^4 s)(\varkappa_{,s} + \varepsilon\varkappa_{,m}) + 3\gamma\varepsilon(1+\varepsilon^4 s)^3(\varkappa_{,s} + \varepsilon\varkappa_{,m})^3\} + \ldots = \varepsilon^2\varkappa_{,mm},\\ \varkappa\big|_{s=0} = -m + \varepsilon^3 K m^2/2, \qquad K = \dot{\varphi}_0 r_0^2/(Cv_0).\end{gathered} \tag{21}$$

Представляя $\varkappa$ в виде асимптотического ряда

$$\varkappa(s,m) = \varkappa_0(s,m) + \varepsilon\varkappa_1(s,m) + \varepsilon^2\varkappa_2(s,m) + \varepsilon^3\varkappa_3(s,m) + \ldots$$

и подставляя этот ряд в (21), получим внешнее разложение решения относительно $\varkappa$, аналогичное (9), по крайней мере, до третьего порядка по ε. Это разложение также содержит неопределенные функции. Для построения равномерно пригодного разложения выполним переход во внутреннюю область, считая $p = \varepsilon^4 s$. В переменных p, m, $\varkappa$ получим внутреннюю краевую задачу

$$\begin{gathered}\varkappa_{k,pm} + \frac{3\gamma}{2}\,(1+p)^2\varkappa_{k,mm}\varkappa_{0,m}^2 + \frac{3}{2(1+p)}\,\varkappa_{k,m} = H_k(m,p), \qquad k = 3i, \quad i = 0,1,2,\ldots,\\ r\tau\big|_{m=y(p)} = -(1+p)\varepsilon^{3/2}(\varkappa_{,m} + \varepsilon^3\varkappa_{,p}), \qquad \varkappa(m,p)\big|_{m=y(p)} = 0,\end{gathered} \tag{22}$$

где $y(p)$ — неизвестная функция, задающая положение переднего фронта ударной волны; функция $\varkappa(m,p)$ представлена асимптотическим рядом вида (12); функции $H_k(m,p)$ определяются через $H_{k-1}(m,p)$, причем $H_0 = 0$. Из (22) следует, что на нулевом шаге решение задачи определяется следующим эволюционным уравнением:

$$\varkappa_{0,pm} + \frac{3\gamma}{2}\,(1+p)^2\varkappa_{0,mm}\varkappa_{0,m}^2 + \frac{3\varkappa_{0,m}}{2(1+p)} = 0. \tag{23}$$

Следует отметить, что (23) не является самостоятельным эволюционным уравнением. Действительно, если выполнить замену неизвестной функции, считая $w_0 = (1+p)\varkappa_0$, то вновь получим уравнение (14) относительно w_0. Такая функция соответствует приближенному решению $u_\varphi \approx r\Psi$, $u_r \approx 0$. Для определения положения Σ решается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(p) = \gamma(1+p)^2(\varkappa_{,m} + \varepsilon^3\varkappa_{,p})^2/2 - \gamma^2\varepsilon^3(1+p)^4(\varkappa_{,m} + \varepsilon^3\varkappa_{,p})^4/4 + \ldots, \qquad (24)$$

где учтено, что $\varkappa = \varkappa(p,m)$, $m = y(p)$. Краевое условие для уравнения (24) имеет вид $y(0) = 0$. Решая совместно (22), (24), для $\varkappa(p,m)$ получим решение до третьего порядка малости. Приведем равномерно пригодное решение на его основе:

$$\begin{aligned}\varkappa = -\frac{m}{(1+p)^{3/2}} + \frac{\gamma}{2}\,\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{3/2}} + \varepsilon^3\Big\{\frac{3m^2}{16}\,\frac{1}{(1+p)^{5/2}} + {}\\ + \Big(\frac{25}{8}\gamma\,\frac{1}{(1+p)^{5/2}} - \frac{3}{16}\gamma\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{5/2}} - \frac{25}{8}\gamma\,\frac{1}{(1+p)^{3/2}}\Big)m - {}\\ - \gamma\Big(-\frac{25}{8}\gamma + \frac{1}{2}\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{3/2}} - {}\\ - \frac{31}{15}\,\frac{1}{(1+p)^{3/2}} + \frac{25\gamma^2}{16}\,\frac{\ln(1+p)}{(1+p)^{5/2}} + \frac{3}{64}\gamma^2\,\frac{\ln^2(1+p)}{(1+p)^{5/2}} + {}\\ + \gamma\Big(-\frac{25}{8}\gamma + \frac{1}{2}\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\frac{1}{(1+p)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{15}{8}\gamma\frac{1}{1+p}\Big)^n\frac{1}{nn!} - {}\\ - \gamma\Big(-\frac{25}{8}\gamma + \frac{1}{2}\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\frac{1}{(1+p)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{15}{8}\gamma\Big)^n\frac{1}{nn!} + {}\\ + \frac{31}{15}\gamma\exp\Big(-\frac{15}{8}\gamma\,\frac{p}{1+p}\Big)\frac{1}{(1+p)^{3/2}}\Big\}. \qquad (25)\end{aligned}$$

Для $y(p)$ получаем

$$\begin{aligned}y(p) = \frac{\gamma}{2}\ln(1+p) + \varepsilon^3\Big\{-\gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{25}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\frac{1}{1+p}\Big)\ln(1+p) + {}\\ + \frac{\gamma}{2}\ln(1+p) + \gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{25}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nn!}\Big(-\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)^n + {}\\ + \frac{31}{15}\exp\Big(-\frac{15}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big) - \frac{31}{15} - {}\\ - \gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{25}{8}\gamma\Big)\exp\Big(\frac{15}{8}\gamma\,\frac{1}{1+p}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nn!}\Big(-\frac{15}{8}\gamma\Big)^n\Big\}. \qquad (26)\end{aligned}$$

Согласно (16), (17) и (25), (26) можно записать окончательные приближенные решения в размерных переменных.

В заключение отметим различие характера распространения деформаций, приводящих к изменению объема и формы: величины $w_{0,m}$ и $\varkappa_{0,m}$ входят в уравнения (14), (23) соответственно во второй степени, тогда как в уравнение для квазипростых волн — в первой степени. Очевидно, что при учете диссипативных факторов данное различие сохранится и в эволюционном уравнении типа уравнения Бюргерса, а при учете дисперсии — в эволюционном уравнении типа уравнения Кортевега — де Фриза.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бленд Д.** Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
2. **Буренин А. А., Чернышов А. Д.** Ударные волны в изотропном упругом пространстве // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711–717.
3. **Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.** Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 3. С. 523–534.
4. **Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.** Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998.
5. **Буренин А. А.** Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневост. мат. сб. 1999. Вып. 8. С. 49–72.
6. **Буренин А. А., Рагозина В. Е.** О прифронтовых асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: Сб. науч. тр. к 60-летию со дня рожд. Г. И. Быковцева. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 225–242.
7. **Буренин А. А., Россихин Ю. А.** К решению одномерной задачи нелинейной теории упругости со структурной ударной волной // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 1. С. 103–108.
8. **Буренин А. А., Шаруда В. А.** Косой удар по упругому полупространству // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 6. С. 172–177.
9. **Буренин А. А., Зиновьев П. В.** К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики: Сб. науч. тр. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.
10. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
11. **Герасименко Е. А., Рагозина В. Е.** Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневост. мат. сб. 2004. Т. 5, № 1. С. 100–109.
12. **Найфе А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 1/XII 2005 г.